

## Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

Bouligand, Georges: Aspects courants de la recherche mathématique, indépendants de son objet. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 2689–2692 (1956).

Bouligand, Georges: Sur les conditions effectives de la recherche. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 2789–2792 (1956).

Bouligand, Georges: Types divers d'évolution irréversible. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 1580–1583 (1956).

L'auteur cherche des traits généraux dans l'évolution des mathématiques.

*H. Freudenthal.*

Maros dell'Oro, Angiolo: *Matematica pura e matematica applicata*. Archimede 8, 104–108 (1956).

Fry, Thornton C.: Mathematics as a profession today in industry. Amer. math. Monthly 63, 71–80 (1956).

Rogers jr., Hartley: A general education course in pure mathematics. Amer. math. Monthly 63, 460–465 (1956).

## Geschichte.

● Waerden, B. L. van der: *Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*. Aus dem Holländischen übersetzt von Helga Habicht. Mit Zusätzen vom Verfasser. (Wissenschaft und Kultur, Bd. 8.) Basel, Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1956, 488 S.

Die jetzt vorliegende, lange erwartete deutsche Übersetzung (vgl. zu den beiden ersten Ausgaben dies. Zbl. 35, 145 und 56, 242) schließt eine Lücke in der deutschen mathematik-historischen Literatur; die älteren Werke (wie Cantor) sind infolge neuer Entdeckungen und Forschungen vollständig veraltet und die neueren Darstellungen der antiken Mathematik (wie Becker, Hofmann) geben nur einen kurzen, wenn auch exakten Überblick. So ist man für diese erste in deutscher Sprache wieder zugängliche Beschreibung der Entwicklung der gesamten antiken Mathematik dem Verf. und der Übersetzerin wirklich dankbar. Der Text blieb abgesehen von mancherlei im Vorwort (S. 5) angeführten Ergänzungen (vgl. auch den Abschnitt Heron sowie die überarbeitete Einleitung S. 13) im wesentlichen unverändert, dagegen wurden die Abbildungen vielfach gegen bessere ausgetauscht und in ihrer Zahl vermehrt (wie Abbildungen zur Technik oder die Miniatur Euklid zu S. 246). — Daß die Bedeutung der antiken Mathematik für die moderne im Anteil Griechenlands liegt, steht außer Zweifel und doch sind für den Historiker auch die schwerer zugänglichen Vorstufen wichtig, wie ja die Technik- oder Kunstgeschichte auch die Zeiten untersucht, in denen man nichts von statischen Berechnungen oder von Perspektive wußte. Verf. widmet ja auch der vorgriechischen Zeit fast 1/3 des Werkes. So ist der Satz S. 57: „Rechnen ist noch keine Mathematik“ nicht recht verständlich. Man möchte da die englische Wiedergabe „Calculation is not the same as mathematics“ vorziehen. Sicher war doch die Entwicklung der Rechentechnik die mathematische Hauptleistung in der Zeit, in der die Wissenschaft eben noch nicht erwacht war, aber, wenn auch in anderer Form, bereits existierte. — Auch über die angewandte Mathematik der Babylonier will der Verf. „lieber nicht sprechen“. Aber gerade bei einer derartigen Bauaufgabe tritt die erste unbestimmte Gleichung auf ( $x^2 - y^2 = 22\frac{1}{2}$ ), deren Lösung, wie Gandz gezeigt hat, mit der von Diophant



gegebenen übereinstimmt, auch wieder ein Einzelhinweis für die Tradition, unter der Diophant steht. Bei der zum Schluß noch kurz behandelten Mathematik bei den Byzantinern, denen die Erhaltung der klassischen Werke zu danken ist, kann man noch den Mathematiker Leon (9. Jhd.) anführen, der bereits vor Leonardo von Pisa und Vieta Beispiele für eine Buchstabenarithmetik bringt (vgl. Euklids Elemente, ed. Heiberg V, 714ff.). Da der Verf. seine Leser beschwört „Glaubt mir nichts, prüft alles nach“, sei noch zum Schluß hinter den Satz „jedenfalls müssen die Ägypter den Inhalt der Pyramide gekannt haben“ ein Fragezeichen gesetzt.

K. Vogel.

**Bašmakova, I. G.:** Die Abhandlung des Archimedes „Über schwimmende Körper“. Istoriko-mat. Issledovanija 9, 759—788 (1956) [Russisch].

Ausführliche Analyse der beiden Bücher „über schwimmende Körper“, in deren erstem Archimedes sein hydrostatisches Grundgesetz ableitet, während er im zweiten, das mit einer anderen Formulierung desselben Gesetzes beginnt, hauptsächlich die Frage untersucht, wie ein in einer Flüssigkeit schwimmendes Rotationsparaboloidsegment, das senkrecht zur Achse abgeschnitten ist, in verschiedenen Lager (senkrecht, geneigt, zum Teil eingetaucht usw.) in der Flüssigkeit schwimmt. — Im abschließenden Kapitel weist Verf. darauf hin, daß erst Anfang des 19. Jhdts weitere Fortschritte erzielt wurden, und hebt besonders hervor, daß Archimedes (wie auch andere große griechische Mathematiker) in gleicher Weise die reine wie die angewandte Mathematik gepflegt hat, daß er also nicht, wie Plutarch meint, mathematische Anwendungen in der Technik als geometrisches Spiel, als Zeitvertreib ansah. — Der auf S. 786 geäußerten Ansicht, daß die Sklavenwirtschaft zur Zeit des römischen Imperiums und das sicher damit in Beziehung stehende geringe Ansehen handwerklicher Arbeit auch zu einer Mißachtung der angewandten Wissenschaft geführt habe, könnte entgegengehalten werden, daß gerade die Römer nur Sinn für praktische Wissenschaft hatten (Cicero: *Ac nos metiendi ratiocinandique causa huius artis* — d. h. der Geometrie — *terminavimus modum*) und daß von Vitruv oder auch von Pappos für den schöpferischen Mechaniker sowohl wissenschaftliche wie praktische Vorbildung verlangt wird.

K. Vogel.

**Stamatis, Evangelos:** Über die mathematische Stelle des Theaetetus von Platon. Praktika Akad. Athen 31, 10—16 (1956) [Griechisch mit deutscher Zusammenfassg.].

Im Platonischen Dialog Theaetetus wird bekanntlich eine Unterrichtslista geschildert, in der von Theodoros — wie wir es ausdrücken würden — die Irrationalität von  $\sqrt{3}$  bis  $\sqrt{17}$  „gezeigt“ (= bewiesen?) wurde. Danach hat er aus irgendeinem Grund aufgehört (*ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο*). Über die Art des Beweises sagt Platon nichts. Von den dafür aufgestellten Vermutungen führt der Verf. einige an und macht selbst auf eine Reihe von Fällen aufmerksam, in denen die Zahl 17 eine Rolle spielt. Dazu gehören: die Heiligkeit der Zahl 17 bei den Pythagoreern nach Zeugnissen von Iamblichos und Plutarch, die musikalische Proportion im Timaios  $6:8 = 9:12$  ( $8 + 9 = 17$ ), das für den Aufbau der Tonleiter wichtige Intervall  $9/8$ , schließlich noch die Säulenzahl des Parthenon (Längsseite 17, Breitseite 8) und die Silbenzahl im homerischen Hexameter.

K. Vogel.

**Tenca, Luigi:** Su una svista di stampa in „de Dimensione Parabolae“ di Evangelista Torricelli notata da Stefano Angeli. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 258—259 (1956).

**Suter, Rufus:** The Galileian inscriptions on the facade of Viviani's house in Florence. Osiris 12, Piae memoriae Raymundi C. Archibald oblatum, 225—243 (1956).

**Barnett, Martin K.:** The development of thermometry and the temperature concept. Osiris 12, Piae memoriae Raymundi C. Archibald oblatum, 269—341 (1956).

**Gnedenko, B. V. und I. I. Gichman:** Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Ukraine. Istoriko-mat. Issledovanija 9, 477—536 (1956) [Russisch].

Der Bericht reicht von den Anfängen, beginnend mit A. F. Pavlovskij (1821),



M. E. Vaščenko-Zacharčenko (1863), bis in die Gegenwart. Je weiter die Entwicklung fortschreitet, umso schwieriger wird es, diese in ihrer Begrenzung auf die Ukraine darzustellen. Es fallen daher auch Streiflichter auf die Fortschritte der Wahrscheinlichkeitstheorie in ganz Rußland. Zur Periode des Beginns gehören außer den oben erwähnten Forschern V. P. Ermakov und M. A. Tichomandričikij. Die „klassische Periode“ beginnt mit den Arbeiten von P. L. Čebyšev und A. A. Markov. Dann wird über eine weniger bekannte Arbeit von I. V. Slešinskij berichtet, in der im Zusammenhang mit der Fehlertheorie bereits von der Cosinustransformation einer geraden Verteilungsdichte Gebrauch gemacht wird. Nach einer kurzen Würdigung von A. M. Ljapunov beschäftigt sich dieser Teil des Berichtes vor allen Dingen mit den Arbeiten von S. N. Bernštejn. Abschließend wird über die Arbeiten von E. E. Sluckij berichtet. Der letzte Teil schildert die Entwicklung seit dem Jahre 1930. Ein beigefügtes Literaturverzeichnis beschränkt sich ausschließlich auf ukrainische Arbeiten.

*L. Schmetterer.*

**Norden, A. P.: Gauß und Lobačevskij.** Istoriko-mat. Issledovanija 9, 145—168 (1956) [Russisch].

In der vorliegenden Arbeit werden alle bekannten Stellen in Briefen, Rezensionen und dergl. zusammengestellt und kommentiert, aus denen man erschließen kann, wie weit Gauß zu verschiedenen Zeiten seines Lebens bereits im Besitz der nichteuklidischen Geometrie gewesen ist. Verf. gelangt dabei zu dem Schluß, daß die vorhandenen Fragmente darauf schließen lassen, daß sein großer Landsmann Lobačevskij bei der Durcharbeitung gewisser Einzelheiten der nicht euklidischen Geometrie doch weiter gekommen war als Gauß. Bei der Besprechung der philosophischen Grundhaltung beider Männer ergibt es sich, daß Gauß lange am Apriorismus Kants festgehalten hat und sich erst später fast widerstrebend davon löste, während Lobačevskij von Anfang an reiner Empirist (nach heutigem russischem Sprachgebrauch: Materialist) gewesen ist.

*W. Burau.*

**Oloničev, P. M.: Der Kazaner Geometer Fedor Matveevič Suvorov.** Istoriko-mat. Issledovanija 9, 271—316 (1956) [Russisch].

Der Mathematiker Fedor Matveevič Suvorov wurde im Jahre 1845 im Gouvernement Perm geboren; er studierte und wirkte hauptsächlich in Kazan, aber erst seit 1885 als ord. Prof. an der Universität. Im Jahre 1911 ist er dort verstorben. Bei seiner Lehrtätigkeit an diesem Ort hatte er mehrfach Gelegenheit genommen, die Ideen seines Vorgängers Lobačevskij in Wort und Schrift zu verbreiten, insbesondere anläßlich des 100. Geburtstages Lobačevskijs im Jahre 1893. Es wird in der vorliegenden Biographie nachgewiesen, daß einige Sätze über Hyperflächen im  $R_4$ , die Analoga der Hauptkrümmungen usw., die man meist Ricci und Levi-Civita zuschreibt, sich bereits in der Diss. von Suvorov im Jahre 1871 finden. Dann werden noch einige Untersuchungen Suvorovs aus dem Jahre 1885 über Geometrie im Komplexen besprochen. Der Schwerpunkt der Tätigkeit Suvorovs lag jedoch offenbar auf didaktischem Gebiet, wie das nicht umfangreiche Schriftenverzeichnis, das auch einige Lehrbücher enthält, beweist.

*W. Burau.*

**Černjaev, M. P.: Konstantin Alekseevič Andreev als Geometer.** Istoriko-mat. Issledovanija 9, 723—756 (1956) [Russisch].

Die vorliegende Arbeit enthält eine ausführliche Biographie mit Kennzeichnung der Arbeiten des synthetischen Geometers K. A. Andreev (1848—1921). Vgl. zu dem gleichen Gegenstand die Einzelschrift von Gordevski (dies. Zbl. 66, 7).

*W. Burau.*

**Rozenfel'd, B. A.: Aleksander Petrovič Kotel'nikov.** Istoriko-mat. Issledovanija 9, 317—400 (1956) [Russisch].

Aleksander Petrovič Kotel'nikov lebte 1865—1944. Er wurde in Kazan als Sohn eines auch schon bekannten Professors für Mathematik und Mechanik Pet. Ivanovič Kotel'nikov (1809—1879) geboren. Der jüngere Kotel'nikov studierte in



Kazan und wirkte dann in Kiev und darauf wieder in Kazan und erneut in Kiev als Professor für Mathematik und Mechanik. Vom Jahre 1924 bis zu seinem Tode war er Prof. für höhere Mechanik in Moskau mit umfangreicher Lehrtätigkeit an mehreren Instituten. Sein nicht umfangreiches Schriftenverzeichnis umfaßt größere Vorlesungen, hauptsächlich über analytische Geometrie, Schraubentheorie, nicht-euklidische Geometrie und Mechanik. Nach einer ausführlichen Biographie werden in der vorliegenden Arbeit in fast lehrbuchmäßiger Ausführlichkeit die von Kotel'nikov mit Vorliebe behandelten Gebiete unter Beibringung vieler historischer Belege dargestellt. Es sind dies hauptsächlich die Ballsche Schraubentheorie und die Anwendung der verschiedenen Arten von Quaternionen in Geometrie und Mechanik. Zum Schluß werden auch die Schüler von Kotel'nikov erwähnt. Der bedeutendste von ihnen war der auch bereits verstorbene Tensoranalytiker Peter Alex. Širokov (1895—1944).  
W. Burau.

Lebesgue, Henri: *L'Oeuvre mathématique de Vandermonde*. Enseignement math., II. Sér. 1, 203—223 (1956).

Abdruck aus: *Thalès, Recueil des Travaux de l'Institut d'Histoire des Sciences* 4 (1937—39).

● Born, Max: *Physics in my generation*. London & New York: Pergamon Press 1956. 240 p. 40 s.

Sarton, George: Raymond Clare Archibald. *Osiris* 12, Piae memoriae Raymundi C. Archibald oblatum, 5—34 (1956).

Mit Schriftenverzeichnis.

Stahlman, William D.: Raymond Claire Archibald (1875—1955). *Isis* 47, 243—246 (1956).

Jaeger, J. C.: Horatio Scott Carslaw. *J. London math. Soc.* 31, 494—501 (1956).

Mit Schriftenverzeichnis.

● Douglas, A. Vibert: *The life of Arthur Stanley Eddington*. London-New York: Thomas Nelson and Sons, Ltd. 1956. XIV, 208 p., 15 plates. 25 s. net.

Temple, G.: Albert Einstein. *J. London math. Soc.* 31, 501—507 (1956).

Bottari, Amerigo: Federigo Enriques nei ricordi di un suo discepolo. *Periodico Mat.*, IV. Ser. 34, 130—131 (1956).

Campedelli, Luigi: Federigo Enriques nella scienza e nella scuola. 1871—1946. *Archimede* 8, 97—103 (1956).

Linnik, Ju. V. und A. I. Markuševič: Aleksandr Osipovič Gel'fond. (Zum 50. Geburtstage.) *Uspechi mat. Nauk* 11, Nr. 5 (71), 239—245 (1956) [Russisch].

In Memoriam Prof. Dr. J. Haantjes. *Simon Stevin* 31, 3—4 (1956).

Wattendorf, Frank L.: Theodore von Kármán, international scientist. *Z. Flugwissenschaft* 4, 163—165 (1956).

Pavljuk, I. A.: Klavdija Jakovlevna Latyševa. *Ukrain. mat. Žurn.* 8, 342—344 (1956).

Nachruf mit Schriftenverzeichnis.

Turnbull, H. W.: Archibald Read Richardson. 1881—1954. *J. London math. Soc.* 31, 376—384 (1956).

Mit Schriftenverzeichnis.

Rogosinski, W. W.: Frederic Riesz. *J. London math. Soc.* 31, 508—512 (1956).

Mit Schriftenverzeichnis.

Nevanlinna, Rolf: Erhard Schmidt zu seinem 80. Geburtstag. *Math. Nachr.* 16, 1—6 (1956).

Wissenschaftliche Würdigung.

Bottema, O.: Van der Woude achtzig Jahre. Mit Schriftenverzeichnis. *Nieuw Arch. Wiskunde*, III. R. 4, 2—12 (1956) [Holländisch].

Ślebodziński, W.: L'oeuvre scientifique de Kazimierz Żorawski. 1866—1953. *Colloquium math.* 4, 74—88 (1956).

Mit Schriftenverzeichnis.



## Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

**Destouches, J. L.:** Über den Aussagenkalkül der Experimentalaussagen. Arch. math. Logik Grundlagenforsch. 2, 104—105 (1956).

The Author considers the question of the causal interpretation of a microphysical theory. He shows how to construct a causal theory containing experimentally inaccessible propositions and an indeterministic theory containing no such propositions. He points out that a theory of the one kind can always be changed into a theory of the other kind.

A. Rose.

**Carruccio, Ettore:** I sistemi quasi coerenti. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 254—256 (1956).

**Lorenzen, Paul:** Zur Interpretation der Syllogistik. Arch. math. Logik Grundlagenforsch. 2, 100—103 (1956).

The Author first discusses the first order predicate calculus interpretation of syllogistic, and its axiomatic interpretations by Łukasiewicz (Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic; this Zbl. 43, 246) and von Freytag-Löringhoff (Z. philos. Forsch. 4, 235ff. insbesondere S. 253). He then shows that syllogistic can be represented as a part of positive implicational logic, with or without the existential quantifier. The paper concludes with a further discussion of the von Freytag axiom system, in which the effect of taking the formula  $P \supset P$  as an additional axiom is considered.

A. Rose.

**Schröter, Karl:** Theorie des bestimmten Artikels. Z. math. Logik Grundl. Math. 2, 37—56 (1956).

Der bestimmte Artikel wird zunächst definitorisch nach Russell eingeführt. Sind Prädikate  $\mathfrak{A}(x)$  und  $\mathfrak{B}(x)$  vorhanden, so daß die Formel für „Es gibt ein  $x$  mit der Eigenschaft  $\mathfrak{A}(x)$  und  $\mathfrak{B}(x)$ , und es gibt genau ein  $x$  mit der Eigenschaft  $\mathfrak{A}(x)$ “ ein Ausdruck ist, so soll auch  $\mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{A}(x))$  ein Ausdruck sein, dessen Äquivalenz mit der erwähnten Formel postuliert wird. Bei dieser rekursiven Einführung der  $\iota$ -Terme ergibt sich ihre Eliminierbarkeit von selbst. Es entsteht aber die folgende Schwierigkeit. Angenommen,  $\mathfrak{B}(x)$  sei ein Prädikat, für das  $\forall x \mathfrak{B}(x)$  beweisbar ist, und „es gibt genau ein  $x$  mit der Eigenschaft  $\mathfrak{A}(x)$ “ sei falsch. Dann wäre  $\mathfrak{B}(\iota_x \mathfrak{A}(x))$  falsch, so daß man keine allgemeine Einsetzungsregel für Terme haben kann. Dieser Sachverhalt wird vom Verf. auch auf Seite 49 erwähnt. Es ist natürlich möglich formal so vorzugehen und auch den so entstehenden Kalkül, wie beschrieben wird, rein axiomatisch ohne Bezugnahme auf den zugrunde liegenden engeren Kalkül festzulegen. Aber für die Interpretation entstehen meiner Ansicht nach zu große Schwierigkeiten; z. B. wäre, um ein außermathematisches Beispiel zu benutzen, der Satz „Der Bruder Goethes war ein sterbliches Wesen“ dann falsch, statt sinnlos. Trotz aller formalen Vereinfachungen, die sich auf dem vom Verf. eingeschlagenen Wege ergeben, erscheint es mir daher richtiger, bei der Einführung der  $\iota$ -Terme nach dem Vorbild von Hilbert und Bernays die Beweisbarkeit der entsprechenden Unitätsformeln vorauszusetzen. Beim Beweis des Eliminierbarkeitstheorems für diesen Fall, der an und für sich schwieriger ist, können allerdings dann, wie angegeben, die Überlegungen des Verf. für seinen allgemeineren Kalkül vorteilhaft herangezogen werden.

W. Ackermann.

**Zykov, A. A.:** The spectrum problem in the extended predicate calculus. Amer. math. Soc., Transl., II. Ser. 3, 1—14 (1956).

Vgl. die Besprechung des russ. Originals dies. Zbl. 50, 7.

**Halmos, Paul R.:** The basic concepts of algebraic logic. Amer. math. Monthly 63, 363—387 (1956).

An expository paper on the mathematical logic from the point of view of the theory of Boolean algebras, in particular on the notion of polyadic algebras introduced by the author.

R. Sikorski.



Lyndon, Roger C.: The representation of relation algebras. II. Ann. of Math., II. Ser. 63, 294—307 (1956).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 37, 293) hat Verf. den folgenden Satz aufgestellt: Die darstellbaren Relationsalgebren (RA) können nicht durch algebraische Axiome gekennzeichnet werden (In dem angegebenen Referat ist dieser Satz versehentlich mit der Einschränkung „endlich viele“ wiedergegeben). Diesen Satz hat Tarski [Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A, 57 572—588 (1954)] als falsch nachgewiesen, jedoch kein Verfahren zur Gewinnung eines Axiomensystems für die darstellbaren RA angegeben. Die vorliegende Arbeit liefert nun ein solches Axiomensystem. Hilfsmittel ist dabei die Zuordnung eines Prädikats  $P'$  zu jedem (einstelligen) Prädikat  $P$  (erklärt in Booleschen Algebren), wobei  $P'(x)$  besagt, daß aus  $x \in x_1 \cup \dots \cup x_m$  stets eine der Aussagen  $P(x_i)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) folgt. Es wird ein System von unendlich vielen Axiomen gebildet, von denen keines einen „Es gibt“-Quantor enthält, während die „Alle“-Quantoren bei jedem am Anfang stehen. Bei Beschränkung auf die abzählbaren einfachen RA kennzeichnet dieses System jedenfalls die darstellbaren RA. Nach einem Verfahren von Tarski kann man nun die Axiome durch Gleichungen ersetzen und so die Einschränkung der Einfachheit beseitigen. Ein Ergebnis von Henkin gestattet dann auch noch das Weglassen der Abzählbarkeitsvoraussetzung. G. Pickert.

Shapiro, Norman: Degrees of computability. Trans. Amer. math. Soc. 82, 281—299 (1956).

The main aim of this paper is the assessment of the degree of unsolvability of some decision problems concerning sets of recursive real numbers and recursive functions. This amounts to determining the position in the Kleene hierarchy of certain partial (i. e. not everywhere defined) relations between non-negative integers so the author starts with a discussion of how quantification and membership in the Kleene hierarchy should be defined for partial relations. He shows that various alternative definitions are equivalent and standardises his notation as follows: a (partial) relation is potentially- $k$ -enumerable if it has an extension which is  $k$ -enumerable, i. e. which is expressible in the Kleene  $k$ -quantifier form with existential quantifier first; potentially-anti- $k$ -enumerable is defined dually. He proves that a relation is potentially partial recursive in a finite number of  $k$ -enumerable and anti- $k$ -enumerable relations if and only if it is both potentially- $(k+1)$ -enumerable and potentially-anti- $(k+1)$ -enumerable. This is the extension to partial relations of a well known theorem of Post; the author's arguments provide a new proof of this. Now let  $R$  be any set of real numbers (between 0 and 1) and let  $P_R$  denote the (singularly) relation whose domain of definition is the set of gödel numbers of recursive sequence of 0's and 1's (with an infinity of 0's) and where  $P_R(x)$  is true if and only if the real number whose binary expansion has the gödel number  $x$  belongs to  $R$ . Part II of the paper constitutes a study of the classification of the  $P_R$  for various sets and types of set of real numbers  $R$ . Typical results are: "If each element of  $R$  is algebraic and if there exists a real number  $u$  such that  $R$  contains all real numbers of the form  $u + v$  for  $v$ 's with finite binary expansion, then every 2-enumerable relation is many-one reducible to  $P_R$ ". "The decision problems of the set of rational numbers and the set of algebraic numbers are recursively unsolvable and are many-one equivalent to each other". "For any set  $N$  of non-negative integers, there exists a set  $R$  of real numbers, such that  $N$  and  $P_R$  are many-one equivalent". Now let  $C$  be a class of recursive 1-ary functions; let  $Q_C$  be the total relation such that  $Q_C(e)$  is true if and only if the 1-ary partial recursive function with gödel number  $e$  is an element of  $C$  and let  $Q'_C$  be the restriction of  $Q_C$  to the set of gödel numbers of total 1-ary functions. Part III deals with the classification of  $Q_C, Q'_C$  for various sets  $C$ , many of the results being analogues of corresponding results in Part II. Typical results are: "For any set  $N$  of non-negative integers, there exists a class  $C$  such that



$Q_C$  and  $N$  are many-one equivalent". "If  $C$  is a non-void finite class of 1-ary recursive functions, then  $Q_C$  is strictly potentially anti-1-enumerable and  $Q_C$  is strictly anti-2-enumerable".

*J. C. Shepherdson.*

**Mučnik (Muchnik), A. A.:** Negative answer to the problem of reducibility of the theory of algorithms. Doklady Akad. Nauk SSSR 108, 194—197 (1956) [Russisch].

This paper contains a solution to the well known problem of Post [Bull. Amer. math. Soc. 50, 284 (1944)] of determining whether there exist different degrees of undecidability for recursively enumerable (r. e.) sets. By a fairly intricate construction (details of the proof are left to the reader) the author constructs two r. e. (in fact hypersimple) nonrecursive sets neither of which is reducible to the other by any partial recursive operator. He shows further that there exists an infinite r. e. sequence of hypersimple sets every pair of which have this property. Also that if  $G$  is any r. e. but not recursive set then there exists a hypersimple set  $H$  which is reducible to  $G$  but to which  $G$  is not reducible. He goes on to state some further results relating to the calculus of mass problems introduced by Medvedev (this Zbl. 65, 3). Let  $A_\psi$  denote the problem of extending the partial recursive function  $\psi(n)$  [i. e. the problem whose class of solutions consists of all extensions of  $\psi(n)$ ]. Theorem 4: If problem  $B$  has a unique solution and is reducible to  $A_\psi$  then  $B$  is decidable. Theorem 5: For every pair of recursively inseparable r. e. sets  $E_1, E_2$  there exists a non recursive r. e. set  $H$  such that the problem of separating  $E_1, E_2$  is not reducible to the decision problem of  $H$ . Theorem 6: There exists a r. e. sequence of pairwise incomparable problems of separation of r. e. sets. Theorem 7: For every unsolvable problem  $A_{E_1, E_2}$  of separation of r. e. sets  $E_1, E_2$  there exists a problem of separation  $A_{H_1, H_2}$  of recursively inseparable sets  $H_1$  and  $H_2$  such that  $A_{E_1, E_2}$  is not reducible to  $A_{H_1, H_2}$ . Finally he points out that all these results can be generalised by replacing "r. e. set" by "recursively projective set of the  $n^{\text{th}}$  (Kleene-Mostowski) class" and "partial recursive operator" by "recursively projective operator of class  $n$ ".

*J. C. Shepherdson.*

## Algebra und Zahlentheorie.

### Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

• **Mal'cev, A. I.:** Grundzüge der linearen Algebra. 2. umgearb. Aufl. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 340 S. R. 7,95 [Russisch].

Die vorliegende zweite Auflage unterscheidet sich erheblich von der in dies. Zbl. 38, 9 besprochenen ersten. Die Art der Darstellung betont jetzt mehr den Lehrbuchcharakter. Die Abschnitte über die Jordansche Normalform wurden neu gefaßt und spezielle Fragen in die Aufgaben eingearbeitet. Auf diese Weise wurde es möglich, trotz einer Verringerung des Gesamtumfanges ein neues Kapitel über Multilinearformen und Tensoren aufzunehmen. Die neue Kapiteileinteilung ist folgende: 1. Matrizen. 2. Lineare Räume. 3. Lineare Abbildungen. 4. Polynome in Matrizen. 5. Unitäre und euklidische Räume. 6. Quadratische und bilineare Formen. 7. Lineare Abbildungen von Räumen mit bilinearer Metrik. 8. Multilineare Funktionen. Tensoren.

*R. Kochendörffer.*

**Jaekel, K.:** Über eine Matrizentransformation mit Dreiecksmatrizen. Z. angew. Math. Mech. 36, 154—155 (1956).

Der bekannte Zerlegung einer quadratischen Matrix  $\mathfrak{A}$  in das Produkt zweier Dreiecksmatrizen  $\mathfrak{A} = \mathfrak{C} \mathfrak{B}$  wird eine auch für singuläres  $\mathfrak{A}$  gültige Zerlegung in der Form  $\mathfrak{A} \mathfrak{D} = \mathfrak{U}$  mit oberer bzw. unterer Dreiecksmatrix  $\mathfrak{D}$  bzw.  $\mathfrak{U}$  gegenübergestellt, die zwar, da sich der Aufbau der Dreiecksmatrizen hier nicht schrittweise durchführen läßt, keine numerischen Vorteile bringt, wohl aber theoretische Bedeutung besitzt. Die Diagonalelemente der Dreiecksmatrizen sind nämlich gleich den



Hauptabschnittsdeterminanten von  $\mathfrak{M}$ . Daraus läßt sich dann leicht das bekannte Kriterium positiver (negativer) Definitheit einer Hermiteschen Matrix herleiten. Auch die Transformation der Hermiteschen Form auf eine Quadratsumme ist damit durchführbar.

R. Zurmühl.

**Schneider, Hans:** A matrix problem concerning projections. Proc. Edinburgh math. Soc. **10**, 129—130 (1956).

Let  $A$  be an  $n \times m$  matrix of rank  $r$ . It is of interest in mathematical statistics to find an  $m \times n$  matrix  $B$  of rank  $k$  such that  $(I - AB)^*(I - AB)$  is idempotent, and has latent roots 0 and 1 only. Here  $A^*$  denotes the conjugate transpose of  $A$ . (Cf. S. Vajda, this Zbl. **51**, 9.) The author shows that a necessary and sufficient condition for such a  $B$  to exist is  $k \geq n - r$ . He also states that when  $k = n - r$ , and  $m \leq n$  (or  $m \geq n$ ), then  $B = (A^* A)^{-1} A^*$  (or  $B = A^* (A A^*)^{-1}$ ) satisfies the condition. The solution is, in general, not unique. A similar problem can be solved concerning  $I - DA$  instead of  $I - AB$ , by a similar argument. The results are generalizations of those in a paper by Nagler (this Zbl. **50**, 11). S. Vajda.

**Turán, Paul:** Remark on the zeros of characteristic equations. Publ. math., Debrecen **4**, 406—409 (1956).

Man betrachte zwei quadratische Matrizen  $n$ -ter Ordnung  $A = (a_{ij})$  und  $B = (b_{ij})$  und bestimme die Größe  $F = \sum_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}|^2$ . Dann beweist der Verfasser, daß, wenn alle charakteristischen Wurzeln von  $A$  in einem Vertikalstreifen der komplexen Zahlenebene liegen, man den entsprechenden Vertikalstreifen für die charakteristischen Wurzeln von  $B$  bekommt, indem man die Randgeraden des ersten Vertikalstreifens um  $O(1/\lg F)$  auseinanderschiebt. Es werden insbesondere die zugehörigen Konstanten bestimmt, wobei der Verfasser von einem neuen Satz aus der Theorie der Differentialgleichungen Gebrauch macht.

A. Ostrowski.

**Kotljanskij, D. M.:** Abschätzungen für die Determinanten von Matrizen mit überwiegender Hauptdiagonale. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **20**, 137—144 (1956) [Russisch].

Man bezeichne eine  $n \times n$ -Matrix  $B = (b_{ik})$  als eine  $M$ -Matrix, wenn  $b_{ii} > 0$ ,  $b_{ik} < 0$ ,  $\sum_{j=1}^n b_{ij} > 0$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ,  $i \neq k$ ) gilt. Verf. beweist: a) Die adjungierten Minoren von  $B$  sind positiv. b) Die Determinante von  $B$  ist  $< b_{11} b_{22} \dots b_{nn}$ . c) Es sei  $A = (a_{ik})$  eine  $n \times n$ -Matrix, für die  $|a_{ii}| \geq b_{ii}$ ,  $|a_{ij}| \leq |b_{ij}|$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ;  $i \neq j$ ) ist. Dann gilt  $|\det A| \geq \det B$ . d) Für ein festes  $k$  aus der Reihe  $1, 2, \dots, n$  bezeichne man mit  $b_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = k+1, \dots, n$ ) die Unterdeterminante von  $B$ , die den Zeilenindizes  $1, 2, \dots, k, i$  und den Kolonnenindizes  $1, 2, \dots, k, j$  entspricht. Dann ist die aus den  $b_{ij}^{(k)}$  gebildete Matrix gleichfalls eine  $M$ -Matrix. — Ref. gestattet sich zu bemerken, daß von diesen Sätzen die Sätze a), b) und c) in wesentlich allgemeinerer Form zuerst aufgestellt und bewiesen wurden in seiner in dies. Zbl. **17**, 290 besprochenen Arbeit. Der Satz d) ist dagegen neu.

A. Ostrowski.

**Černikov, S. N.:** Positive und negative Lösungen von Systemen linearer Ungleichungen. Mat. Sbornik, n. Ser. **38** (80), 479—508 (1956) [Russisch].

Die ersten drei Paragraphen dieser Arbeit bringen eine ausführliche Darstellung der in der Doklady-Note gleichen Titels angemeldeten Resultate des Verf., auf deren Referat (dies. Zbl. **56**, 250) bezüglich der grundlegenden Definitionen zunächst verwiesen werde. In § 1 werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer bezüglich der Unbekannten  $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_l}$  des Systems  $(1) L_j \equiv \sum_{r=1}^n a_{jr} x_r - a_j \leq 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ) nicht positiven Lösung (vgl. das zitierte Referat) aufgestellt. Zum Beweis werden die aus der grundlegenden Abhandlung des Verf. (dies. Zbl. **50**, 12) bekannten allgemeinen Lösungsbedingungen auf das erwei-



terte System (1) plus  $x_{k_1} \leq 0, \dots, x_{k_l} \leq 0$  angewandt. In § 2 wird insbesondere die Bedingung hinzugenommen, daß keine der ausgezeichneten Unbekannten  $x_{k_\mu}$  den Wert 0 hat, wobei sich die folgende Definition als nützlich erweist: Sei  $\Delta$  ein bezüglich  $x_k$  nicht-positiv orientierter Knotenminor; eine Gesamtheit von  $m$  Zahlen  $s_1, \dots, s_m$  heißt  $\Delta$ -zulässig bezüglich  $x_k$ , wenn keiner der verschwindenden begleitenden Minoren von  $\Delta$  das zu dem von  $\Delta$  entgegengesetzte Zeichen bekommt, wenn man in jenem  $a_1, \dots, a_m$  durch  $s_1, \dots, s_m$  ersetzt; und wenn, falls  $\Delta$  die Spalte der Koeffizienten  $a_{jk}$  von  $x_k$  in (1) enthält und zum Verschwinden gebracht wird, indem man die  $a_{jk}$  durch die entsprechenden  $a_j$  ersetzt, und gleich  $\Delta^*$  wird, wenn man sie durch die entsprechenden  $s_j$  ersetzt, das Verhältnis  $\Delta^*/\Delta \leq 0$  ausfällt; oder wenn  $\Delta$  bei dem ersten Austausch nicht 0 wird oder die Spalte der  $a_{jk}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) gar nicht enthält. Alsdann hat man den folgenden Satz: Für eine bezüglich  $x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$  streng negative und bez.  $x_{p_1}, \dots, x_{p_l}$  streng positive Lösung von (1) ist notwendig und hinreichend, daß eine der zwei folgenden Bedingungen erfüllt ist: Entweder  $a_j \geq 0$  und im Falle daß  $a_j = 0$  fällt  $s_j = \sum_{i=1}^k a_{jn_i} \geq 0$  aus; oder das System (1) besitzt

wenigstens einen bezüglich  $x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$  und  $x_{p_1}, \dots, x_{p_l}$  nicht-positiv orientierten Knotenminor  $\Delta$  derart, daß die genannten  $s_j$  bez. dieser Unbekannten  $\Delta$ -zulässig sind. In § 3 werden die vorangehenden Resultate auf lineare Gleichungen spezialisiert: Das Gleichungssystem (2)  $L_j = 0$  hat dann und nur dann eine bezüglich  $x_{k_1}, \dots, x_{k_l}$  nicht-positive, bezüglich der restlichen Unbekannten  $x_{p_1}, \dots, x_{p_l}$  nicht-negative Lösung, wenn entweder alle  $a_j = 0$  sind, oder wenn es einen bez. der ersten Gesamtheit nicht-positiv, bez. der zweiten nicht-negativ orientierten Knotenminor gibt. Wenn die Matrix  $(a_{j\nu})$  den Rang  $r > 0$  hat und wenn (2) einen den Bedingungen des Satzes genügenden Knotenminor besitzt, so gibt es auch einen Knotenminor vom Rang  $r$ , der denselben Bedingungen genügt. Auf dieser Basis werden Bedingungen hergeleitet dafür, daß eine lineare Ungleichung  $L \equiv b_1 x_1 + \dots + b_n x_n - b_{n+1} \leq 0$  eine Folge des Bestehens des Systems (1) ist. Nach dem Haarschen Satz ist dafür notwendig und hinreichend die Existenz eines Systems nicht negativer

Zahlen  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  derart daß  $L \equiv \sum_{j=1}^m \lambda_j L_j - \lambda_0$  gilt. Unter Heranziehung des Systems mit der zu  $(a_{j\nu})$  transponierten Matrix und den  $b_i$  auf der rechten Seite (als dessen Lösung die  $\lambda_j$  erscheinen) ergibt sich die Bedingung, daß die Matrix

$$(3) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & a_m \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ihren Rang } r \text{ nicht ändert, wenn man die Zeile } b_1, \dots, b_n, b_{n+1}$$

hinzunimmt und wenn ein  $r$ -reihiger Minor  $\Delta \neq 0$  existiert derart, daß das Verhältnis  $\Delta'/\Delta \geq 0$  ausfällt, wobei  $\Delta'$  aus  $\Delta$  hervorgeht, indem man die Elemente irgendeiner Zeile durch die entsprechenden  $b_\nu$  ersetzt. Im Falle daß alle Ungleichungen (1) homogen sind, hat man die obige Matrix (3) durch  $(a_{j\nu})$  zu ersetzen. Wenn nun die Ungleichung  $L \leq 0$  eine Folge der  $L_j \leq 0$  ist, so ist sie auch schon Folge eines beliebigen Untersystems vom Range  $r$ , was zu einer leichten Verschärfung des Haarschen Satzes im Falle endlicher Systeme führt. In § 4 werden schließlich notwendige und hinreichende Bedingungen dafür gesucht, daß sämtliche Lösungen eines Systems (1) vom Range  $r$  nicht positiv bez. einer Unbekannten  $x_k$  sind: Die Matrix (3) muß einen von Null verschiedenen  $(r+1)$ -Minor besitzen, welcher die  $k$ -te Spalte der Koeffizientenmatrix enthält, sich in Null verwandelt, wenn man diese Spalte durch irgendeine andere Spalte der Matrix ersetzt, und dessen Verhältnis zu den algebraischen Komplementen der Elemente der  $k$ -ten Spalte der Matrix (3) in  $\Delta$  nicht negativ ist. — Die vorliegende Arbeit ist, wie die andern Arbeiten des Verf. „rein theoretisch“ und erwähnt an keiner Stelle die interessanten Anwendungen der Theorie der linearen Ungleichungen in „Linear Programming“, Theory of



Games etc., welche seit einigen Jahren in der amerikanischen Schule (Tucker, von Neumann, Weyl u. a.) bearbeitet worden sind und worauf hier allgemein hingewiesen sein möge.

H. Schwerdtfeger.

**Kuhn, H. W.:** Solvability and consistency for linear equations and inequalities. Amer. math. Monthly **63**, 217—232 (1956).

Let  $S$  be a system of linear equations in the (real) variables  $x_1, \dots, x_n$ . A linear equation in  $x_1, \dots, x_n$  is said to be a consequence of  $S$  if it is satisfied by all solutions of  $S$ . The author notes that if  $S$  is consistent then every consequence of  $S$  can be expressed as a linear combination of the equations of  $S$ ; if  $S$  is inconsistent then an equation  $0x_1 + \dots + 0x_n = d$ , with  $d \neq 0$ , is a linear combination of the equations of  $S$ . The main object of the paper is to prove a similar theorem for (finite) systems  $S$  of linear inequalities, viz. if  $S$  is consistent then every consequence of  $S$  is a legal linear combination of the inequalities of  $S$ . If  $S$  is inconsistent, then the inequality  $0x_1 + \dots + 0x_n > 0$  is a legal linear combination of the inequalities of  $S$ . (A „legal linear combination“ is a linear combination of the inequalities of  $S$  together with the relation  $0x_1 + \dots + 0x_n > -1$ , all multipliers being  $\geq 0$ , and the final sign being either  $\geq 0$  or, in case at least one equation with strict inequality enters with a positive multiplier,  $> 0$ .) It is also shown that the procedure of successive elimination of variables yields, in the case of inequalities as well as equalities, an algorithm for obtaining a solution or exhibiting the inconsistency.

J. C. Shepherdson.

**Ostrowski, Alexander:** Mathematische Miszellen. XXIV. Zur relativen Stetigkeit von Wurzeln algebraischer Gleichungen. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **58**, 98—102 (1956).

Es seien  $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  und  $g(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n$  mit  $a_0 = b_0 = 1$ ,  $a_n b_n \neq 0$  zwei Polynome mit den Wurzeln  $x_\nu, y_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ), die folgendermaßen geordnet sind:  $|x_1| \leq \dots \leq |x_n|$ , bzw.  $|y_1| \leq \dots \leq |y_n|$ . Unter der Newtonschen Majorante  $\mathfrak{M}_f(z)$  des Polynoms  $f(z)$  versteht Verf. ein Polynom  $n$ -ten Grades mit positiven Koeffizienten  $\mathfrak{M}_f(z) = T_0 z^n + T_1 z^{n-1} + \dots + T_n$ , so daß  $T_\nu$  die kleinsten sind, die den Bedingungen  $|a_\nu| \leq T_\nu$  ( $\nu = 0, 1, \dots, n$ ),  $T_\nu^2 \geq T_{\nu-1} T_{\nu+1}$  ( $\nu = 1, \dots, n-1$ ) genügen (vgl. Verf., dies. Zbl. **23**, 334). Gelten für ein  $\tau$  mit  $4n\tau^{1/n} \leq 1$  die Relationen  $g(z) - f(z) \ll \tau \mathfrak{M}_f(z)$ ,  $g(z) - f(z) \ll \tau \mathfrak{M}_g(z)$  ( $\ll$  bedeutet das Symbol für das Majorisiertsein), dann sind

$$\left( \frac{1 + \tau^{1/n}}{1 - \tau^{1/n}} \right)^u \geq \left| \frac{y_\nu}{x_\nu} \right| \geq \left( \frac{1 - \tau^{1/n}}{1 + \tau^{1/n}} \right)^u \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

gültig, wo  $u = 2 \left[ \frac{1}{2}(n-1) \right] + 1$  die größte in  $n$  enthaltene ungerade Zahl ist.

L. Fuchs.

**Mitrović, Dusan:** Conditions graphiques pour que l'argument de chacune des racines d'une équation algébrique soit compris entre  $(\pi/2) + \mu$  et  $(3\pi/2) - \mu$ . C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 831—833 (1956).

Verf. formt mittels der Substitution  $z = -\varrho \sin \mu + i \varrho \cos \mu$ ,  $\sin \mu = \xi$  das Polynom  $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ ,  $a_i$  reell,  $a_n > 0$ , um in  $f(\xi, \varrho) = (a_0 - \eta) + (a_1 - \xi)z$ , wo  $\xi(\xi, \varrho) = \sum_{j=2}^n a_j \varphi_j(\xi) \varrho^{j-1}$ ,  $-\eta(\xi, \varrho) = \sum_{j=2}^n a_j \varphi_{j-1}(\xi) \varrho^j$  und die  $\varphi_j(\xi)$  ein für allemal bestimmte Polynome sind. Er zeigt, daß die Kurve  $\Gamma \equiv (\xi(\xi, \varrho); \eta(\xi, \varrho))$ ,  $\xi$  fest,  $\varrho$  variabel, der  $(\xi, \eta)$ -Ebene verwendet werden kann, um zu entscheiden, ob alle Wurzeln der Gleichung  $f(z) = 0$  ein Argument zwischen  $\frac{1}{2}\pi + \mu$  und  $\frac{3}{2}\pi - \mu$  haben. Alsdann soll der Punkt  $(a_1, a_0)$  im ersten Quadranten liegen und, falls  $\varrho$  von Null bis unendlich wächst, soll die Kurve  $\Gamma$  die Geraden  $\eta = a_0$  und  $\xi = a_1$ , anfangend mit der ersten Geraden, abwechselnd schneiden. Die Zahl der Schnittpunkte soll gleich  $m$  sein, wo  $m$  die größte ganze Zahl ist, die der Ungleichung  $\frac{1}{2}m\pi + \frac{1}{2}(1 - (-1)^m)\mu < n(\frac{1}{2}\pi + \mu)$  genügt.

E. M. Bruins.



**Perron, Oskar:** Über Potenzsummen. Math. Z. 64, 103—114 (1956).

Es seien  $s_\nu = x_1^\nu + \dots + x_n^\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) die Potenzsummen der Unbestimmten  $x_1, \dots, x_n$  (über einem Körper der Charakteristik 0), ferner

$$(1 - x_1 t) \cdots (1 - x_n t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots,$$

also  $a_1, \dots, a_n$  die symmetrischen Grundfunktionen der  $x$ . Nach S. Kakeya [Japanese J. Math. 2, 69—80 (1925); 4, 77—85 (1927)] bilden die  $n$  Potenzsummen  $s_\nu, \dots, s_{\nu_n}$  genau dann ein Fundamentalsystem für die symmetrischen Funktionen (d. h. die  $a_\nu$  und folglich alle symmetrischen Funktionen sind rational durch sie darstellbar), wenn die von  $\nu_1, \dots, \nu_n$  verschiedenen natürlichen Zahlen eine additive Halbgruppe bilden. Spezielle derartige Fundamentalsysteme haben schon früher u. a. C. W. Borchardt ( $\nu_1, \dots, \nu_n$  die ersten  $n$  ungeraden natürlichen Zahlen) und K. Th. Vahlen ( $\nu_1, \dots, \nu_n$  die ersten  $n$  nicht durch die ganze Zahl  $k \geq 2$  teilbaren natürlichen Zahlen) angegeben. Während formelmäßige Darstellungen der  $a^\nu$  bisher nur für den Spezialfall von Borchardt bekannt waren [G. Pólya, J. Math. pur. appl., IX. Sér. 31, 37—47 (1952); O. Perron, Math. Z. 63, 19—30 (1955)], liefert Verf. jetzt auch einen neuen Beweis für den allgemeineren Vahlenschen Fall, der zu expliziten Formeln führt: Mit einer primitiven  $k$ -ten Einheitswurzel  $\varepsilon$  bilde man Polynome  $w_1 = s_1 (1 - \varepsilon)$ ,

$$\nu w_\nu = w_{\nu-1} s_1 (1 - \varepsilon) + w_{\nu-2} s_2 (1 - \varepsilon^2) + \dots + w_1 s_{\nu-1} (1 - \varepsilon^{\nu-1}) + s_\nu (1 - \varepsilon^\nu)$$

( $\nu = 2, 3, \dots$ ) von  $s_{\nu_1}, \dots, s_{\nu_n}$ ; dann erhält man die  $a_r$  einfach durch Auflösung des linearen Gleichungssystems

$$w_{\nu_r} + a_1 w_{\nu_r-1} + a_2 w_{\nu_r-2} + \dots + a_{\nu_r-1} w_1 + a_{\nu_r} (1 - \varepsilon^{\nu_r}) = 0 \quad (r = 1, \dots, n)$$

als rationale Funktionen von  $s_{\nu_1}, \dots, s_{\nu_n}$  mit gemeinsamem Nenner, und es gibt keine Darstellung mit einem gemeinsamen Nenner von kleinerem Gewicht. — Anschließend wird das algebraische Gleichungssystem  $x_1^{r_1} + \dots + x_n^{r_n} = s_{\nu_r} x_0^{r_r}$  ( $r = 1, \dots, n$ ) untersucht, wo die  $s_{\nu_r}$  jetzt Unbestimmte bedeuten; das Ergebnis von Vahlen gestattet die Bestimmung der verschiedenen Lösungen und ihrer Vielfachheiten.

H. Orsinger.

**Foulkes, H. O.:** Theorems of Kakeya and Pólya on power-sums. Math. Z. 65, 345—352 (1956).

Verf. behandelt das im vorstehenden Referat dargelegte Problem, und zwar gleich den allgemeinen Kakeyaschen Fall auf neuem Weg mittels der Theorie der Gruppencharaktere. Ist  $(\lambda)$  Abkürzung für eine Partition  $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r)$  der positiven ganzen Zahl  $m$ , so wird die Schursche Funktion  $\{\lambda\} = \{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r\}$  definiert durch  $\frac{1}{m!} \sum_{\varrho} h_{\varrho} \chi_{\varrho}^{\lambda} S_{\varrho}$ , wobei  $(\varrho) = (1^{e_1} 2^{e_2} 3^{e_3} \dots)$  eine Partition von  $m$  ist, durch welche eine Klasse konjugierter Permutationen  $h_{\varrho}$ -ter Ordnung aus der symmetrischen Gruppe der Ordnung  $m!$  definiert wird;  $\chi_{\varrho}^{\lambda}$  ist die Charakteristik der Klasse  $(\varrho)$  (in der irreduziblen  $(\lambda)$ -Darstellung der Gruppe, und  $S_{\varrho}$  ist eine Abkürzung für  $s_1^{e_1} s_2^{e_2} s_3^{e_3} \dots$ . Aus dem (bekannten) Satz, daß die Funktion  $\{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r\}$  identisch verschwindet, wenn  $r$  größer als die Anzahl  $n$  der Variablen ist, ergeben sich nun beliebig viele Relationen zwischen  $n + 1$  oder mehr Potenzsummen  $s_\nu$  von  $n$  Variablen. Im wesentlichen durch Ausnutzung dieses Satzes kann Verf. zeigen, daß man aus  $s_{\nu_1}, \dots, s_{\nu_n}$  (Bezeichnung wie im vorausgehenden Referat) jedes andere  $s_\nu$  ausdrücken kann. Durch ein neues dem obigen  $\{\lambda\}$  ähnliches Symbol kann er dann auch die symmetrischen Grundfunktionen  $a_\nu$  durch  $s_{\nu_1}, \dots, s_{\nu_n}$  darstellen. Diese so gewonnenen kurzen Formeln sind gewissermaßen Stenogramme, und um sie in Kurrentschrift zu übertragen, das heißt, um die wirklichen Darstellungen zu gewinnen, muß man, wie Verf. sagt, Gruppencharaktertafeln benutzen (so weit solche berechnet sind) oder die bekannten Methoden zur Berechnung spezieller Charakteristiken anwenden. Zum Schluß wird noch ein etwas allgemeineres Theorem von Pólya auf ähnliche Art neu bewiesen. [Anmerkung des Ref.: Verf. zitiert außer mir und den von mir ge-



nannten Autoren noch Nakamura, Japanese J. Math. 4, 87—92 (1927) und schreibt dann summarisch, daß alle Genannten das Problem mit nur teilweisem Erfolg behandelt hätten. Aber gerade bei Nakamura, dessen Arbeit mir leider entgangen war, kann ich, nachdem ich sie jetzt zur Kenntnis genommen habe, dieses Urteil nicht gelten lassen. Er gewinnt die  $a_v$  im allgemeinen Kakeyaschen Fall als Determinantenquotienten aus einem ganz ähnlichen und ebenso einfachen linearen Gleichungssystem wie ich im speziellen Vahlenschen Fall. Damit hat er das Problem schon 1927 in einer für jedermann verständlichen Form vollständig gelöst.]

O. Perron.

**Manara, C. F.:** La risoluzione dell'equazione di quinto grado mediante funzioni ellittiche. Periodico Mat., IV. Ser. 34, 65—84 (1956).

Die ersten 11 Seiten dieser Abhandlung geben eine kurze historische Übersicht (Ruffini-Abel bis Klein) über die Entwicklung der Theorie der Gleichung fünften Grades, sowie eine Zusammenstellung der wesentlichen Tatsachen aus der Theorie der elliptischen Integrale und Funktionen bis zu einer geeignet spezialisierten Form des Abelschen Theorems [Bedingung für die Kollinearität dreier Punkte der kubischen Kurve  $y^2 = 4x^3 - nx - m$  ( $n = g_2, m = g_3$  reell), sowie für sechs ihrer Punkte, auf einem Kegelschnitt zu liegen], woraus das Additionstheorem der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion gewonnen wird. Auf dieser Basis wird durch eine geometrische Betrachtung die Jacobische Gleichung sechsten Grades hergeleitet, sowie die Beziehung zur allgemeinen Gleichung fünften Grades angedeutet. Für alle wesentlichen Einzelheiten wird durchweg auf die klassische Lehrbuch-Literatur verwiesen; die wenigen ausgeführten Rechnungen verhelfen dem uneingeweihten Leser nicht zur vertieften Einsicht.

H. Schwerdtfeger.

**McCarthy, Paul J.:** Witt's cancellation theorem in valuation rings. Proc. Amer. math. Soc. 7, 515—516 (1956).

Witt's isomorphism theorem in the theory of quadratic forms (this. Zbl. 15, 57) was extended by W. H. Durfee (see this Zbl. 60, 41) to the case of forms over a complete valuation ring in which 2 has an inverse. The author shows how Durfee's proof can be shortened, and that the hypothesis that the ring be complete is unnecessary. His proof is based on Durfee's lemma (l. c.), that in a valuation ring in which 2 is invertible, every symmetric matrix is congruent to a diagonal matrix. The theorem can then be proved by „cancelling“ a 1-dimensional subspace at a time.

P. M. Cohn.

**Goldberg, Karl:** The formal power series for  $\log e^x e^y$ . Duke math. J. 23, 13—21 (1956).

Es seien  $x, y$  nicht-kommutative Variable und  $\log e^x \cdot e^y =$

$$\sum_{s_i > 0} c_x(s_1, \dots, s_m) x^{s_1} y^{s_2} \dots (x \text{ bzw. } y)^{s_m} + \sum_{s_i > 0} c_y(s_1, \dots, s_m) y^{s_1} x^{s_2} \dots (x \text{ bzw. } y)^{s_m}.$$

Die Koeffizienten dieser Potenzreihe berechnen sich auf folgende Weise:

$$c_x(s_1, \dots, s_m) = (-1)^{n-1} c_y(s_1, \dots, s_m) = \int_0^1 t^{m'} (t-1)^{m''} G_{s_1}(t) \dots G_{s_m}(t) dt,$$

wobei die Abkürzungen  $n = \sum_{i=1}^m s_i$ ,  $m' = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ ,  $m'' = \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$  benutzt wurden; ferner ist  $G_s(t)$  ein Polynom, das rekursiv durch  $G_1(t) = 1$ ,  $G_s(t) = s^{-1} d[t(t-1) G_{s-1}(t)]/dt$  definiert wird. Aus der Symmetrie der Koeffizienten  $c_x, c_y$  könnte die sog. Baker-Hausdorffsche Formel hergeleitet werden. Die  $c_x(s_1, \dots, s_m)$  besitzen die erzeugende Funktion

$$\sum_{s_i=1}^{\infty} c_x(s_1, \dots, s_m) z_1^{s_1} \dots z_m^{s_m} = \sum_{i=1}^m z_i e^{m' z_i} \prod_{j \neq i} \frac{e^{z_j} - 1}{e^{z_j} - e^{z_i}}.$$

Aus den Ergebnissen folgt u. a.  $c_x(s_1, s_2) = \frac{(-1)^{s_1}}{s_1! s_2!} \sum_{i=1}^{s_2} \binom{s_2}{i} B_{s_1+s_2-i}$ , wo  $B_k$  die



$k$ -te Bernoullische Zahl ( $B_1 = \frac{1}{2}$ ) bedeutet. Die Polynome  $G_s(t)$  lassen sich übrigens wie folgt aus den homogenen Eulerschen Polynomen  $R_s(x, y)$  berechnen:  $G_s(t) = s!^{-1} R_s(t, t-1)$ . Sie sind andererseits Ableitungen von Faberschen Polynomen.  
M. Eichler.

### Gruppentheorie:

**Steinfeld, O.:** Über die Quasiideale von Halbgruppen. Publ. math., Debrecen 4, 262—275 (1956).

Verf. wendet den von ihm eingeführten Begriff des Quasiideals zur Untersuchung der Struktur von Halbgruppen an. Eine nicht-leere Untermenge  $A$  der Halbgruppe  $H$  heißt ein Quasiideal, wenn  $HA \cap AH \subseteq A$  gilt; das Quasiideal  $B$  heißt minimal, wenn in  $H$  kein Quasiideal  $B'$  mit  $B' \subset B$  existiert. Es wird gezeigt, daß  $A$  dann und nur dann ein (minimales) Quasiideal ist, wenn  $A$  der Durchschnitt eines (minimalen) Links- und eines (minimalen) Rechtsideals ist. Ein Quasiideal  $A$  von  $H$  ist genau dann minimal, wenn  $A$  eine Gruppe ist; dann ist es in der Form  $A = eHe$  darstellbar, wo  $e$  das Einselement der Gruppe  $A$  bedeutet. Alle minimalen Quasiideale in  $H$  sind untereinander isomorph. Enthält  $H$  mindestens ein minimales Quasiideal, so gibt es minimale Rechts- und Linksideale in  $H$  und existiert der Suschkewitsch-Kern  $K$ , d. h. die Vereinigung aller minimalen Links- oder Rechtsideale, die auch als die Vereinigung aller minimalen Quasiideale (jetzt paarweise fremden isomorphen Gruppen) definiert werden kann. Zum Schluß betrachtet Verf. Halbgruppen  $H$  mit relativ Inversen im Sinne von Clifford, d. h. zu jedem  $a \in H$  gibt es ein idempotentes  $e \in H$  und ein relativ Inverses  $a^{-1} \in H$  mit  $ea = ae = a$ ,  $a^{-1}a = aa^{-1} = e$ ,  $a^{-1}e = ea^{-1} = a^{-1}$ . U. a. definiert Verf. den Rang eines Quasihauptideals  $eHe$  ( $e^2 = e$ ) und gibt eine Zerlegung von Quasihauptidealen  $n$ -ten Ranges in die Vereinigung von paarweise fremden Gruppen.  
L. Fuchs.

**Paige, Lowell J.:** A class of simple Moufang loops. Proc. Amer. math. Soc. 7, 471—482 (1956).

Sei  $L$  die multiplikative Loop aller regulären Elemente eines einfachen nicht-assoziativen Alternativringes, der ein vom Einselement verschiedenes Idempotent besitzt, und  $Z$  das Zentrum von  $L$ . Die nichtassoziative Moufang-Loop  $L/Z$  ergibt sich genau dann als einfach, wenn jedes Element von  $Z$  ein Quadrat (eines Elementes aus  $Z$ ) ist; andernfalls enthält  $L/Z$  eine normale Unterloop vom Index 2. In der (nullteilerfreien) Cayley-Algebra über dem Körper der reellen Zahlen ist die Faktorloop der multiplikativen Loop aller Elemente mit Norm 1 nach ihrem (aus 1 und  $-1$  bestehenden) Zentrum eine einfache Moufang-Loop. Durch ein Gegenbeispiel wird gezeigt, daß diese Aussage nicht für jeden Körper (an Stelle des Körpers der reellen Zahlen) richtig ist.  
G. Pickert.

**Petresco, Julian:** Sur les groupes libres. Bull. Sci. math., II. Ser. 80, 6—32 (1956).

Let  $G$  be a group, and for any sequence  $R = \{r_1, \dots, r_n\}$  of elements of  $G$  write  $\bar{R} = r_1 \cdots r_n$ . A (non-empty) sequence  $R$  is called a relation if  $\bar{R} = 1$ , and irreducible if no proper segment  $\{r_i, r_{i+1}, \dots, r_j\}$  of  $R$  is a relation. A subset  $A$  of  $G$  is called free if (i)  $A \cap A^{-1} = \emptyset$  and (ii) every irreducible relation of elements from  $A \cup A^{-1}$  has just two terms. Several equivalent definitions follow, and a group generated by a free system is seen to be free in the usual sense. — Now let  $F$  be a free group with a free basis (= free generating system) chosen once and for all, and let the length of  $x \in F$  in terms of this basis be denoted by  $l(x)$ . The author proves the following Main Lemma: Let  $R = \{r_1, \dots, r_n\}$  be any irreducible relation in  $F$ , where  $n \geq 3$ . If  $r_\alpha$  is a term of maximum length among the  $r_i$  then there is a segment  $S = \{r_i, r_{i+1}, \dots, r_j\}$  of  $R$  such that (i) just one of  $r_i, r_{i+1}, \dots, r_j$  equals  $r_\alpha^{\pm 1}$  and (ii)  $l(S) < l(r_\alpha)$ . This lemma is used to prove and strengthen a number of known

results. A basic concept is that of a Nielsen set, that is a set  $X$  (in  $F$ ) such that (i)  $X \cap X^{-1} = \emptyset$  and (ii) for any finite subset  $Y$  of  $X$ , there exists  $y \in Y$  of maximal length among the elements of  $Y$  and such that, for any irreducible sequence  $S$  of elements of  $Y \cup Y^{-1}$  containing just one term  $y^{\pm 1}$ ,  $l(\bar{S}) \geq l(y)$ . A Nielsen set is always free, and this result is used to prove the Nielsen-Schreier Theorem in a number of ways, and to construct free bases of a subgroup  $H$  of  $F$ , using the system of all coset representatives of  $F/H$  of minimal length. — Next elementary transformations in a free group are considered. Any automorphism of  $F$  can be expressed as a product of elementary transformations of a free basis of  $F$ . Given a finitely generated subgroup  $H$  of  $F$ , let  $\mathfrak{X}_m(H)$  be the set of all  $m$ -element sequences generating  $H$ . For all large  $m$ ,  $\mathfrak{X}_m(H)$  is non-empty, and the elementary transformations of the sequences of  $\mathfrak{X}_m(H)$  generate a group  $\mathfrak{N}_m(H)$  called the Nielsen group of order  $m$  of  $H$ . The author shows that  $\mathfrak{N}_m(H)$  acts transitively on  $\mathfrak{X}_m(H)$  and deduces F. Levi's Theorem (this Zbl. 6, 246) on minimal sets of defining relations for generating sets of  $F$ . P. M. Cohn.

**Golovin, O. N.:** Nilpotent products of groups. Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. 2, 89—115 (1956).

Vgl. die Besprechung des russ. Originals dies. Zbl. 38, 160.

**Golovin, O. N.:** Metabelian products of groups. Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. 2, 117—131 (1956).

Vgl. die Besprechung des russ. Originals dies. Zbl. 42, 18.

**Golovin, O. N.:** On the problem of isomorphisms of nilpotent decompositions of a group. Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. 2, 133—145 (1956).

Vgl. die Besprechung des russ. Originals dies. Zbl. 42, 19.

**Mal'cev, A. I.:** On certain classes of infinite solvable groups. Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. 2, 1—21 (1956).

Vgl. die Besprechung des russ. Originals dies. Zbl. 43, 23.

**Neumann, B. H.:** Ascending derived series. Compositio math. 13, 47—64 (1956).

Verf. betrachtet aufsteigende Reihen von Gruppen  $G_i$  mit der Eigenschaft, daß  $G_i$  für jedes  $i \geq 0$  die Kommutatorgruppe  $G'_{i+1}$  von  $G_{i+1}$  ist. Er zeigt, daß eine solche Reihe zwar im allgemeinen unendlich lang sein kann, daß sie aber jedenfalls dann nach endlich vielen Schritten abbricht, wenn sie wenigstens eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt: (a) Die Maximalbedingung wird von den auflösbaren Untergruppen der Automorphismengruppe eines geeigneten  $G_{i+2}$  erfüllt. (b)  $G_{i+2}/G_i$  ist für geeignetes  $i$  endlich erzeugbar. — Fundamentales Hilfsmittel bei der Rückführung von (b) auf (a) ist der folgende interessante Satz: Ist  $G$  eine endlich erzeugbare Gruppe derart, daß  $G'' = 1 < G'$  gilt, während jedes echte epimorphe Bild von  $G$  abelsch ist, dann ist  $G$  endlich. — Beispiele zeigen, daß gewisse naheliegende Abschwächungen der Voraussetzungen nicht ausreichen. R. Baer.

• **Suzuki, Michio:** Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Reihe: Gruppentheorie. Neue Folge: Heft 10.) Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1956. 96 S. DM 16,50.

Das System der Untergruppen einer beliebigen Gruppe ist bekanntlich (unter der natürlichen mengentheoretischen Enthaltenseinsbeziehung) ein Vollverband (structure). Man hat daher schon bald in der Entwicklung der allgemeinen Gruppentheorie die Frage aufgeworfen, welche Zusammenhänge zwischen der Struktur einer Gruppe und der Struktur ihres Untergruppenverbandes bestehen, um so mehr als bei manchen algebraischen Fragen (Beispiel: Hauptsatz der Galoisschen Theorie algebraischer Körpererweiterungen) nicht so sehr die Struktur der Gruppe als die Struktur ihres Untergruppenverbandes die entscheidende Rolle spielt. Über die in diesem Gedankenkreis stehenden Untersuchungen gibt Verf. einen eingehenden



Bericht, der zahlreiche eigene, noch unveröffentlichte Ergebnisse umfaßt. Das erste Kapitel untersucht die Folgerungen, die sich für die Struktur einer Gruppe ergeben, wenn ihrem Untergruppenverband gewisse verbandstheoretische Bedingungen auferlegt werden. Das zweite Kapitel behandelt das vor allem wichtige Problem des Vergleiches von Gruppen, zwischen denen Projektivitäten bestehen, d. h. deren Untergruppenverbände verbandsisomorph sind. Das dritte Kapitel beschäftigt sich schließlich mit verbandshomomorphen Beziehungen zwischen den Untergruppenverbänden verschiedener Gruppen. Genauere Angaben mögen dem Inhaltsverzeichnis entnommen werden: Chap. I. Groups with a special kind of subgroup lattice. 1. The distributive law in subgroup lattice. 2. Modular identity in subgroup lattices. 3. The Jordan-Dedekind chain condition and lower semi-modularity. 4. Finite groups with a modular lattice of subgroups. 5. Structure of infinite  $M$ -groups. 6. Structure of  $UM$ -groups. 7. Complemented groups. Chap. II. Isomorphisms of subgroup lattices. 1. Projectivities. 2. Projectivities of abelian groups. 3. Projectivities of locally free groups. 4. Projectivities of finite groups. 5. Projectivities of modular groups. 6. Index-preserving projectivities. 7. The images of normal subgroups under projectivities of finite groups. 8. The number of finite groups with given lattice of subgroups. 9. The group of autoprojectivities. 10. Projectivities of simple groups. 11. Characteristic chains of lattices of subgroup lattices. 12. Representation of lattices as subgroup lattices. 13. The situation-preserving mappings. Chap. III. Homomorphisms of subgroup lattices. 1. The kernels of a homomorphism of a subgroup lattice. 2. Complete  $L$ -homomorphisms onto cyclic groups. 3. General properties of complete  $L$ -homomorphisms. 4.  $L$ -homomorphisms induced by group-homomorphisms. 5. Incomplete  $L$ -homomorphisms. 6.  $L$ -homomorphisms of finite groups. 7. The meet-homomorphisms. 8. Structure of finite groups which admit a proper  $L$ -homomorphism. 9.  $L$ -homomorphisms onto a nilpotent group. Chap. IV. Dualisms of subgroup lattices. 1. Dualisms (of abelian groups). 2. Nilpotent groups with duals. 3. Finite solvable groups with duals. *W. Specht.*

**Plotkin, B. I.: On groups with finiteness conditions for Abelian subgroups.** Doklady Akad. Nauk SSSR 107, 648—651 (1956) [Russisch].

The paper contains generalisations of some of the author's earlier results [Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 3, 181—186 (1954); this Zbl. 66, 274 (1)]. A simple group shall be non-commutative. A group is completely reducible if it is the direct product of simple groups. Every group  $G$  has a unique maximal characteristic completely reducible subgroup  $A(G)$  containing all completely reducible normal subgroups. A subgroup  $H$  of  $G$  is subnormal if there is an ascending normal series from  $H$  to  $G$ . If  $H$  is subnormal in  $G$ , then  $A(H)$  is normal in  $A(G)$ . If  $G$  has a proper simple, or finite, or locally nilpotent subnormal subgroup, then  $G$  is not simple. The following theorems concern groups that have an ascending normal series with finite or locally nilpotent factors. This property is hereditary in subgroups and homomorphic images. Let us call such a series an  $RF$ -series (radical or finite) and the group an  $RF$ -group.  $G$  is an  $RF$ -group if and only if it is an extension of its radical by a semi-simple  $RF$ -group. In a semisimple  $RF$ -group the centraliser of  $A(G)$  is trivial and  $A(G)$  is a direct product of simple finite groups. If in an  $RF$ -group  $G$  all the abelian subgroups are finite, then  $G$  is finite. If the abelian subgroups all satisfy the maximal condition, then so does  $G$ , and the group is a finite extension of an  $S$ -group (in the sense of the reviewer, i. e. a soluble group with maximal condition for subgroups). If the abelian subgroups all satisfy the minimal condition for subgroups, then so does  $G$ , and the group is a finite extension of an abelian group with minimal condition. Finally the author proves a theorem about nilgroups which combines two of his previous theorems (loc. cit.). If all the abelian subgroups of a nilgroup  $G$  have type  $A_4$  (in the sense of Mal'cev; this Zbl. 43, 23), then  $G$  is a nilpotent  $A_4$ -group. A corollary of this result



is the theorem: A nilgroup with maximal condition for subgroups (or for abelian subgroups only) is nilpotent. K. A. Hirsch.

● Speiser, Andreas: *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Mit Anwendungen auf algebraische Zahlen und Gleichungen sowie auf die Kristallographie.* (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiet der exakten Wissenschaften, math. Reihe Bd. 22.) Vierte berichtigte u. erw. Aufl. Basel, Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1956. XI, 271 p., 43 Fig., 1 Farbtafel u. 1 Anhang. F. 26,—.

Bis auf einen, wenige Seiten umfassenden Anhang über geometrische Deutungen der Gruppen, der sich hauptsächlich mit den Kleinschen Kreisfiguren beschäftigt, ist dieses Buch eine unveränderte Neuauflage des bekannten Werkes (vgl. dies. Zbl. 17, 153), so daß sich eine Darstellung seines Inhaltes erübrigt. Zu der Entwicklung der Theorie der Gruppen endlicher Ordnung in den letzten 25 Jahren (etwa die weitreichenden strukturellen Ergebnisse von P. Hall u. a. über auflösbare und nilpotente Gruppen, das Fittingsche Strukturprogramm, die durch R. Brauer u. a. errungenen neuen Erfolge der Darstellungstheorie endlicher Gruppen) ist keine Verbindung hergestellt worden. W. Specht.

Kochendörffer, Rudolf: *Über den Multiplikator einer Gruppe.* Math. Z. 63, 507—513 (1956).

Bei der Untersuchung der gebrochenen linearen Darstellungen endlicher Gruppen hat I. Schur, dessen Gedenken die vorliegende Abhandlung gewidmet ist, die folgende Begriffsbildung eingeführt: Der Multiplikator  $\mathfrak{M}$  einer endlichen Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist die größte, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Gruppe, die als im Zentrum und in der Kommutatorgruppe liegende Untergruppe einer endlichen Gruppe  $\mathfrak{G}$  auftreten kann derart, daß  $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$  mit  $\mathfrak{G}$  isomorph ist. Die Bestimmung des Multiplikators, die auch für andere Zwecke, z. B. in der Theorie der Gruppenerweiterungen und in der Topologie von großer Bedeutung ist, ist eine schwierige Aufgabe und bisher nur für spezielle Gruppenklassen durchgeführt. Verf. reduziert diese Aufgabe für den Fall, daß eine  $p$ -Sylowgruppe  $\mathfrak{P}$  von  $\mathfrak{G}$  ein unter  $\mathfrak{P}$  invariantes Repräsentantensystem für seine Restklassen in  $\mathfrak{G}$  besitzt, und zeigt, daß dann die  $p$ -Sylowgruppe von  $\mathfrak{M}$  mit dem Multiplikator von  $\mathfrak{P}$  isomorph ist. Die Voraussetzung ist z. B. erfüllt, wenn  $\mathfrak{G}$  einen Normalteiler mit zu  $p$  primer Ordnung und  $p$ -Faktorgruppe besitzt. W. Gaschütz.

Neumann, B. H.: *On some finite groups with trivial multiplier.* Publ. math., Debrecen 4, 190—194 (1956).

Ist die endliche Gruppe  $\mathfrak{G}$  erzeugt durch  $d$  Elemente und definiert durch  $e$  Relationen und ist  $d = e$ , so hat  $\mathfrak{G}$  nach I. Schur den trivialen Multiplikator. Verf. zeigt von einigen metazyklischen Gruppen, für die I. Schur den trivialen Multiplikator auf anderem Wege nachgewiesen hat, daß sie sich durch 2 Elemente erzeugen lassen, zwischen denen 2 Relationen bestehen. Es sind dies die folgenden Gruppen: 1. Gruppen mit lauter zyklischen Sylowgruppen. 2. Verallgemeinerte Quaternionengruppen. 3.  $\mathfrak{G} = \{A, B\}$  mit  $A^{2^m} = B^2 = E$ ,  $B^{-1}AB = A^{-1+2^{m-1}}$  mit  $m \geq 3$ . 4.  $\mathfrak{G} = \{A, B\}$  mit  $A^{p^m} = B^{p^n} = E$ ,  $B^{-1}AB = A^{1+p^{m-n}}$  mit  $m > n > 0$  für  $p \neq 2$ ,  $m - 1 > n > 0$  für  $p = 2$ . Dabei soll  $p$  eine Primzahl sein. B. Huppert.

Szép, J.: *Über endliche Gruppen, die nur einen echten Normalteiler besitzen.* Acta Sci. math. 17, 45—48 (1956).

Verf. untersucht endliche Gruppen  $\mathfrak{G}$ , welche nur einen einzigen nichttrivialen Normalteiler  $\mathfrak{N}$  besitzen. Er erhält folgendes Ergebnis: Genau dann ist  $\mathfrak{N}$  einziger nichttrivialer Normalteiler von  $\mathfrak{G}$ , wenn  $\mathfrak{N}$  kein direkter Faktor von  $\mathfrak{G}$  ist und einer der folgenden Fälle vorliegt: 1.  $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$ , wobei  $\mathfrak{H}$  einfach ist und a)  $\mathfrak{N}$  einfach ist oder b)  $\mathfrak{N}$  eine nichteinfache, elementar abelsche Gruppe ist und die einfachen Untergruppen von  $\mathfrak{N}$  sind in  $\mathfrak{G}$  konjugiert oder c)  $\mathfrak{N}$  direktes Produkt



von mindestens zwei einfachen Gruppen von zusammengesetzter Ordnung ist, die in  $\mathfrak{G}$  konjugiert sind. 2.  $\mathfrak{N}$  ist Frattini-Gruppe von  $\mathfrak{G}$  und elementar abelsch; die einfachen Untergruppen von  $\mathfrak{N}$  sind in  $\mathfrak{G}$  konjugiert;  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$  ist einfach. 3.  $\mathfrak{G} = \mathfrak{S} \mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{D} \neq \mathfrak{E}$ , wobei  $\mathfrak{N}$  direktes Produkt von einfachen Gruppen von zusammengesetzter Ordnung ist, die in  $\mathfrak{G}$  konjugiert sind,  $\mathfrak{D}$  Frattini-Gruppe von  $\mathfrak{S}$  ist mit einfacher Faktorgruppe  $\mathfrak{S}/\mathfrak{D}$ . In 1b) und 2 ist die Aussage über die Konjugiertheit der einfachen Untergruppen nicht richtig; es muß heißen: Ist  $\mathfrak{Z} \neq \mathfrak{E}$  eine Untergruppe von  $\mathfrak{N}$ , so erzeugen die Konjugierten von  $\mathfrak{Z}$  unter  $\mathfrak{G}$  die ganze Gruppe  $\mathfrak{N}$ . Ist dagegen  $\mathfrak{N}$  nichtabelsch, so ist die direkte Zerlegung von  $\mathfrak{N}$  wesentlich eindeutig; daraus ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung in diesem Falle. *B. Huppert.*

**Cohn, P. M.: The complement of a finitely generated direct summand of an Abelian group.** Proc. Amer. math. Soc. **7**, 520—521 (1956).

I. Kaplansky stellte in seiner Monographie über abelsche Gruppen (dies. Zbl. **57**, 19) die Frage, ob zwei abelsche Gruppen  $G$  und  $H$  isomorph sind, falls es eine endlich erzeugte abelsche Gruppe  $F$  gibt, derart, daß  $F \oplus H$  und  $F \oplus G$  isomorph sind. Der Verf. zeigt, daß diese Frage zu bejahen ist. [Vgl. auch Walker, Proc. Amer. math. Soc. **7**, 898—902 (1956).]

*H. Leptin.*

**Loś, J., E. Sasiada und Z. Słomiński: On abelian groups with hereditarily generating systems.** Publ. math., Debrecen **4**, 351—356 (1956).

Die Verff. nennen ein Erzeugendensystem  $\{a_t\}$ ,  $t \in T$ , einer abelschen Gruppe  $G$  erblich (hereditarily) (ein e. E. S.), wenn jedes Teilsystem gleicher Mächtigkeit ebenfalls  $G$  erzeugt. Als Mächtigkeit des Systems wird hierbei die Mächtigkeit der Indexmenge  $T$  definiert. Man sieht leicht, daß z. B. die diskrete direkte Summe  $C(m_1, m_2, \dots)$  zyklischer Gruppen der Ordnungen  $p_i^{m_i}$ ,  $p_1 < p_2 < \dots$  Primzahlen, ein e. E. S. besitzt. Satz 1: Eine Gruppe mit e. E. S. kann höchstens abzählbar unendlich sein. Man kann sich also im wesentlichen auf Gruppen mit erblichen erzeugenden Folgen (e. e. F.)  $\{a_i\}$   $i = 1, 2, \dots$  beschränken. Ein periodisches  $G$  hat genau dann eine e. e. F., wenn  $G = D + C(m_1, m_2, \dots)$  (direkt) mit einer Divisionsgruppe  $D$  ist. Ein torsionsfreies  $D$  mit e. e. F. hat endlichen Rang; ist  $G$  überdies vollständig, so existiert eine e. e. F. Als allgemeine notwendige Bedingung für die Existenz einer e. e. F. erhalten die Verff., daß alle endlichen Faktorgruppen von  $G$  zyklisch sein müssen.

*H. Leptin.*

**Sasiada, E.: An application of Kulikov's basic subgroups in the theory of Abelian mixed groups.** Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **4**, 411—413 (1956).

Sei  $H$  eine torsionsfreie,  $T$  eine periodische abelsche Gruppe und  $B$  eine Basisuntergruppe von  $T$ . Der Verf. zeigt mit algebraisch-homologischen Schlüssen, daß dann und nur dann jede abelsche Erweiterung von  $T$  mit  $H$  zerfällt, falls jede abelsche Erweiterung von  $B$  mit  $H$  zerfällt. Da  $B$  nach Definition eine Zyklensumme (direkte Summe endlicher zyklischer Gruppen) ist, folgt hieraus, daß jede Erweiterung einer beliebigen Torsionsgruppe  $T$  mit  $H$  jedenfalls dann zerfällt, wenn jede Erweiterung einer beliebigen Zyklensumme  $C$  mit  $H$  zerfällt. Hierbei kann man sich noch auf solche  $C$  beschränken, deren Mächtigkeit nicht größer als die von  $H$  ist.

*H. Leptin.*

**Hilton, P. J.: Remark on the tensor product of modules.** Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **4**, 325—328 (1956).

Let  $A$  be a ring with a unit element; let  $A$  be a right  $A$ -module,  $B, C$  left  $A$ -modules.  $A$  is said to be (right) projective if for any module maps  $\varphi: A \rightarrow B$ ,  $\psi: C \rightarrow B$ , where  $\psi$  is onto  $B$ , there exists  $\theta: A \rightarrow C$  with  $\varphi = \psi \theta$ . Modules are said to have a property „locally“ if all their finitely generated sub-modules have the property. Finally,  $A$  has property (P) if, when  $B$  is a sub-module of  $C$  the injection  $A \otimes B \rightarrow A \otimes C$  is always (1-1). The author proves false the converse of the known proposition:  $A$  has property (P) if it is projective (cf. Yoneda, this Zbl. **58**, 19). However, locally projective modules are proved to have property (P); but in general

they also are not characterised by (P), although it is proved that if  $A$  has no zero divisors and if every right and left ideal in  $A$  is principal, then  $A$  has property (P) if and only if it is locally free. It remains possible that this may still be true if the condition on the ideals in  $A$  is weakened by requiring only that the right ideals should all be principal. The note ends by observing that if  $A$  is a principal ideal domain,  $A$  and  $B$   $A$ -modules, and  $a$  and  $b$  free elements in  $A$  and  $B$  respectively, then  $a \otimes b$  is free in  $A \otimes B$ . In this way statement E. 6 p. 159 of Eilenberg and Steenrod, Foundation of algebraic topology (this Zbl. 47, 414), is proved false.

W. H. Cockcroft.

**Kneser, Martin:** Orthogonale Gruppen über algebraischen Zahlkörpern. J. reine angew. Math. 196, 213—220 (1956).

Améliorant considérablement des résultats antérieurs du Réf. (ce Zbl. 48, 256), l'A. résout presque tous les problèmes relatifs à la structure des groupes orthogonaux et unitaires sur un corps de nombres algébriques  $K$ . Il prouve les trois théorèmes suivants (et indique sans démonstration comment on peut obtenir des résultats analogues pour les groupes unitaires) (les notations sont celles du livre du Réf., „La géométrie des groupes classiques“, Berlin 1955): A. Le groupe quotient  $O_n(K, f)/O'_n(K, f)$  est isomorphe à  $K^*(f)/K^{*2}$ , où  $K^*(f)$  est le sous-groupe des éléments  $\neq 0$  de  $K$  qui sont positifs à toutes les places à l'infini  $p_k$  où  $f$  est une forme définie. B. Pour  $n \neq 4$ ,  $O_n(K, f) = \Omega_n(K, f)$ . C. Pour  $n \geq 5$ , le groupe  $\Omega_n(\Omega_n \cap Z_n)$  est simple. Les seules questions encore ouvertes concernent les groupes orthogonaux pour  $n = 3$  et  $n = 4$ , et les groupes unitaires pour  $2 \leq n \leq 4$ . Les méthodes de démonstration sont de la même nature „géométrique“ que celles du Réf., mais enrichies de nombreux détails originaux et ingénieux; surtout, l'A. introduit trois nouvelles idées, qui sont à la source des progrès accomplis. La première consiste à appliquer les th. de Hasse sur les représentations de formes quadratiques par d'autres formes quadratiques (là où le Réf. n'utilisait ces théorèmes que pour les représentations de nombres par des formes) et à employer systématiquement les propriétés de la norme spinorielle d'Eichler. Les deux autres sont: 1. un théorème d'approximation pour les transformations orthogonales, analogue au théorème classique permettant d'approcher par un seul élément de  $K$  un nombre fini d'éléments donnés arbitrairement, chacun dans un corps local différent  $K_{p_i}$ ; 2. la remarque que dans un corps local  $K_v$ , deux formes quadratiques dont les coefficients correspondants diffèrent d'une quantité assez petite, sont équivalentes. Pour les détails des démonstrations très concises, nous renvoyons au travail lui-même. J. Dieudonné.

**Ono, Takashi:** On birational invariance of classical groups. J. math. Soc. Japan 8, 167—175 (1956).

Soit  $K$  un corps commutatif,  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $K$ ,  $G$  un sous-groupe de  $GL(V)$  égal à un groupe classique  $GL(V)$ ,  $SL(V)$ ,  $Sp(V, f)$ ,  $O(V, f)$  ou  $O^+(V, f)$ . Moyennant diverses restrictions sur  $K$  et  $n$  (le plus souvent  $K$  de caractéristique 0, et  $n > 6$ ,  $n \neq 8$  pour les groupes orthogonaux), l'A. montre que si un sous-groupe algébrique  $G_1$  de  $GL(V)$  est birationnellement isomorphe à  $G$ , alors  $G_1 = G$ .

J. Dieudonné.

**Yokota, Ichiro:** On the cell structures of  $SU(n)$  and  $Sp(n)$ . Proc. Japan Acad. 31, 673—677 (1955).

Construction de décompositions cellulaires, dans lesquelles toutes les cellules sont des cycles, pour les groupes unitaires unimodulaires  $SU(n)$  et  $Sp(n)$  sur les nombres complexes et les quaternions respectivement, d'où l'on tire immédiatement les propriétés homologiques classiques de ces groupes. Pour  $Sp(n)$  le procédé est incorrect et rectifié dans une Note ultérieure (voir analyse suivante). A. Borel.

**Yokota, Ichiro:** On the cells of symplectic groups. Proc. Japan Acad. 32, 399—400 (1956).

Corrigeant une Note précédente (cf. analyse ci-dessus dont nous conservons les



notations), l'A. décrit une décomposition cellulaire de  $Sp(n)$ . Les cellules sont des produits (de Pontrjagin) de cellules „primitives“ de dimensions  $4k-1$ , ( $k=1, \dots, n$ ) en remplaçant les quaternions par des nombres complexes on retrouve dans d'autres notations, la décomposition de  $SU(n)$  de la première Note. A. Borel.

**Klingen, Helmut:** Über die Erzeugenden gewisser Modulgruppen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. 1956, 173—183 (1956).

Let  $K$  be an algebraic number field of the  $s$ -th degree over the rational field, Let  $U_n(K)$  be the  $n$ -rowed unimodular group, i. e. the group of  $n$ -rowed matrices with integer elements over  $K$  and with determinant unity. It was proved by Hurwitz that  $U_n(K)$  is generated by a finite number of unimodular matrices  $U_1, U_2, \dots, U_r$ .

Further let  $\mathfrak{S}$  denote the  $2n$ -rowed matrix  $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ . The group of  $2n$ -rowed unimodular matrices  $\mathfrak{T}$  satisfying  $\mathfrak{T} \mathfrak{S} \mathfrak{T}' = \mathfrak{S}$  is called symplectic unimodular group  $M_n(K)$ , where  $\mathfrak{T}'$  denotes the transposed matrix of  $\mathfrak{T}$ . The author proves that  $M_n(K)$  is

generated by the following elements: (i)  $\begin{pmatrix} U_v & 0 \\ 0 & U_v^{-1} \end{pmatrix}$ ,  $v=1, \dots, r$ ; (ii)  $\begin{pmatrix} I w_v [0, \dots, 0, 1] \\ 0 & I \end{pmatrix}$  with  $w_1, \dots, w_s$  being the integral basis of  $K$  and

$$(iii) \quad \begin{pmatrix} I + (a-1)[0, \dots, 0, 1] & b[0, \dots, 0, 1] \\ c[0, \dots, 0, 1] & I + (d-1)[0, \dots, 0, 1] \end{pmatrix},$$

where  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  runs over the generators of the subgroup of  $U_2(K)$  consisting of all matrices with determinant 1. The author obtains also the similar result about the Hermitian modular group. (H. Braun, this Zbl. 41, 416.) L. K. Hua.

**Gel'fand, I. M. and Z. Ja. (Ya.) Šapiro:** Representations of the group of rotations of 3-dimensional space and their applications. Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. 2, 207—316 (1956).

Vgl. die Besprechung des russ. Originals dies. Zbl. 49, 157.

**Littlewood, D. E.:** The characters and representations of imprimitive groups. Proc. London math. Soc., III. Ser. 6, 251—266 (1956).

Verf. betrachtet imprimitive Permutationsgruppen mit  $s$  Imprimitivitätssystemen von je  $r$  Symbolen. Die Symbole eines einzigen Imprimitivitätssystems werden gemäß einer Gruppe  $G$  der Ordnung  $g$  permutiert, die Imprimitivitätssysteme in ganzen erfahren die Permutationen einer Gruppe  $\Gamma$  der Ordnung  $\gamma$ . Alle diese Permutationen insgesamt erzeugen eine Permutationsgruppe  $H$  der Ordnung  $g^s \gamma$ . Jede imprimitive Gruppe ist Untergruppe einer derartigen Gruppe  $H$ , und ihre Charaktere können aus denen von  $H$  berechnet werden. Verf. gibt für den Fall, daß sowohl  $G$  als auch  $\Gamma$  die symmetrischen Gruppen der betreffenden Grade sind, eine explizite Methode an, die Charaktere von  $H$  zu bestimmen. Die gleiche Methode ist auch für beliebige Gruppen  $G$  und  $\Gamma$  anwendbar, sobald deren Charaktere bekannt sind. R. Kochendörffer.

**Schieferdecker, Eberhard:** Einbettungssätze für topologische Halbgruppen. Math. Ann. 131, 372—384 (1956).

$\mathfrak{H}$  sei eine topologische Halbgruppe (d. h. ein System mit assoziativer binärer Verknüpfung, das eine nicht notwendig Hausdorffsche Topologie besitzt, mit der Eigenschaft, daß  $(x, y) \rightarrow xy$  eine stetige Abbildung von  $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$  in  $\mathfrak{H}$  ist). Ein Element  $\alpha \in \mathfrak{H}$  heißt bekanntlich regulär, wenn aus  $\alpha a = \alpha b$  oder  $a \alpha = b \alpha$  folgt  $a = b$ . Sei  $\mathfrak{m}$  eine Untermenge von  $\mathfrak{H}$ , die nur reguläre Elemente enthält. Eine Linksquotientenhalbgruppe  $\mathfrak{Q}_l = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{H}; \mathfrak{m})$  von  $\mathfrak{H}$  bezüglich  $\mathfrak{m}$  ist eine Oberhalbgruppe von  $\mathfrak{H}$  mit Einselement 1, in der jedes  $\alpha \in \mathfrak{m}$  ein Inverses  $\alpha^{-1}$  besitzt und in der die Relation  $(\mathfrak{m}A) \cap \mathfrak{H} \neq \emptyset$  für jedes  $A \in \mathfrak{Q}_l$  erfüllt ist. Man definiere die Topologie von  $\mathfrak{H}$  mittels einer uniformen Struktur mit einem Fundamentalsystem  $\mathfrak{U}$  von Bändern (französisch: „filtre des entourages“) so daß: (1) aus  $(a, b) \in U$  folgt  $(xa, xb) \in U$  für jedes  $U \in \mathfrak{U}$  und  $x \in \mathfrak{H}$ ; (2) für  $y \in \mathfrak{H}$  und  $U \in \mathfrak{U}$  gibt es ein

$V \in \mathfrak{U}$ , so daß aus  $(a, b) \in V$  folgt  $(a y, b y) \in U$ ; (3) aus  $(x m) \cap m \neq \emptyset$  und  $(x a, x b) \in U$  folgt  $(a, b) \in U$  für jedes  $U \in \mathfrak{U}$  und  $x \in \mathfrak{S}$ ; (4) für jedes  $y \in \mathfrak{S}$  mit  $(m y) \cap m \neq \emptyset$  und  $U \in \mathfrak{U}$  gibt es ein  $V \in \mathfrak{U}$ , so daß aus  $(a y, b y) \in V$  folgt  $(a, b) \in U$ . Unter diesen Voraussetzungen kann man die uniforme Struktur von  $\mathfrak{S}$  zu einer uniformen Struktur von  $\mathfrak{Q}_i$  derart fortsetzen, daß die Einbettung von  $\mathfrak{S}$  in  $\mathfrak{Q}_i$  nicht nur algebraisch sondern auch topologisch ist. Für die algebraischen Theorie s. Schieferdecker, dies. Zbl. 65, 8 und Murata, dies. Zbl. 36, 293. Für frühere Resultate über topologische Einbettungen s. Schieferdecker, loc. cit., Tamari, dies. Zbl. 45, 299 und Gelbaum, Kalisch und Olmstedt, dies. Zbl. 45, 8. *E. Hewitt.*

**Kimura, Naoki and Takayuki Tamura:** Compact mob with a unique left unit. Math. J. Okayama Univ. 5, 115—119 (1956).

Les AA. étudient la structure d'un „mob“ (demi-groupe topologique séparé) compact  $S$  possédant un élément-unité à gauche unique  $e$  et ne possédant pas d'élément-unité à droite. Ils montrent notamment que  $Se$  contient alors nécessairement un élément idempotent autre que  $e$ . La Note se termine avec des exemples.

*R. Croisot.*

**Igusa, Jun-ichi:** Analytic groups over complete fields. Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 540—541 (1956).

Der Begriff einer analytischen Gruppe kann nicht nur über dem komplexen oder reellen Zahlkörper, sondern auch allgemeiner über einem beliebigen reell bewerteten Körper  $k$  der Charakteristik 0 definiert werden. Dabei ist lediglich vorauszusetzen, daß  $k$  in bezug auf die vorgegebene Bewertung vollständig ist. Die meisten der grundlegenden Prinzipien und Sätze aus der gewöhnlichen Theorie der Lieschen Gruppen können unmittelbar auf den allgemeinen Fall übertragen werden. Verf. beweist als Beispiel dazu den folgenden Satz: Eine kommutative analytische Gruppe  $\mathfrak{G}/k$  ist lokal isomorph zum  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $k^n$  (letzterer aufgefaßt als analytische Gruppe über  $k$ ). Als wichtigstes Anwendungsbeispiel für diesen Satz betrachtet Verf. den Fall, daß  $k$  gleich der  $p$ -adischen Hülle eines endlich-algebraischen Zahlkörpers in bezug auf eine endliche Primstelle  $p$  ist. In diesem Falle besitzt  $k^n$  beliebig kleine offene Untergruppen, die zu  $\mathfrak{o}^n$  isomorph sind ( $\mathfrak{o}$  bedeutet den Integritätsbereich der  $p$ -ganzen Zahlen aus  $k$ ). Es folgt, daß auch  $\mathfrak{G}$  beliebig kleine offene, zu  $\mathfrak{o}^n$  isomorphe Untergruppen besitzt. Ist hierbei insbesondere  $\mathfrak{G}$  gleich der Gruppe der in  $k$  rationalen Punkte einer über  $k$  definierten abelschen Mannigfaltigkeit im Sinne der algebraischen Geometrie, so ist  $\mathfrak{G}$  kompakt, und es ergibt sich der folgende wichtige Satz von Lutz-Mattuck: Besitzt  $\mathfrak{G}$  die angegebene Bedeutung, so gibt es in  $\mathfrak{G}$  eine Untergruppe von endlichem Index, welche zu  $\mathfrak{o}^n$  isomorph ist. Zu diesem Satz vgl. Mattuck, dies. Zbl. 66, 28.

*P. Roquette.*

**Morimoto, Akihiko:** Structures complexes invariantes sur les groupes de Lie semi-simples. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 1101—1103 (1956).

Let  $\mathfrak{G}$  be a connected Lie group of even dimension whose Lie algebra  $\mathfrak{g}$  is reductive. The author proves the following Theorem: There are infinitely many left-invariant complex structures on  $\mathfrak{G}$  for which the subgroup of right translations which are analytic automorphisms has as its Lie algebra a Cartan subalgebra of  $\mathfrak{g}$ . The proof is based on the Lemma: If  $\mathfrak{g}$  is a real reductive Lie algebra of even dimension, then there exist a Cartan subalgebra  $\mathfrak{f}$  of  $\mathfrak{g}$  and complex subalgebras  $\mathfrak{m}_1$  and  $\mathfrak{m}_2$  of the complexified form  $\mathfrak{g}^C$  such that (i)  $\mathfrak{m}_1$  and  $\mathfrak{m}_2$  are conjugate with respect to  $\mathfrak{g}$ , (ii)  $\mathfrak{g}^C$  is the direct sum of  $\mathfrak{m}_1$  and  $\mathfrak{m}_2$  and (iii)  $\mathfrak{f}$  is the set of all  $X \in \mathfrak{g}$  such that  $\text{ad}(X) \cdot \mathfrak{m}_1 \subseteq \mathfrak{m}_1$ . An example is given to show that there exist invariant complex structures other than those obtainable by the theorem.

*P. M. Cohn.*

**Harish-Chandra:** On a lemma of F. Bruhat. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 35, 201—210 (1956).

Soient  $G$  un groupe de Lie réel connexe semi-simple,  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie,  $\mathfrak{f}$  la sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  correspondant à un sous-groupe compact maximal du groupe ad-



joint,  $g = \mathfrak{k} + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$  une décomposition d'Iwasawa de  $g$  (fréquemment utilisée par l'A.; cf. par exemple ce Zbl. 51, 340),  $K, A, N$  les sous-groupes analytiques de  $G$  correspondant à  $\mathfrak{k}, \mathfrak{a}, \mathfrak{n}$ ,  $M$  le centralisateur et  $M'$  le normalisateur de  $A$  dans  $K$ . Alors, on sait que  $W = M/M'$  est fini, et  $S = MAN$  est un sous-groupe fermé de  $G$ . Si  $\sigma \in W$ ,  $S\sigma S$  est une double classe modulo  $S$ . Théorème :  $\sigma \rightarrow S\sigma S$  est une bijection de  $W$  sur l'ensemble des doubles classes modulo  $S$ . Ce résultat avait été établi par F. Bruhat dans le cas des groupes classiques par vérification explicite. La présente démonstration est générale. F. Bruhat l'a reproduite dans sa thèse [Bull. Soc. math. France 84, 97—205 (1956)] avec quelques simplifications de détail. (Pour un résultat très voisin, cf. Chevalley, ce Zbl. 66, 15.) J. Dixmier.

**Schöneborn, Heinz:** Über den Zusammenhang zwischen Dualitäts- und Vollständigkeitseigenschaften bei gewissen topologischen Abelschen Gruppen. Math. Z. 65, 429—441 (1956).

Der Verf. betrachtet primäre linear topologische Gruppen  $G$  und nennt  $G$  abzählbarartig (abz. a.) von erster, bzw. zweiter Art, wenn  $G$  dem ersten Hausdorffschen Abzählbarkeitsaxiom genügt, bzw. wenn in  $G$  eine aufsteigende Folge kompakter Untergruppen  $K_i$  existiert, so daß jede kompakte Untergruppe in einem  $K_i$  enthalten ist.  $G$  heißt schwach abz. a. von erster (zweiter) Art, wenn eine kompakte (offene) Untergruppe  $H$  existiert, so daß  $G/H$  ( $H$ ) abz. a. von erster (zweiter) Art ist. Der Verf. studiert die im Titel genannten Eigenschaften dieser Gruppen. Hierbei beschränkt er sich im wesentlichen auf die abz. a., da sich die Methoden und Ergebnisse leicht auf die schwach abz. a. ausdehnen lassen. Die Charaktergruppe  $\hat{G}$  wird nach Pontrjagin topologisiert: Die Annulatoren der kompakten Teile von  $G$  bilden eine Umgebungsbasis für die Null in  $\hat{G}$ . Der Verf. gibt dann für abz. a. Gruppen  $G$  drei Kriterien an, von denen jedes mit der Gültigkeit des Dualitätssatzes äquivalent ist, z. B.:  $G$  ist vollständig und antivollständig. Hierbei wird die Antivollständigkeit in einer zur Vollständigkeit dualen Weise definiert. Diese Methode der Dualisierung wichtiger in  $G$  erklärter Begriffe wird dann noch weiter untersucht. So wird z. B. der charakteristische Antifilter von  $G$  als System der kompakten Untergruppen von  $G$  definiert. Die vom Verf. in diesem Zusammenhang auf p. 439 gestellten Fragen  $F_1$  und  $F_2$  sind bereits in der von Verf. zitierten Arbeit (dies. Zbl. 65, 15) des Ref. verneinend beantwortet. Ferner sei bemerkt, daß die schwach abz. a. Gruppen Sonderfälle einer sehr viel allgemeineren Klasse primärer abelscher Gruppen sind, für die in der Theorie des Ref. stets der Dualitätssatz gilt. H. Leptin.

**Gelfand, I. M. and M. I. Graev:** Unitary representations of the real unimodular group (principal nondegenerate series). Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. 2, 147—205 (1956).

Vgl. die Besprechung des russ. Originals dies. Zbl. 52, 341.

**Najmark (Naïmark), M. A.:** Description of all irreducible unitary representations of the classical groups. Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. 2, 141—145 (1956).

Vgl. die Besprechung des russ. Originals dies. Zbl. 48, 19.

**Borel, Armand:** Groupes linéaires algébriques. Ann. of Math., II. Ser. 64, 20—82 (1956).

Unter einer (linearen) algebraischen Gruppe  $G$  versteht man gemäß E. Kolchin (dies. Zbl. 37, 187; 42, 255) eine Gruppe  $n$ -reihiger quadratischer Matrizen über einem universellen Körper  $K$  (algebraisch abgeschlossener Körper von unendlichem Transzendenzgrad über seinem Primkörper) mit folgender Eigenschaft: In dem Raum aller  $n$ -reihigen quadratischen Matrizen über  $K$  gibt es eine algebraische Mannigfaltigkeit, deren nicht-singuläre Matrizen gerade die Gruppe  $G$  bilden. Verf. untersucht sehr eingehend diese algebraischen Gruppen; unter ihnen besonders die zusammenhängenden auflösbaren Gruppen, die maximalen zusammenhängenden und

auf lösbaren Gruppen und gewisse speziellere Gruppen (Cartansche Gruppen). Hierbei heißt eine algebraische Gruppe zusammenhängend, wenn ihre zugehörige algebraische Mannigfaltigkeit irreduzibel, deren definierendes Ideal also prim ist. Die gewonnenen Resultate gestatten zum Teil Verallgemeinerungen auf „variétés de groupe“ im Sinne von A. Weil und auf sogenannte  $k$ -Gruppen. Unter einer  $k$ -Gruppe wird dabei eine algebraische Gruppe verstanden, bei der die Elemente der Matrizen aus einem beliebigen, nicht notwendig universellen Körper  $k$  stammen und deren definierendes Ideal entsprechend aus Polynomen mit Koeffizienten in diesem Körper  $k$  besteht. — Kapitel I behandelt die Grundlagen der Theorie. Nach einer Zusammenstellung der Grundbegriffe aus der algebraischen Geometrie folgt die Definition der algebraischen Gruppen und der  $k$ -Gruppen. Hierbei wird bemerkt, daß eine algebraische Gruppe  $n$ -reihiger Matrizen auch direkt als volle algebraische Mannigfaltigkeit im Raum der  $(n + 1)$ -reihigen Matrizen aufgefaßt werden kann. Für die algebraische Gruppe  $G$  heißt ein Körper  $k$  ein definierender Körper, wenn das definierende Ideal von  $G$  eine Basis besitzt, deren Polynome Koeffizienten in  $k$  haben. Die weiteren Paragraphen behandeln Kommutatoren, auflösbare Gruppen, Homomorphismen, Faktorgruppen usw. — Kapitel II und III behandeln die kommutativen und die zusammenhängenden auflösbaren algebraischen Gruppen. Ein Endomorphismus des endlich-dimensionalen Vektorraumes  $V$  heißt halb-einfach, wenn  $V$  direkte Summe minimaler, gegenüber dem Endomorphismus invarianter Unterräume ist; der Endomorphismus heißt nilpotent, wenn eine Potenz von ihm die Nullabbildung ist, und unipotent, wenn seine Eigenwerte alle gleich eins sind. Jeder umkehrbare Endomorphismus besitzt eine eindeutige Darstellung  $x = x_s x_u = x_u x_s$ , wobei  $x_s$  halb-einfach und  $x_u$  unipotent ist. Eine Matrizengruppe heißt diagonalisierbar, wenn sie äquivalent zu einer Matrizengruppe ist, deren sämtliche Matrizen Diagonalform besitzen. Eine Matrizengruppe ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie kommutativ ist und aus lauter halb-einfachen Matrizen besteht. Eine (kommutative) zusammenhängende und diagonalisierbare algebraische Gruppe wird in Analogie zur Theorie der kompakten Lieschen Gruppen ein Torus genannt. Eine in Diagonalform befindliche algebraische Gruppe kann durch endlich viele monomiale Gleichungen (Gleichungen der Form  $X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n} = 1$ ) definiert werden; für sie ist daher der Primkörper von  $K$  ein definierender Körper. Diese Diagonalgruppen sind bereits vollständig durch ihre Elemente endlicher Ordnung bestimmt. Sind sie überdies zusammenhängend, so sind sie isomorph zu einem endlichen direkten Produkt der multiplikativen Gruppe von  $K$  mit sich selbst. Ist  $M$  eine Teilmenge der algebraischen Gruppe  $G$ , so bedeute  $A(M)$  die kleinste algebraische Untergruppe von  $G$ , die  $M$  enthält (zu  $M$  adhäre Gruppe). Ist  $x$  eine nicht-singuläre Matrix, so gilt  $x_s \in A(x)$  und  $x_u \in A(x)$ , und  $A(x)$  ist das direkte Produkt der Gruppen  $A(x_s)$  und  $A(x_u)$ . Die halb-einfachen bzw. unipotenten Elemente einer kommutativen algebraischen Gruppe  $G$  bilden algebraische Untergruppen  $G_s$  bzw.  $G_u$ , und  $G$  ist das direkte Produkt dieser Untergruppen. Es folgen (teilweise bekannte) Sätze über Dreiecksgruppen. Ist  $G$  eine nilpotente (die algebraische Zentralreihe bricht mit dem neutralen Element ab) zusammenhängende algebraische Gruppe, so ist  $G_s$  eine zentrale zusammenhängende algebraische Untergruppe, und  $G$  ist wiederum das direkte Produkt von  $G_s$  und  $G_u$ . Ist  $G$  eine zusammenhängende auflösbare algebraische Gruppe (die algebraische Kommutatorreihe bricht mit dem neutralen Element ab), so sind alle ihre maximalen Tori konjugiert. Ist  $G$  eine zusammenhängende auflösbare algebraische Gruppe und  $Q$  ein Torus von  $G$ , so können simultan  $G$  auf Dreiecksform und  $Q$  auf Diagonalform transformiert werden. Schließlich werden die Zentralisatoren der Tori einer zusammenhängenden auflösbaren algebraischen Gruppe untersucht. — In den Kapiteln IV und V endlich werden allgemeinere algebraische Gruppen behandelt. Bei diesen Untersuchungen spielen neben den vollständigen Mannigfaltigkeiten im Sinne von A. Weil wiederum



die Tori und die zusammenhängenden auflösbaren Untergruppen eine wesentliche Rolle. Es ergibt sich ein neuer Beweis für den Satz von Lie-Kolchin, daß eine zusammenhängende auflösbare algebraische Gruppe auf Dreiecksform transformiert werden kann. Ebenso werden auf neuem Wege die Kolchinschen Sätze über quasi-kompakte und antikompakte Gruppen, sowie zahlreiche andere Ergebnisse gewonnen. Den Abschluß bilden neben Untersuchungen über sogenannte reguläre Elemente und über Invarianzeigenschaften Sätze über Cartansche Untergruppen; das sind diejenigen maximalen nilpotenten Untergruppen, deren sämtliche Untergruppen von endlichem Index auch in dem Normalisator endlichen Index besitzen. Es wird gezeigt, daß die Cartanschen Untergruppen einer zusammenhängenden algebraischen Gruppe genau die Zentralisatoren der maximalen Tori sind. *H.-J. Kowalsky.*

### Verbände. Ringe. Körper:

**Fleischer, Isidore:** A note on subdirect products. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **6**, 463—465 (1955).

Es wird eine hinreichende und notwendige Bedingung gegeben, daß eine subdirekte Darstellung einer algebraischen Struktur  $A$  (d. h. einer mit gewissen Operationen und eventuell Operatorbereichen versehenen Menge) mittels ihrer Quotientenstrukturen  $A/\theta$  und  $A/\theta'$  nach Kongruenzrelationen  $\theta$  und  $\theta'$  von der folgenden Beschaffenheit sei:  $A$  besteht genau aus allen Paaren  $(a, a')$ , wo  $a \in A/\theta$  und  $a' \in A/\theta'$  dasselbe Bild bei einem Homomorphismenpaar  $A/\theta \sim B$ ,  $A/\theta' \sim B$  besitzen. Die fragliche Bedingung ist die Vertauschbarkeit von  $\theta$  und  $\theta'$ . *L. Fuchs.*

**Kogan, S. A.:** Lösung dreier Probleme aus der Theorie der Verbände. *Uspechi mat. Nauk* **11**, Nr. 2 (68), 185—190 (1956) [Russisch].

The paper contains solutions of problems 21, 23 and 24 from the book G. Birkhoff, *Lattice Theory* (rev. edition, this. Zbl. **33**, 111). Some necessary and sufficient conditions are formulated (1) for an element  $x$  of a lattice  $L$  to be isolated in the order topology; (2) for  $x$  to be isolated in the interval topology; (3) for  $L$  to be a Hausdorff space in the interval topology; (4) for every closed interval in  $L$  to be an intersection of principal ideals. *R. Sikorski.*

**Petresco, J.:** Théorie relative des chaînes. *Publ. sci. Univ. d'Alger, Sér. A* **2**, 61—135 (1956).

Une partie de ce travail a été résumée dans des Notes aux Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris (ce Zbl. **46**, 254; **47**, 262; **50**, 27; **51**, 21). Les considérations de la seconde partie aboutissent aux résultats suivants: Soit, dans un treillis, une relation  $N$  telle que  $ANA$  et  $ANA^*$  entraînent  $A \leq A^*$ ; notons  $A_B = A \cup (A^* \cap B)$ .  $N$  est dite normalité (ou isonormalité) si l'on a les deux conditions suivantes: (k) Quels que soient  $A$  et  $B$ , il existe  $E$  avec  $E \leq A$  et  $ENB$  (V. Korišek, ce Zbl. **26**, 387); (n)  $ANA^*$  et  $BNB^*$  entraînent  $A_B N A_{B^*}$ ,  $B_A N B_{A^*}$  et la correspondance (ou l'isocorrespondance) des deux derniers segments. Soit d'autre part  $O$  la relation de normalité de O. Ore (ce Zbl. **16**, 203), définie par  $AOA^*$  équivaut au fait que  $A \leq X \leq A^*$  et  $Y \leq V \leq A^*$  impliquent  $A \cup (X \cap V) = X \cap (A \cup V)$  et  $V \cap (Y \cup A) = Y \cup (V \cap A)$ ; pour que  $N$  soit une normalité (ou une isonormalité), il faut et suffit qu'on ait (k) et que, si  $ANA^*$  est vérifié,  $V \leq A^*$  entraîne  $(A \cap V) NV$ ,  $Y NV \leq A^*$  entraîne  $(A \cup Y) N(A \cup V)$ , et, soit  $V \cap (Y \cup A) = Y \cup (V \cap A)$ , soit  $AOA^*$ .  $O$  est elle même une isonormalité et constitue par conséquent l'isonormalité maximum. Dans le cas d'un treillis fini, on peut construire par récurrence toute isonormalité. *R. Croisot.*

**Rubin, Jean E.:** Remarks about a closure algebra in which closed elements are open. *Proc. Amer. math. Soc.* **7**, 30—34 (1956).

A closure algebra is said to be a  $C$ -5 algebra provided every closed element is open. Necessary and sufficient conditions are formulated for a closure algebra to be a  $C$ -5 algebra. The closure operation in any  $C$ -5 algebra is completely additive. The MacNeille extension of a  $C$ -5 algebra is also a  $C$ -5 algebra. *R. Sikorski.*

Curtis, Charles W.: *Modular Lie algebras. I.* Trans. Amer. math. Soc. 82, 160—179 (1956).

A Lie algebra  $\mathfrak{l}$  over a field  $E$  of characteristic  $p > 0$  is said to be separable, if the Killing form  $B(x, y) = \text{tr}(\text{ad } x)(\text{ad } y)$  is non-degenerate. For any  $x \in \mathfrak{l}$ , the mapping  $(\text{ad } x)^p$  is a derivation, and hence inner (Zassenhaus, this Zbl. 21, 200), i. e.  $(\text{ad } x)^p = \text{ad } y$  for a unique  $y \in \mathfrak{l}$ . If this  $y$  is denoted by  $x^p$ , then the algebra  $\mathfrak{l}$  is a restricted Lie algebra with respect to the operation  $x \rightarrow x^p$ . In the sequel separable Lie algebras are understood to be restricted Lie algebras in this sense. A separable Lie algebra may be obtained from a semisimple Lie algebra  $\mathfrak{g}$  over a field of characteristic 0 by choosing (in an algebraic closure) a Cartan subalgebra  $\mathfrak{h}$  and the corresponding basis  $H_1, \dots, H_l, E_\alpha$  ( $\alpha$  roots of  $\mathfrak{g}$ ) such that the multiplication constants of  $\mathfrak{g}$  are algebraic integers. Let  $K$  be the field generated by the multiplication constants,  $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_p$  a discrete valuation ring in  $K$ ,  $\mathfrak{p}$  the corresponding prime ideal and  $\bar{K}$  the residue-class field  $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ . Then  $\mathfrak{g}$  may be considered as an algebra  $\Sigma$  over  $\mathfrak{o}$ , and the quotient  $\Sigma/\mathfrak{p}\Sigma$  is a Lie algebra  $\mathfrak{l}$  over  $\bar{K}$ . This algebra is shown to be separable provided that  $\mathfrak{p}$  is a „non-exceptional“ prime ideal, i. e.  $6 \notin \mathfrak{p}$ ,  $B(E_{-\alpha}, E_\alpha) \notin \mathfrak{p}$ ,  $\det(a_{ij}) \notin \mathfrak{p}$ , where  $(a_{ij})$  is the Weyl matrix of  $\mathfrak{g}$  (cf. Harish-Chandra, this Zbl. 42, 127). Moreover, the rank of  $\mathfrak{l}$  is then equal to the rank of  $\mathfrak{g}$ .  $\mathfrak{h}$  corresponds to a Cartan subalgebra  $\mathfrak{h}$  of  $\mathfrak{l}$  and the restriction of the Killing form to  $\mathfrak{h}$  is non-degenerate. A separable algebra  $\mathfrak{l}$  obtained in this way is called a modular Lie algebra. The roots  $\bar{\alpha}$  of  $\mathfrak{l}$  are in one-one correspondence with the roots  $\alpha$  of  $\mathfrak{g}$ , the linear relations between the roots are preserved and a fundamental system of roots of  $\mathfrak{g}$  goes over into a linearly independent „fundamental system“ of roots of  $\mathfrak{l}$ . If  $\bar{\alpha}$  is any root of  $\mathfrak{l}$ , then  $m\bar{\alpha}$  is a root if and only if  $m \equiv \pm 1 \pmod{p}$  where  $p$  is the characteristic of  $\bar{K}$ . The  $p$ -th power operation in  $\mathfrak{l}$  is given by  $h_i^p = h_i, e_\alpha^p = 0$ , where  $h_i, e_\alpha$  are the basis elements of  $\mathfrak{l}$  corresponding to  $H_i, E_\alpha$  in  $\mathfrak{g}$ . — Next representations of  $\mathfrak{l}$  are considered. Using the associative enveloping algebra  $\mathfrak{U}$  of  $\mathfrak{g}$ , the author shows that every irreducible representation of  $\mathfrak{g}$  corresponds to a restricted representation of  $\mathfrak{l}$ . If  $\mathfrak{a}$  is the  $u$ -algebra of  $\mathfrak{l}$  (cf. Jacobson, this Zbl. 25, 303), then the residue-class field  $\bar{K} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$  is a splitting field for  $\mathfrak{a}$ ; moreover any irreducible  $\mathfrak{a}$ -module  $\mathfrak{m}$  can be expressed as a direct sum of the weight spaces  $\mathfrak{m}_\lambda$  belonging to the distinct weights  $\lambda$  of  $\mathfrak{m}$ . Now the roots  $\bar{\alpha}$  of  $\mathfrak{l}$  correspond with the roots  $\alpha$  of  $\mathfrak{g}$ , so they may be ordered by putting  $\bar{\alpha} > \bar{\beta}$  if  $\alpha > \beta$ , though of course the sum of positive roots of  $\mathfrak{l}$  may well be zero. In general a total ordering of the weights of an  $\mathfrak{a}$ -module  $\mathfrak{m}$  is not possible, but a weight  $\lambda$  of  $\mathfrak{m}$  may be called highest weight if, for no  $\bar{\alpha} > 0$ ,  $\lambda + \bar{\alpha}$  is a weight of  $\mathfrak{m}$ . To such a weight belongs a non-zero vector  $u$  of  $\mathfrak{m}$  such that (i)  $u e_{\bar{\alpha}} = 0$  ( $\bar{\alpha} > 0$ ), (ii)  $u e_{i_1} \cdots e_{i_r} = 0$  where the  $e_{i_j}$  belong to negative roots  $\bar{\alpha}_j$  such that  $\sum \alpha_j = 0$ . If a vector  $u$  with these properties exists,  $\lambda$  need not be a highest weight; it is then called a leading weight of  $\mathfrak{m}$ . E. g. any modular Lie algebra obtained from the 3-dimensional simple Lie algebra has just  $p$  inequivalent irreducible representations, of degrees 1, 2, ...,  $p$ , of which the representation of degree  $p$  has a leading weight which is not a highest weight. It is proved that an irreducible  $\mathfrak{a}$ -module has at most one leading weight; as in the classical case it can then be shown that the leading weight of an irreducible  $\mathfrak{a}$ -module has multiplicity one and determines the module up to isomorphism. A weight  $\lambda$  of  $\mathfrak{m}$  is said to be extreme if, for no root  $\bar{\alpha}$ , both  $\lambda + \bar{\alpha}$  and  $\lambda - \bar{\alpha}$  are weights. Then in an irreducible  $\mathfrak{a}$ -module  $\mathfrak{m}$  the extreme weights are permuted transitively by the Weyl group, and if  $\mathfrak{m}$  has an extreme weight, it also has a highest weight. Finally it is shown that for an irreducible  $\mathfrak{a}$ -module  $\mathfrak{m}$  which has a leading weight  $\lambda \neq 0$ , a weight  $\lambda$  of  $\mathfrak{h}$  can be defined, and an irreducible  $\mathfrak{U}$ -module  $\mathfrak{M}$  of highest weight  $\lambda$  constructed, such that the  $\mathfrak{a}$ -module obtained from  $\mathfrak{M}$  contains a constituent isomorphic to  $\mathfrak{m}$ .

P. M. Cohn.



**Hochschild, G.:** Note on Lie algebra kernels in characteristic  $p$ . Proc. Amer. math. Soc. **7**, 551—557 (1956).

**Theorem.** Let  $L$  be a finite dimensional Lie algebra and  $C$  a finite dimensional  $L$ -module. Then an element of the cohomology group  $H^3(L, C)$  is the obstruction of a finite dimensional  $L$ -kernel if and only if it is effaceable. — In previous papers (this Zbl. **55**, 266, **57**, 272) the author has proved the „if“ and, for the case of characteristic 0, the „only if“. He now completes the proof, by establishing the „only if“ for characteristic  $p \neq 0$ . An essential step is the embedding of a finite dimensional Lie algebra  $L$  of characteristic  $p$  in a finite dimensional restricted Lie algebra  $L^*$ , using the technique of Jacobson (this Zbl. **46**, 34) and, more generally, the embedding of an  $L$ -kernel  $K$  in a restricted  $L^*$ -kernel  $K^*$ , with a „strongly abelian“ centre  $C^*$  (i. e.  $C^{*[p]} = 0$ ), to which the author's cohomology theory (l. c.) can be applied.

*P. M. Cohn.*

**Fuchs, L.:** Ringe und ihre additive Gruppe. Publ. math., Debrecen **4**, 488—508 (1956).

In dieser Arbeit werden die Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften eines assoziativen Ringes  $R$  (z. B. Minimalbedingung, Halbeinfachheit usw.) und der Struktur der additiven Gruppe  $R^+$  von  $R$  untersucht, ferner wird für gewisse abelsche Gruppen  $G$  das Problem behandelt, sämtliche Ringe  $R$  zu bestimmen, für welche  $R^+ = G$  ist. So wird ein Satz bewiesen, der für den Fall einer Torsionsgruppe  $G$  eine gewisse Übersicht über sämtliche Ringe  $R$  mit  $R^+ = G$  angibt. Hierbei spielt die Basisuntergruppe von  $G$  eine wesentliche Rolle. Im zweiten Teil gibt der Verf. notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gruppe  $G$  an, daß sich auf ihr ein assoziativer Ring  $R$  der folgenden Typen „aufbauen“ läßt (d. h., daß ein  $R$  mit  $R^+ = G$  existiert): Einfache Ringe (Bedingung:  $G$  vom Primzahlexponenten oder Modul über den rationalen Zahlen), Ringe mit Minimalbedingung für Links-ideale (hier läßt sich Satz 6 einfacher beweisen, wenn man bemerkt, daß zu jedem vollkommenen Körper  $k$  der Charakteristik  $p$  ein unverzweigter  $p$ -adischer Körper der Charakteristik 0 mit  $k$  als Restklassenkörper existiert), halbeinfache Ringe mit Minimalbedingung. Für reguläre Ringe im Sinne v. Neumanns wird eine notwendige Bedingung angegeben. Schließlich wird noch untersucht, wann sich auf Torsionsgruppen Ringe bestimmter Art aufbauen lassen.

*H. Leptin.*

**Szele, T. and L. Fuchs:** On Artinian rings. Acta Sci. math. **17**, 30—40 (1956).

Ein Artinscher Ring ist ein Ring  $\neq (0)$ , dessen Linksideale die Minimalbedingung (=  $U$ -Kettensatz) erfüllen. Ein Artinscher Ring, der sogar direkte Summe von minimalen Linksidealien ist, läßt sich als Summe eines halbeinfachen Ringes und endlich vieler Nullringe schreiben; seine Struktur kann durch endlich viele Schiefkörper und natürliche Zahlen gekennzeichnet werden. Für einen Artinschen Ring  $R$  sind die folgenden Eigenschaften äquivalent: 1. Die additive Gruppe von  $R$  enthält keine Untergruppe vom Prüferschen Typ  $p^\infty$  (d. i. eine zur additiven Gruppe mod 1 der rationalen Zahlen mit  $p$ -Potenzen als Nenner isomorphe Gruppe). 2.  $R$  kann in einen Artinschen Ring mit Einselement eingebettet werden. 3. Die Linksideale erfüllen die Maximalbedingung. 4. Die Linksideale besitzen eine Kompositionsreihe. In diesem Fall ist  $R$  direkte Summe von eindeutig bestimmten Artinschen Ringen, von denen einer torsionsfrei ist und die andern  $p$ -Ringe zu verschiedenen Primzahlen  $p$  sind. Das Radikal eines Artinschen Ringes ist genau dann ebenfalls Artinsch, wenn seine additive Gruppe direkte Summe endlich vieler zyklischer Gruppen von Primzahlpotenzordnung und endlich vieler Gruppen vom Prüferschen Typ  $p^\infty$  ist.

*G. Pickert.*

**Kovács, László:** A note on regular rings. Publ. math., Debrecen **4**, 465—468 (1956).

In einem beliebigen Ring  $R$  gilt  $JL \subseteq J \cap L$  für jedes Rechtsideal  $J$  und Linksideal  $L$ . Verf. zeigt, daß der Ring  $R$  dann und nur dann regulär im Sinne von

J. Neumann ist, wenn stets  $JL = J \cap L$  gilt. Die folgenden Bedingungen sind für einen Ring  $R$  äquivalent: 1.  $R$  ist regulär und enthält kein nilpotentes Element  $\neq 0$ ; 2. jedes Quasiideal von  $R$  ist idempotent (Quasiideal im Sinne von O. Steinfeld ist ein Untermodul  $Q$  mit der Eigenschaft  $RQ \cap Q \subset Q$ ); 3. für jedes Rechtsideal  $J$  und Linksideal  $L$  gilt  $JL = J \cap L \subset LJ$ ; 4.  $R$  ist regulär und die subdirekte Summe von Schiefkörpern.

L. Fuchs.

Utumi, Yuzo: On quotient rings. Osaka math. J. 8, 1—18 (1956).

Ein Oberring  $S$  des Ringes  $R$  heißt ein Linksquotientenring von  $R$ , wenn für je zwei Elemente  $x \neq 0$  und  $y$  von  $S$  ein Element  $a \in R$  existiert, so daß  $ax \neq 0$  und  $ay \in R$ ; Bezeichnung:  $S \geq R$ . Unter Benutzung einer von R. E. Johnson (dies. Zbl. 44, 22) herrührenden Methode gibt Verf. eine Konstruktionsmethode für den maximalen Linksquotientenring  $\bar{R}$  eines Ringes  $R$ , der der Bedingung  $\bar{R} \geq R$  genügt, also keinen Rechtsannulator besitzt. Es sei  $\mathfrak{A}_R$  die Menge aller  $R$ -Linkshomomorphismen, die auf Linksidealen  $I$  mit  $R \geq I$  definiert sind und deren Werte in  $R$  fallen. Bedeutet  $M_\theta$  den Definitionsbereich von  $\theta \in \mathfrak{A}_R$ , so wird im Falle  $M_\theta = M_{\theta'}$  die Addition durch  $x(\theta + \theta') = x\theta + x\theta'$ , im Falle  $M_\theta \cap M_{\theta'} \neq \emptyset$  die Multiplikation durch  $x(\theta\theta') = (x\theta)\theta'$  definiert.  $\theta$  und  $\theta'$  seien äquivalent, falls ein Linksideal  $I$  mit  $I \subseteq M_\theta \cap M_{\theta'}$ ,  $R \geq I$  existiert, auf dem  $\theta$  und  $\theta'$  übereinstimmen. Die Äquivalenzklassen bilden einen Ring  $\bar{R}$ , der als Oberring von  $R$  betrachtet werden kann, da die Rechtsmultiplikationen  $x_r$  mit den Elementen  $x \in R$  zu  $\mathfrak{A}_R$  gehören. Dann ist  $\bar{R}$  in der Tat der maximale Linksquotientenring von  $R$ , da aus  $S \geq R$  die Existenz eines Isomorphismus von  $S$  in den Ring  $\bar{R}$  folgt, der die Elemente von  $R$  fest läßt. Verf. beweist mehrere wichtige Eigenschaften von  $\bar{R}$ , z. B. daß der maximale Linksquotientenring des vollen Matrizenringes  $R_n$  über  $R$  genau der Matrizenring  $(\bar{R})_n$  ist, und untersucht verschiedene Eigenschaften von  $\bar{R}$ , falls  $R$  gewissen speziellen Bedingungen unterworfen ist.

L. Fuchs.

Birkhoff, Garrett and R. S. Pierce: Lattice-ordered rings. Anais Acad. Brasil. Ci. 28, 41—69 (1956).

Ein teilweise geordneter Ring (*po*-Ring) ist ein Ring, für dessen Elemente eine teilweise Ordnung mit folgenden Eigenschaften definiert ist: (1) Aus  $a \geq 0$  und  $x \geq y$  folgt  $a + x \geq a + y$ ; (2) aus  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  folgt  $ab \geq 0$ . Die Menge  $R^+$  aller positiven Elemente eines *po*-Ringes erfüllt die Bedingungen: (I)  $0 \in R^+$ ; (II) aus  $a \in R^+$  und  $-a \in R^+$  folgt  $a = 0$ ; (III) aus  $a, b \in R^+$  folgt  $a + b \in R^+$  und  $ab \in R^+$ ; (IV)  $a \geq b$  ist gleichwertig mit  $a - b \in R^+$ . Umgekehrt definiert jede Teilmenge  $R^+$  eines Ringes  $R$  mit den Eigenschaften (I)–(III) mittels (IV) eine teilweise Ordnung, hinsichtlich derer  $R$  ein *po*-Ring ist. Der eigentliche Gegenstand der Arbeit betrifft die Untersuchung von solchen *po*-Ring, die hinsichtlich ihrer teilweisen Ordnung Verbandsstruktur besitzen (*L*-Ringe). Ein Ideal  $I$  des *L*-Ringes  $R$  heißt ein *L*-Ideal, wenn aus  $a \in I$  und  $|x| \leq |a|$  stets  $x \in I$  folgt. Das *L*-Radikal eines *L*-Ringes  $R$  ist die Menge  $N$  aller  $a \in R$ , für die es eine natürliche Zahl  $n = n(a)$  mit  $x_0 |a| x_1 |a| x_2 \cdots x_{n-1} |a| x_n = 0$  für alle  $x_0, \dots, x_n \in R$  gibt.  $N$  ist ein *L*-Ideal und die Vereinigung aller nilpotenten *L*-Ideale von  $R$ ; jedes Element von  $N$  ist nilpotent. Genügt  $R$  der (Auf- oder Absteigenden-) Ketten-Bedingung für *L*-Ideale, so ist das *L*-Radikal selbst nilpotent. Eine *L*-Algebra ist ein *L*-Ring, dessen additive Gruppe ein Vektorverband über einem angeordneten Körper ist. Es werden alle möglichen zweidimensionalen *L*-Algebren über dem Körper der reellen Zahlen bestimmt. Weitere Ergebnisse beziehen sich auf Einheiten in *L*-Algebren. Es folgen Untersuchungen zur Darstellungstheorie von *po*-Ring und *L*-Ring, sowie einige Sätze über reguläre *L*-Ringe (das sind *L*-Ringe, deren reguläre Darstellung einen Verbandshomomorphismus vermittelt). Speziellere Ergebnisse werden für sogenannte *F*-Ringe gewonnen; das sind *L*-Ringe, in denen aus  $a \cap b = 0$  und  $c \geq 0$  stets  $ca \cap b = ac \cap b = 0$  folgt. Die *F*-Ringe können unter den *L*-Ring dadurch



gekennzeichnet werden, daß sie subdirekte Vereinigungen von geordneten Ringen sind. Daneben werden zahlreiche weitere Eigenschaften und idealtheoretische Kennzeichnungen von  $F$ -Ring-hergeleitet. Der letzte Abschnitt ist den vollständigen  $L$ -Ring- gewidmet. Bemerkenswert ist die Fülle der Beispiele, die allen Untersuchungen parallel laufen. Die Arbeit schließt mit einer Liste ungelöster Probleme.

*H.-J. Kowalsky.*

**Barnes, Wilfred E.: Primal ideals and isolated components in noncommutative rings.** Trans. Amer. math. Soc. **82**, 1—16 (1956).

In einem beliebigen (assoziativen) Ring  $R$  heißt das Element  $x$  rechts-prim zum Ideal  $A$ , falls jedes der Bedingung  $yRx \subseteq A$  genügende Element  $y \in R$  zu  $A$  gehört. Ein Ideal  $B$  ist nicht rechts-prim zu  $A$ , falls es kein zu  $A$  rechts-primen Element enthält. Verf. versteht unter einem (Rechts-) Primalideal ein Ideal  $Q$ , für das die zu  $Q$  nicht rechts-primen Elemente ein Ideal, das sog. adjungierte Ideal von  $Q$  bilden. Diese Definition enthält als Spezialfall die vom Ref. (dies. Zbl. **41**, 165) für den kommutativen Fall eingeführten Primalideale und stimmt mit dem Begriff von Curtis (dies. Zbl. **47**, 32) im Falle von Ringen mit Einselement und mit Maximalbedingung überein. U. a. wird gezeigt, daß jedes irreduzible Ideal primal und das Adjungierte jedes stark irreduziblen Ideals (das also nicht als Durchschnitt einer Menge von Idealen darstellbar ist) stets prim ist. Ist  $A = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$  eine kürzeste und reduzierte (d. h. kein  $Q_i$  kann durch ein echtes Oberideal ersetzt werden) Zerlegung in Primalideale  $Q_i$  mit verschiedenen adjungierten Primidealen  $P_i$ , dann können die  $P_i$  als die maximalen in der Menge aller zu  $A$  nicht rechts-primen Primoberideale charakterisiert werden; somit sind in den Zerlegungen vom erwähnten Typ sowohl die Anzahl der Komponenten als auch die adjungierten Primideale eindeutig bestimmt. Wie im kommutativen Fall kann der Durchschnitt aller Ideale, die unter den zu  $A$  nicht rechts-primen Oberidealen von  $A$  maximal sind, als die Menge aller  $x$  definiert werden, für die das Ideal  $(x, y)$  für jedes zu  $A$  nicht rechts-primen Element  $y$  zu  $A$  nicht rechts-prim ist. Die oberen und unteren isolierten  $B$ -Komponenten ( $B \supseteq A$ ), sowie die oberen und unteren Hauptkomponenten eines Ideals  $A$  werden eingeführt; diese stimmen in kommutativen Ringen mit den Krullschen Begriffen überein. Jedes Ideal ist gleich dem Durchschnitt seiner oberen isolierten Komponenten und dem seiner unteren Hauptkomponenten.

*L. Fuchs.*

**Guérindon, Jean: Sur une famille d'équivalences en théorie des idéaux.** C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 2693—2695 (1956).

Ein Integritätsbereich  $A$  ist genau dann 1. vollständig ganz abgeschlossen, wenn die Artinsche Äquivalenz  $\mathcal{A}$  der Ideale in dem mit passend definierter Topologie versehenen Verband der regulären Äquivalenzrelationen der Ideale in  $A$  ein abgeschlossenes Element ist; 2. eine endliche diskrete Hauptordnung, wenn jedes echte Ideal  $I$  quasigleich einem Produkt von Primidealen  $p_i$  ist mit der Eigenschaft: aus  $p_i \subseteq J \subseteq A$  folgt  $J = A \bmod \mathcal{A}$ . Eine ähnliche Charakterisierung wie 2. gilt für Dedekindsche Ringe und Multiplikationsringe, nur müssen die Primideale  $p_i$  jetzt maximal bzw. Hauptideale sein. Ein weiteres Ergebnis ist, daß ein Noetherscher Integritätsbereich genau dann Dedekindsch ist, falls jedes Primärideal irreduzibel ist, die von 0 verschiedenen sogar als Durchschnitt keiner Menge von Idealen dargestellt werden können.

*L. Fuchs.*

**Schönberg, Mario: On the Grassmann and Clifford algebras.** I. Anais Acad. Brasil Ci. **28**, 11—19 (1956).

Article expositif sur des algèbres ayant des applications à la mécanique quantique. Soit  $E$  un espace vectoriel à dimension finie sur le corps  $K$  (réel ou complexe),  $E'$  son dual. L'A. considère pour la somme directe  $M = E + E'$  deux algèbres  $G$  et  $L$ . Si  $\xi = x + x'$  est l'élément général de  $M$ ,  $G$  est l'algèbre de Clifford associée à la forme quadratique  $\langle x, x' \rangle$ . Et  $L$  est l'algèbre quotient de l'algèbre tensorielle de  $M$  par l'idéal engendré par les éléments de la forme  $\xi \otimes \eta - \eta \otimes \xi - f(\xi, \eta)$ , où

$f(x, y)$  est la forme bilinéaire alternée  $\langle x, y' \rangle - \langle y, x' \rangle$ :  $L$  est à dimension infinie sur  $K$ . La restriction de  $G$  à  $E$ ,  $E'$  est l'algèbre extérieure de ces espaces; celle de  $L$  est l'algèbre symétrique. Un automorphisme  $u$  de  $E$  et son contragrédient  $u$  de  $E'$ , donnent un automorphisme de  $M$  qui s'étend à des automorphismes  $\sigma(u)$  de  $G$  et  $\tau(u)$  de  $L$ . On sait que  $\sigma(u)$  est toujours un automorphisme intérieur. L'A. affirme qu'il en est de même pour tout  $\tau(u)$ . A ce propos, le rapp. doit faire remarquer que cette propriété ne saurait être correcte que si l'on admet comme des éléments de  $L$  non seulement des polynômes formés avec les éléments générateurs mais aussi des séries, — Le travail, au moins dans cette première partie, ne contient aucune référence bibliographique.

*G. Ancochea.*

**Beyer, Gudrun: Über relativ-zyklische Erweiterungen galoisscher Körper.** J. reine angew. Math. **196**, 34—58 (1956).

Die vorliegende Arbeit bildet einen wesentlichen Beitrag zur Frage der Existenz abelscher Algebren mit vorgeschriebener Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers (Einbettungsproblem) im Sinne von H. Hasse (dies. Zbl. **32**, 255—259; **33**, 158; Bezeichnungen wie dort). Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Einbettungsproblems bildet die Existenz eines Verkettungssystems. Daß diese Bedingung auch hinreicht, bildet den Inhalt der von H. Hasse ausgesprochenen Vermutung (V). Wie Faddeev (dies. Zbl. **55**, 31) bemerkt hat, trifft (V) nicht immer zu. In der vorliegenden Arbeit wird für zyklische Algebren die Frage nach der Gültigkeit von (V) vollständig erledigt. Das ganze Problem kann auf den Fall reduziert werden, daß sowohl  $\mathfrak{A}$  als auch  $\mathfrak{g}$   $p$ -Gruppen sind. Mit  $\Gamma$  werde die durch  $\mathfrak{g}$  erzeugte Automorphismengruppe der Charaktergruppe von  $\mathfrak{A}$  bezeichnet. Das Hauptergebnis ist, daß (V) stets zutrifft, wenn  $\Gamma$  zyklisch ist, insbesondere also stets bei ungeradem  $p$ . Für  $p = 2$  können auch bizyklische Gruppen  $\Gamma$  auftreten. Für diesen Fall wird eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben, der das Verkettungssystem genügen muß, damit das Einbettungsproblem lösbar ist. Zur Herleitung der Ergebnisse wird für  $K$  eine Kummer-Erzeugung  $K = \Omega(\omega)$  zugrunde gelegt, wodurch die schwer zugänglichen Assoziativrelationen eliminiert werden und als Bestimmungsstücke nur der Potenzfaktor  $\omega^n = c$  und ein Verkettungssystem  $b_S$  ( $S \in \mathfrak{G}$ ) übrig bleiben. Eine genaue und recht komplizierte Untersuchung der zwischen diesen Größen bestehenden Beziehungen bildet das Hauptstück der Arbeit.

*R. Kochendörffer.*

**Beyer, Gudrun: Über eine Vermutung von Hasse zum Erweiterungsproblem galoisscher Zahlkörper.** J. reine angew. Math. **196**, 205—212 (1956).

Ihre im vorstehenden Referat besprochenen Untersuchungen zum Einbettungsproblem befreit die Verf. in dieser Arbeit von der Voraussetzung, daß der Körper  $\Omega$  die  $n$ -ten Einheitswurzeln enthält, und bringt sie mit gewissen lokalen Einbettungsproblemen in Zusammenhang. Zuerst wird bewiesen: Ist die Vermutung (V) für einen Gruppentypus  $\mathfrak{A}$  richtig, so gilt sie für den gleichen Gruppentypus auch ohne die Voraussetzung über die Einheitswurzeln. Zweitens wird dem ursprünglichen Einbettungsproblem  $\mathfrak{E}$  für jede Primstelle  $\mathfrak{p}$  von  $\Omega_0$  ein lokales Einbettungsproblem  $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}$  zugeordnet und bewiesen, daß es genau dann ein Verkettungssystem für  $\mathfrak{E}$  gibt, wenn für jedes  $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}$  ein solches existiert. Dieser Satz läuft im wesentlichen auf den bekannten Monodromiesatz für einfache Algebren hinaus. Der Zusammenhang zwischen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}$  ist folgender: Es sei  $K/\Omega_0$  eine Lösung von  $\mathfrak{E}$ . Mit  $\bar{\Omega}$  werde die perfekte Hülle von  $\Omega$  bei einer Fortsetzung  $\mathfrak{P}$  von  $\mathfrak{p}$  auf  $\Omega$  bezeichnet und mit  $\bar{\Omega}_0$  die darin enthaltene perfekte Hülle von  $\Omega_0$ . Die Algebra  $\bar{K}$ , die aus  $K/\Omega$  durch Grundkörpererweiterung auf  $\bar{\Omega}$  entsteht, ist über  $\bar{\Omega}$  galoissch mit der Gruppe  $\mathfrak{A}$ . Weiter ist auch  $\bar{K}/\bar{\Omega}_0$  galoissch mit einer Gruppe  $\bar{\mathfrak{G}}$ , die folgendermaßen beschrieben werden kann: Es sei  $\bar{\mathfrak{g}}$  die Zerlegungsgruppe von  $\mathfrak{P}$ , dann ist  $\bar{\mathfrak{G}}$  die zu  $\bar{\mathfrak{g}}$  gehörige Zwischengruppe zwischen  $\bar{\mathfrak{G}}$  und  $\mathfrak{A}$ . Die Algebra  $\bar{K}$  ist eine Lösung von  $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}}$ . — Schließlich



werden aus einem Satz von H. Richter (dies. Zbl. 14, 248) über die Unlösbarkeit gewisser Einbettungsprobleme weitere Gegenbeispiele zur Vermutung (V) hergeleitet.

*R. Kochendörffer.*

**Brown, William P.:** The semisimplicity of  $\omega_f^n$ . Ann. of. Math., II. Ser. 63, 324—335 (1956).

Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 70, 31). Es wird gezeigt: die von R. Brauer (dies. Zbl. 17, 391) eingeführte, für die Darstellung der orthogonalen Gruppe  $O(n)$  durch Tensoren  $f$ -ter Stufe bedeutungsvolle Algebra  $\omega_f^n$  ist dann und nur dann halbeinfach, wenn  $n \geq f - 1$  ist.

*M. Eichler.*

**Rosenberg, Alex and Daniel Zelinsky:** Cohomology of infinite algebras. Trans. Amer. math. Soc. 82, 85—98 (1956).

Let  $A$  be an algebra over a commutative field  $F$ . In terms of the Hochschild cohomology groups of  $A$ , the dimension of  $A$  ( $F$ -dim  $A$ , or  $\dim A$ ) is the largest  $n$  such that for some two-sided  $A$ -module  $N$ , the  $n^{\text{th}}$  cohomology group  $H^n(A, N) \neq 0$ . In this context when  $A$  is separable and of finite order, the classical Wedderburn Principal Theorem can be restated as:  $\dim A < 2$ ; and the Mal'cev Uniqueness Theorem takes the form:  $\dim A < 1$ . Using both the general approach to cohomology theory of H. Cartan and S. Eilenberg, Cohomological Algebra (Princeton 1956) and the more special approach of Hochschild [Ann of Math., II. Ser. 46, 310—319 (1945)], the authors consider here various necessary and or sufficient conditions that certain algebras should have dimension  $n$ . Assertions obtained of the type  $n < 2$ , or  $n < 1$ , can in the light of the foregoing remark be interpreted as generalisations of the Wedderburn, and Mal'cev, Theorems to more general residue class algebras. The following results are proved. 1. If  $A$  has infinite order then  $\dim A \neq 0$ ; thus since Hochschild (loc. cit.) has shown that for algebras of finite order  $\dim A = 0$  is equivalent to separability,  $\dim A = 0$  if and only if  $A$  is separable and of finite order. 2. In certain cases  $N$  may be taken to be  $A \otimes A$ ; thus if  $A$  is a locally finite semisimple algebra with minimum condition and order  $\aleph_0$ , then  $H^1(A, A \otimes A) \neq 0$ , and the same is again true if  $A$  is the union of a countably infinite tower  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  of simple sub-algebras of finite order. 3. If  $A$  has order  $\aleph_0$  and is locally separable,  $\dim A = 1$  [notice that if  $A$  is semi-simple and of finite order,  $H^1(A, A \otimes A) = 0$ ]. Denumerability is essential here and it is conjectured that, at least in case  $A$  is a field, non-denumerability implies  $\dim A > 1$ . 4. There is „sub-additivity“ of dimension; thus if  $A$  is an algebra over  $K$ ,  $K \supset F$  then  $F\text{-dim } K \leq F\text{-dim } A \leq F\text{-dim } K + K\text{-dim } A$ . Counterexamples prove that dimension is not additive, though of course it is additive in case  $F$  is a commutative ring and  $A$  the polynomial ring in  $n$  indeterminates over  $F$  (when  $F\text{-dim } A = n$ ) or again when  $F$  is a field and  $A$  is the field of rational functions in  $n$  indeterminates over  $F$ , where  $F\text{-dim } A$  also equals  $n$ . 5. If  $A$  is a field of transcendence degree  $n \leq \infty$  over  $F$  then  $\dim A \geq n$ , whereas if its degree  $n < \infty$ ,  $\dim A = n$  if and only if  $A$  is a finite separable algebraic extension of a rational function field. 6. If  $A$  is a finitely generated extension field of  $F$  with no separable generation over  $F$ , then  $\dim A = \infty$ . 7. If  $A$  is an extension field of transcendence degree  $n$  over  $F$ , which is countably but not finitely generated, then  $\dim A = n + 1$  or  $\infty$  according as  $A$  is or is not locally separably generated, i. e. in case every finite subset of  $A$  can or cannot be imbedded in a finitely separably generated extension of  $F$ .

*W. H. Cockcroft.*

**Hochschild, G.:** Relative homological algebra. Trans. Amer. math. Soc. 82, 246—269 (1956).

The author sketches the general features of relative Tor and Ext functors which are exactly analogous to the Tor and Ext functors of Cartan-Eilenberg (Homological Algebra, Princeton 1956), but which are applicable to a module theory which is relativised with respect to a subring of the ring of operators. Thus, given a ring  $R$  with a unit element 1 and a subring  $S$  of  $R$  which contains 1, an  $(R, S)$  exact sequence

$t_i: M_i \rightarrow M_{i-1}$ , of  $R$  modules and  $R$ -homomorphisms, is an exact sequence such that for each  $i$  the kernel of  $t_i$  is a direct  $S$ -module summand of  $M_i$  (any  $R$ -module is to be regarded in a natural way as an  $S$ -module).  $(R, S)$ -projective and injective modules are defined in the obvious way, as also are  $(R, S)$ -projective and injective resolutions of  $R$ -modules. If  $A$  is a right  $R$ -module and  $B$  a left  $R$ -module, complexes  $X$  and  $Y$  are associated with „standard“  $(R, S)$ -projective resolutions of  $A$  and  $B$  respectively, and  $\text{Tor}_n^{(R, S)}(A, B)$  is defined to be  $H_n(X \otimes_R Y)$ . The functor  $\text{Ext}_{(R, S)}^n(A, B)$  is defined in a dual fashion. Applications of the functors are illustrated by giving firstly a relative cohomology theory of rings and algebras in which a relative dimension theory is briefly studied, and secondly a relative homology and cohomology theory for groups (these last coincide with the relative groups introduced by Adamson, this Zbl. 57, 254). The usual theory for finite groups breaks down, in that examples show differences between positive dimensional relative homology groups and negative dimensional relative cohomology groups. An elementary interpretation of the second relative cohomology groups of any pair of groups is however possible in the usual way in the context of group extension theory. Thirdly an application is given involving a relative cohomology theory for Lie algebras  $L$  and subalgebras  $K$  of  $L$ . The relative cohomology groups so obtained are not known to coincide in general with the relative groups of Chevalley-Eilenberg (this Zbl. 31, 248), but do so in case the base field is of zero characteristic and  $L$  is semisimple as a  $K$ -module. Finally the results on the reduction of relative cohomology groups of groups to ordinary cohomology groups of factor groups, and the analogous results on Lie algebras relative to ideals are absorbed into a more general result concerning certain  $(R, S)$ -projective resolutions. *W. H. Cockcroft.*

**Cohn, Richard M.:** An invariant of difference field extensions. *Proc. Amer. math. Soc.* 7, 656—661 (1956).

Verf. knüpft an vorangehende Untersuchungen über Differenzkörper und ihre Erweiterungen (dies. Zbl. 31, 304; 33, 179; 37, 66; 46, 38, 258) an und definiert eine neue numerische Invariante.  $\mathfrak{F}$  sei ein Differenzkörper und  $\mathfrak{G}$  eine transformationsalgebraische Erweiterung von  $\mathfrak{F}$ . Der Grenzgrad von  $\mathfrak{G}$  über  $\mathfrak{F}$  wird dann in zwei Schritten definiert: 1.  $\mathfrak{G}$  sei endlich erzeugbar über  $\mathfrak{F}$ , etwa  $\mathfrak{G} = \mathfrak{F} \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle$ . Dann bedeute  $S_k$  die Menge aller  $\alpha_i$  und ihrer ersten  $k$  Transformierten. In der nicht wachsenden Folge der Körpergrade  $d_k = (\mathfrak{F}(S_{k-1}) : \mathfrak{F}(S_k))$  sind schließlich alle Glieder endliche Zahlen. Ihr Minimum ist unabhängig von der speziellen Erzeugung des Differenzkörpers  $\mathfrak{G}$  und heißt der Grenzgrad von  $\mathfrak{G}$  über  $\mathfrak{F}$ . 2. Im allgemeinen Fall wird der Grenzgrad von  $\mathfrak{G}$  über  $\mathfrak{F}$  als das Maximum aller Grenzgrade von über  $\mathfrak{F}$  endlich erzeugbaren Untererweiterungen von  $\mathfrak{G}$  bzw. als  $\infty$  definiert. Diese Festsetzung ist mit Fall 1 verträglich. Für die Grenzgrade sukzessiver Erweiterungen wird ein Multiplikationssatz bewiesen. Es folgen Anwendungen auf Ideale und Differenzpolynome. *H.-J. Kowalsky.*

**Numakura, Katsumi:** Theory of compact rings. II. *Math. J. Okayama Univ.* 5, 103—113 (1956).

(Teil I, dies. Zbl. 65, 267.) Verf. behandelt die Struktur gewisser kompakter Ringe, die in der Theorie der topologischen Ringe eine ähnliche Rolle spielen, wie die halb-primären Ringe in der Theorie der abstrakten Ringe. (Ein Ring  $R$  heißt halb-primär, wenn sein Radikal  $N$  algebraisch nilpotent ist und wenn  $R/N$  ein halbeinfacher Ring ist.) —  $R$  sei ein kompakter Ring mit Einselement. Verf. zeigt, daß dann folgende vier Eigenschaften äquivalent sind: (1)  $R$  ist vollständige direkte Summe von kompakten primären Ringen; (2) das Produkt von je zwei maximalen offenen Primidealen ist kommutativ; (3) definiert man für jedes maximale offene Primideal  $\mathfrak{p}$  das Ideal  $q_{\mathfrak{p}}$  durch  $q_{\mathfrak{p}} = \bigcap \mathfrak{p}^n$ , so folgt  $q_{\mathfrak{p}} q_{\mathfrak{p}'} = q_{\mathfrak{p}'} q_{\mathfrak{p}}$ ; (4) jedes Ideal  $\mathfrak{a}$  von  $R$  mit  $\mathfrak{a} = \overline{\mathfrak{a}^2}$  besitzt, aufgefaßt als Ring, ein Einselement. Es sei weiter  $R$  ein



kompakter, vollständig-primärer Ring mit dem (Jacobson'schen) Radikal  $\mathfrak{p}$  [d. h.  $R$  besitzt ein Einselement und  $R/\mathfrak{p}$  ist ein (Schief-) Körper]. Verf. beweist, daß dann folgende Eigenschaften gleichwertig sind: (1)  $R$  ist ein Hauptideal-Ring, d. h. jedes Links- (Rechts-) Ideal besitzt die Form  $Ra$  (bzw.  $aR$ ) und jedes zweiseitige Ideal die Form  $Ra = aR$ ; (2)  $\mathfrak{p}$  ist ein Links- und Rechts-Hauptideal; (3) es gibt kein einseitiges Ideal echt zwischen  $\mathfrak{p}$  und  $\mathfrak{p}^2$ ; (4) die Potenzen von  $\mathfrak{p}$  sind die einzigen eigentlichen einseitigen Ideale von  $R$ . Weiter sind hiermit noch diejenigen Eigenschaften gleichwertig, die man erhält, wenn man (1)–(4) ausschließlich für Links-Ideale (oder entsprechend für Rechts-Ideale) formuliert. Besitzt  $R$  diese Eigenschaften, so ist  $R$  ein endlicher Körper, ein endlicher vollständig primärer „uni-serial“ Ring oder eine maximale kompakte offene Ordnung eines total unzusammenhängenden lokal-kompakten (Schief-) Körpers entsprechend den Fällen  $\mathfrak{p} = 0$ ,  $\mathfrak{p}^m = 0$  für ein  $m > 1$  und  $\mathfrak{p}^n \neq 0$  für alle  $n$ . Ähnliche Äquivalenzbeweise werden sodann für kompakte primäre Ringe hergeleitet, die dann zu einem entsprechenden Struktursatz führen: Jeder kompakte primäre Ring, der gleichzeitig ein Hauptideal-Ring ist oder eine dazu äquivalente Eigenschaft besitzt, ist ein Matrizenring über einem Ring der vorher geschilderten Art, wobei wieder die Fälle  $\mathfrak{p} = 0$ ,  $\mathfrak{p}^m = 0$  und  $\mathfrak{p}^n \neq 0$  für alle  $n$  zu unterscheiden sind. In dem letzten Paragraphen wird schließlich auf ganz analoge Weise allgemein die Struktur kompakter Ringe untersucht, die noch gewisse zusätzliche Eigenschaften besitzen. *H.-J. Kowalsky.*

### Zahlentheorie:

● **Niven, Ivan: Irrational numbers.** (The Carus Mathematical Monographs, Nr. 11). New York: John Wiley and Sons, Inc.. Publ. by The Mathematical Association of America 1956. XII+164 Seiten, 1 Figur.

Ein klar geschriebenes Büchlein, das trotz leichter Lesbarkeit bis zur vollen Erledigung schwieriger Fragen vordringt. Alle über das Elementarste hinausgehenden Vorkenntnisse findet man jeweils da, wo sie gebraucht werden, in klar formulierten Hilfssätzen ausgebreitet und teils mit Beweis, teils mit genauer Angabe von Lehrbuchstellen versehen. Inhalt der zehn Kapitel: I. Die Begriffe abzählbar und überall dicht; systematische Brüche und Cantorsche Reihen. II. Irrationalität der trigonometrischen Funktionen für rationale Argumente außer 0; Transzendenz von  $e$ . III. Nachweis, daß die trigonometrischen Funktionen für Argumente der Form  $r\pi$ , wo  $r$  rational, algebraische Zahlen sind. IV–VI. Approximation durch rationale Zahlen. Hier wird mit dem Schubladenprinzip (auch mehrdimensional für Simultanapproximation) und mit Kettenbrüchen gearbeitet. Auch die Gleichverteilung modulo 1 wird im Eindimensionalen bewiesen, ohne und mit Exponentialfunktion. VII. Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen, weiteres über Approximation durch rationale. Transzendente, speziell Liouvillesche Zahlen. VIII. Normale Zahlen; das sind solche, bei deren Darstellung als Dezimalbruch (oder auch  $r$ -albruch) jede Ziffer gleiche Dichte ( $1/10$ ,  $1/r$ ) hat und für jedes  $n$  auch jeder Block von  $n$  Ziffern gleiche Dichte ( $1/10^n$ ,  $1/r^n$ ) hat. Es wird gezeigt, daß fast alle Zahlen für jede Basis  $r$  normal sind. Es ist aber von keiner speziellen Zahl, wie etwa  $\sqrt{2}$  oder  $e$ , bekannt, ob sie normal ist; doch wird ein Beispiel einer im Dezimalsystem normalen Zahl gegeben. IX. Der allgemeine Lindemannsche Satz. X. Das Gelfond-Schneider-Theorem, das ist der Satz: Wenn  $\alpha, \beta$  algebraisch sind (nicht notwendig reell), und zwar  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha \neq 1$  und  $\beta$  nicht rational, dann ist jeder Wert von  $\alpha^\beta$  transzendent. *O. Perron.*

**Browkin, Georges et André Schinzel: Sur les nombres de Mersenne qui sont triangulaires.** C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 1780–1781 (1956).

Es wird gezeigt, daß genau die Zahlen 1, 3, 15 und 4095 sowohl Mersennesche Zahlen  $M_n = 2^n - 1$  als auch Dreieckszahlen  $t_k = \frac{1}{2}k(k+1)$  sind. Das Resultat

wird aus den Eigenschaften der Körper  $K(\sqrt{-7})$  und der Theorie der Kongruenzen gewonnen.  
B. Stoll.

Larras, Jean: Sur la primarité des nombres de Fermat. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 2203—2204 (1956).

Wenn die  $m$ -te Fermatsche Zahl  $F_m = 2^{2^m} + 1$  einen Primteiler besitzt, ist dieser bekanntlich von der Form  $K \cdot 2^{m+1} + 1$ , und zwar mit geradem  $K$ . (Vgl. etwa E. Trost, Primzahlen, Basel 1953, S. 39.) Daß  $K \equiv 0 \pmod{2}$  lange bekannt ist, ist dem Verf. offenbar entgangen, denn er bringt für diese Tatsache einen Beweis, der sich nur unwesentlich von dem bekannten unterscheidet. Wie man mit Hilfe dieser Tatsache die Untersuchung des Primzahlcharakters von Fermatschen Zahlen schneller durchführen kann, wird am Beispiel der Zahl  $F_{14}$ , allerdings ohne abschließendes Ergebnis, aufgezeigt.  
B. Schoeneberg.

Mills, W. H.: Certain diophantine equations linear in one unknown. Canadian J. Math. 8, 5—12 (1956).

The author gives the complete solution of the diophantine equation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = z(pxy + qx + ry + s),$$

where  $a, b, c, d, e, f, p, q, r$  and  $s$  are integers and  $a \mid (b, d, p, q)$ ,  $c \mid (b, e, p, r)$ . This generalizes previous results of several workers, especially those due to K. Goldberg, M. Newman, E. G. Straus and J. D. Swift (this Zbl. 55, 41) and the author (this Zbl. 50, 36; 55, 271). The main idea in the procedure goes back to A. Hurwitz [Math. Werke, Bd. II (this Zbl. 7, 195), p. 410—421]. In the bibliography ought to be mentioned a paper due to Ernst Jacobsthal (this Zbl. 20, 292).  
W. Ljunggren.

Hampel, R.: On the solution in natural numbers of the equation  $x^m - y^n = 1$ . Ann. Polon. math. 3, 1—4 (1956).

Auf elementare Art wird gezeigt, daß die schon wiederholt (z. B. Cassels, dies. Zbl. 50, 37) behandelte Gleichung  $x^m - y^n = 1$  für den Spezialfall  $|x - y| = 1$  außer  $9 - 8 = 1$  keine Lösung hat. Dies wurde bereits in einer Arbeit von Obláth (dies. Zbl. 55, 36) als bisher unveröffentlichter Satz des Verf. erwähnt. Der Beweis ist etwas weitschweifend; zum Schluß ergibt sich aus dem Satz sehr leicht die Verallgemeinerung  $|n^{x+s} - (n+1)^x| \geq \max(5, n+2)$ .  
A. Aigner.

Schinzel, A.: Sur l'équation  $x^z - y^t = 1$ , où  $|x - y| = 1$ . Ann. Polon. math. 3, 5—6 (1956).

Hier wird zum Satz in vorstehend referierter Arbeit ein wesentlich kürzerer Beweis gebracht. Er verwendet die Darstellung der Zahl  $y + 1$  durch eine Primitivwurzel mod  $p^n$  für  $p \nmid y$ , sowie zum Ausschluß einiger Fälle einen Satz von Hausmann (1941), daß  $2^m \pm 1$  für  $m > 3$  niemals die Potenz einer ganzen Zahl wird.  
A. Aigner.

Rotkiewicz, A.: Sur l'équation  $x^z - y^t = a^t$ , où  $|x - y| = a$ . Ann. Polon. math. 3, 7—8 (1956).

Gestützt auf den Satz von Birkhoff und Vandiver, daß  $a^n - b^n$  mit  $(a, b) = 1$  und  $n > 2$  außer  $2^8 - 1$  stets einen primitiven Primteiler enthält, wird das Ergebnis der beiden vorstehend referierten Arbeiten dahin verallgemeinert, daß auch die Gleichung  $x^z - y^t = a^t$  mit  $|x - y| = a$  und  $(x, y) = 1$  bis auf den Fall  $9 - 8 = 1$  unmöglich ist.  
A. Aigner.

Carlitz, L. and H. H. Corson: Some special equations on a finite field. Monatsh. Math. 60, 114—122 (1956).

Let  $N = N(a_1, \dots, a_r)$  denote the number of solutions of  $a_1 x^{n_1} + \dots + a_r x^{n_r} = c$  in the finite field  $GF(q)$ ,  $q = p^n$ . Let  $A$  denote the average of  $N$  for fixed  $c$  and fixed  $m_i$ . In this paper, the authors study the sum  $\sum \{N(a_1, \dots, a_r) - A\}^2$ , where the summation is taken over all non-zero  $a_i$ . In case  $c = 0$ , discussions on the  $N(a_1, \dots, a_r)$  are given for some special values of  $m_i$ .  
M.-I. Yüh.



**Carlitz, L.:** The coefficients of  $\sinh x/\sin x$ . *Math. Mag.* **29**, 193—197 (1956).

Verf. untersucht Teilbarkeitseigenschaften der Koeffizienten  $\beta_{2m}$  der Entwicklung  $\frac{\sinh x}{\sin x} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$ ; z. B. bestehen die Nenner von  $\beta_{2m}$  nur aus Primfaktoren  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . Ferner werden noch Relationen mod  $p^r$  hergeleitet, wenn  $r$  durch  $p^r | 2m + 1$ ,  $p^{r+1} \nmid 2m + 1$  erklärt ist.

H. Ostmann.

**Smiley, M. F.:** On the zeros of a cubic recurrence. *Amer. math. Monthly* **63**, 171—172 (1956).

Let  $f(z) = z^r + a_1 z^{r-1} + \dots + a_r$  be a polynomial with real or complex coefficients, and let  $\{T_n\}$  where  $T_{n+r} + a_1 T_{n+r-1} + \dots + a_r T_n = 0$  be a recursive sequence such that  $T_0, T_1, \dots, T_{r-1}$  do not all vanish. By a theorem proved in the most general form by Chr. Lech (this Zbl. **51**, 278), at most finitely many  $T_n$  can vanish if the quotient of no two distinct roots of  $f(z) = 0$  is a root of unity. One may conjecture that there is then an upper bound depending only on  $r$  for the number of vanishing terms  $T_n$ . The author gives an elementary proof that at most three  $T_n$  can be zero if  $r = 3$  and all roots of  $f(z) = 0$  are  $\neq 0$ , real, and of distinct absolute value. — See also Morgan Ward, this Zbl. **64**, 40.

K. Mahler.

**Mitrinovich, Dragoslav S.:** Problème sur les progressions arithmétiques. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. **11**, 256—257 (1956).

**Postnikov, A. G.:** Additive problems with a growing number of addends. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **108**, 392 (1956) [Russisch].

Suppose  $n$  and  $p$  are positive integers with  $np \leq K^n$ , where  $K$  is a certain (unspecified) positive constant. The author states an approximate formula for the number of solutions of the diophantine equation  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = N$  in non-negative integers  $x_1, \dots, x_n$  not exceeding  $p$ , with error  $O((p+1)^{n-1}/n)$  uniformly in  $N$ . He also gives a similar formula for squares and states that both formulas follow from probability theory.

P. T. Bateman.

**Val'fiš (Valfisz), A. Z.:** On the representation of numbers by sums of squares. Asymptotic formulas. *Amer. math. Soc., Translat.*, II. Ser. **3**, 163—248 (1956).

Vgl. die Besprechung des russ. Originals dies. Zbl. **48**, 275.

**Ricci, Giovanni:** Aritmetica additiva. Aspetti e problemi. *Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari* **7**, 30 p. (1956).

Verf. gibt einen Bericht über die gegenwärtige Lage innerhalb der additiven Zahlentheorie unter besonderer Berücksichtigung des auf Schnirelmann zurückgehenden dichtentheoretischen Gesichtspunktes.

H. Ostmann.

**Kasch, Friedrich:** Abschätzung der Dichte von Summenmengen. II. *Math. Z.* **64**, 243—257 (1956).

Verf. vertieft seine im ersten Teil (s. dies. Zbl. **66**, 31) durchgeführten Überlegungen hinsichtlich der Abschätzungen für die Dichte (bzw. asymptotische Dichte) der Summe  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ , worin die Dichte  $\alpha$  von  $\mathfrak{A}$  (bzw. die asymptotische Dichte  $\alpha^*$ ) gegeben sei und  $\mathfrak{B}$  eine Basis der mittleren (bzw. asymptotischen mittleren) Ordnung  $\lambda$  (bzw.  $\lambda^*$ ) darstellt. Durch Einführung zweier Mengen  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{Q}$  mit  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ , die die Rolle von Parametern spielen, gelangt Verf. zu neuen Abschätzungen. Die Spezialisierung  $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{A}$  ergibt die Resultate seines oben zitierten ersten Teils. Hier werden nun die Spezialisierungen  $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{Q} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  behandelt. Im ersten Spezialfall gilt ( $\gamma$  = Dichte von  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ): (1)

$$\gamma > \alpha \left( 1 + c_3(\alpha, \lambda) \frac{1 - \alpha}{\lambda} \right), c_3(\alpha, \lambda) = c_1(\alpha) \frac{\lambda}{\lambda - 1 + (1 + \alpha)\sqrt{\alpha}}, c_1(\alpha) = \frac{1 + \sqrt{\alpha} + \alpha}{(1 + \sqrt{\alpha})^2},$$

bzw. für die asymptotischen Dichten:

$$(2) \quad \gamma^* \geq \alpha^* (1 + c_3(\alpha^*, \lambda^*) (1 - \alpha^*)/\lambda^*) \quad \text{für } \lambda^* \geq \frac{3}{2}.$$

Setzt man  $c_4(x, y) = c_0(x) y / [y - c_0(x) \{1 - 2x - \nu(x, y)\}]$ ,  $c_0(x) = c_1(\sigma(x, y))$ ,

$$\sigma(x, y) = x [1 + c_1(x) (1 - x) / (y - c_1(x))],$$

$$\nu(x, y) = \{ \sqrt{(y - (1 - 2x) c_0(x))^2 + 4x(1 - x) c_0^2(x)} - (y - (1 - 2x) c_0(x)) \} / 2 c_0(x),$$

so gelten (1) und (2) auch mit  $c_4(x, y)$  an Stelle von  $c_3(x, y)$  (bez. (2) sogar mit dem „ $>$ “-Zeichen). Man erkennt leicht  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} c_3(\alpha, \lambda) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} c_4(\alpha, \lambda) = \lambda / (\lambda - 1) > 1$ ,

so daß die auf Erdős zurückgehende Vermutung  $\gamma \geq \alpha(1 + (1 - \alpha)/\lambda)$  in einem von  $\lambda$  abhängigen  $\alpha$ -Intervall  $(0, \alpha^2)$  sogar übertroffen wird. Abschließend wird noch die Problemstellung auf  $n$ -dimensionale Gitterpunktmengen mit Punkten nichtnegativer ganzer Koordinaten übertragen und der entsprechende Fall  $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{U}$  behandelt. Es wird  $\gamma \geq \alpha(1 + (1 - 2^{n-1}\alpha)/2^n\lambda)$  bewiesen, was im Fall  $n = 1$  in eine ältere Abschätzung übergeht. Hierin ist  $\alpha = \min_{x \in \mathfrak{N}} \frac{A(x)}{N(x)} \mathfrak{N}$  die Menge aller Gitter-

punkte  $\neq (0, 0, \dots, 0)$  des ersten Quadranten. Die Anzahlfunktionen zählen die Gitterpunkte  $\neq (0, 0, \dots, 0)$  in dem durch  $\mathfrak{x}$  definierten  $n$ -dimensionalen Quader.

H. Ostmann.

**Dutta, Mahadeb:** On new partition of numbers. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 25, 138—143 (1956).

Mit  ${}_d p(n)$  bezeichnet Verf. die Anzahl aller Partitionen von  $n$  mit der Einschränkung, daß sich jeder Summand höchstens  $d$ -mal wiederholen darf. Als erzeugende Funktion ergibt sich nach bekannten Methoden sofort

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_d p(n) x^n = \prod_n (1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{dn}) = \sum_n p(n) x^n \Big/ \sum_n p(n) x^{(d+1)n},$$

wobei  $p(n)$  die Partitionsanzahl schlechthin bedeutet.  ${}_d p(n)$  erhält man hieraus durch Koeffizientenvergleich:  ${}_d p(n) = p(n)$  für  $n < d + 1$ ;  ${}_d p(n) = p(n) - p(1)p(n - d - 1)$  für  $d + 1 \leq n < 2(d + 1)$  usw. intervallweise. Unter Heranziehung eines bekannten Taubersatzes gewinnt Verf. noch (\*):  $\log {}_d p(n) \sim \pi \sqrt{\frac{2}{3} d(d + 1)^{-1} n}$ . Fälschlicherweise zieht Verf. hieraus den Schluß:  ${}_d p(n) \sim \exp(\pi \sqrt{\frac{2}{3} d(d + 1)^{-1} n})$ , was bereits in dem bekannten Spezialfall  $d = 1$  (d. h. paarweise verschiedene Summanden) nicht richtig ist, da dann  ${}_1 p(n) \sim 4^{-1} 3^{-1/4} n^{-3/4} \exp \pi \sqrt{\frac{1}{3} n}$  gilt. Ohne Beweis wird in (\*) noch der Grenzübergang  $d \rightarrow \infty$  gemacht, um die entsprechende Formel für  $\log p(n)$  zu gewinnen. Unangenehmerweise wird in der Rechnung das Gleichheitszeichen auch in der Bedeutung der asymptotischen Gleichheit „ $\sim$ “ verwendet.

H. Ostmann.

**Obláth, Richard:** Sur la répartition des nombres sans diviseur quadratique. Publ. math., Debrecen 4, 131—134 (1956).

Der Verf. beweist folgendes Theorem: Es seien in der natürlichen Zahlenreihe die  $n$  ersten Intervalle von der Länge  $x$  gegeben. Es sei weiter  $n = O(x)$ . Dann ist die Dichte der quadratfreien Zahlen in jedem Intervall asymptotisch gleichmäßig und gleich  $6x/\pi^2$ . Der Beweis folgt in einfacher Weise aus  $Q(x) = (6/\pi^2)x + o(\sqrt{x})$ , wo  $Q(x)$  die Anzahl der quadratfreien Zahlen  $\leq x$  ist. Unter Annahme der Riemannschen Hypothese wird gezeigt, daß der Satz auch richtig ist, wenn  $n = O(x^{3/2-\mu})$  ist, wo  $\mu$  eine feste kleine positive Größe ist. Durch eine Verallgemeinerung erreicht der Verf. ähnliche Resultate für die  $k$ -potenzfreien Zahlen.

S. Selberg.

**Selberg, Sigmund:** Über eine Vermutung von P. Turán. Norske Vid. Selsk. Forhandl. 29, Nr. 8, 3 S. (1956).

Suppose  $L(n) = \sum_{m=1}^n \frac{\lambda(m)}{m}$  and  $H(n) = \sum_{m=1}^n L(m)$ , where  $\lambda$  denotes the

Liouville function. Turán (this Zbl. 31, 302) has conjectured that  $L(n) > 0$  for every positive integer  $n$ . Under assumption of Turán's conjecture the present author proves by an elementary argument that  $\frac{2}{3} n^{1/2} - 1 < H(n) < 10 n^{1/2}$  for every



positive integer  $n$ . Since

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} H(n) (s-1) s \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{(n+x+y)^{s+1}}$$

if the real part of  $s$  is large enough, the author's inequalities give another proof of the known fact that Turán's conjecture implies the Riemann hypothesis. [The usual proof is based on Satz 454 of Landau's *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Leipzig 1927. See also a paper of the reviewer and Chowla (this Zbl. 55, 275).]

*P. T. Bateman.*

**Grosswald, Emil:** The average order of an arithmetic function. *Duke math. J.* **23**, 41—44 (1956).

Let  $F(n)$  denote the number of all prime divisors of  $n$ , distinct or not. The author proves that

$$\sum_{n \leq x, 2 \nmid n} 2^{F(n)} = c_2 x \log x - c_5 x + O(x^c),$$

where  $c_2$  and  $c_5$  are constants and  $c < 0,84$ . In the proof, he uses the property that  $\zeta(s) = O(|t|^{1/2(L-1)+\varepsilon})$  holds uniformly for  $\sigma \geq 1 - l/2(L-1)$  and any  $\varepsilon > 0$ , where  $l$  is an integer  $\geq 3$  and  $L = 2^{l-1}$ . For nonintegral value  $l$  (as the author uses  $l = 3,54 \dots$ ), the previous result needs a proof.

*L. K. Hua.*

**Barnes, E. S.:** The inhomogeneous minimum of a ternary quadratic form. II. *Acta math.* **96**, 67—97 (1956).

The author shows that the inhomogeneous minimum of an indefinite ternary quadratic form of determinant  $D$  is at most  $(\frac{1}{4}D)^{1/3}$  except for forms equivalent to multiples of two given forms. This strengthens the result of a previous paper by replacing  $(\frac{4}{15}D)^{1/3}$  by  $(\frac{1}{4}D)^{1/3}$  (E. S. Barnes, this Zbl. 56, 272). The improvement calls for an elaborate proof using the method of the divided cell (see e.g. E. S. Barnes and H. P. F. Swinnerton-Dyer, this Zbl. 56, 273) and involving some detailed computation. The author remarks that new techniques are apparently needed to get past  $(\frac{1}{4}D)^{1/3}$ , which is the best possible result for forms which represent zero (H. Davenport, this Zbl. 30, 297).

*J. W. S. Cassels.*

**Linnik, Ju. (Yu). V. and A. V. Malyšev:** Applications of the arithmetic of quaternions to the theory of ternary quadratic forms and to the decomposition of numbers into cubes. *Amer. math. Soc., Translat., II. Ser.* **3**, 91—162 (1956).

Vgl. die Besprechung des russ. Originals dies. Zbl. 53, 221.

**Hejtmánek, Johann:** Über eine Klasseneinteilung der Sternkörper. *Monatsh. Math.* **60**, 11—20 (1956).

To each star body  $S$  in  $n$ -dimensional space  $R_n$  is assigned the integer  $k = k(S) \leq +\infty$ , defined to be the maximum number of pairs  $\pm x$  of points of a critical lattice lying on the boundary of  $S$ . On the assumption (which is true for  $n = 2, 3$  or  $4$ ) that there is a star body in  $R_n$ , which is fully automorphic and fully reducible, it is shown that, for each non-negative integral value of  $h$ , there is a star body  $S$  in  $R_n$  with  $k(S) = h$ .

*C. A. Rogers.*

**Schmidt, W.:** Eine neue Abschätzung der kritischen Determinante von Sternkörpern. *Monatsh. Math.* **60**, 1—10 (1956).

Let  $S$  be a bounded  $n$ -dimensional star-body with the origin as centre. Minkowski stated and E. Hlawka (see this Zbl. 28, 206) proved that the ratio  $Q(S) = V(S)/\Delta(S)$  of the volume  $V(S)$  of  $S$  to its critical determinant satisfies  $Q(S) \geq 2\zeta(n)$ . The author uses a technique, developed for another purpose (see this Zbl. 66, 292), to obtain an improved lower bound for  $Q(S)$  and to show in particular that

$$Q(S) \geq 3(1 + 2(\frac{1}{2})^n)^{-1} \zeta(n), \quad Q(S) \geq \frac{10}{3}(1 + 2(\frac{1}{2})^n + 7(\frac{1}{3})^n)^{-1} \zeta(n),$$

and that  $Q(S) > 3.418 \dots$  for  $n$  sufficiently large. These bounds are rather better

than those obtained independently by reviewer about the same time (this Zbl. 66, 36). More recently both author and reviewer have obtained further improvements.

C. A. Rogers.

Schmidt, Wolfgang: Eine Verschärfung des Satzes von Minkowski-Hlawka. Monatsh. Math. 60, 110—113 (1956).

Let  $S$  be an  $n$ -dimensional Jordan-measurable set. E. Hlawka, in the paper referred to in the above review, proved that the quotient  $Q(S)$  defined there satisfies  $Q(S) \geq 1$ . The author gives a concise proof (which is best read in conjunction with the papers of the author referred to above) of the inequality  $Q(S) \geq 2(1 + 2(\frac{1}{2})^n)^{-1} \cdot (1 + 3(\frac{1}{3})^n)^{-1}$ .

C. A. Rogers.

Descombes, Roger: Sur un problème d'approximation diophantienne. I, II. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 1669—1672, 1782—1784 (1956).

These notes report far-reaching extensions of work of the reviewer (this Zbl. 55, 44) on  $c(\xi, \eta) = \limsup \{v | v\xi - u - \eta\}^{-1}$  where  $\xi, \eta$  are given real numbers,  $v$  runs through all positive integers and  $u$  through all integers. The author first generalizes and systematizes the reviewer's algorithm and shows that the particular values of  $u, v$  used in constructing the algorithm for given  $\xi, \eta$  are sufficient to determine  $c(\xi, \eta)$  completely in the same way as  $\limsup \{q | q\xi - p\}^{-1}$  is determined completely by the values when  $p/q$  is a convergent to  $\xi$ . The author then states with an outline of the proof that if  $\xi$  is irrational and

$$c(\xi, \eta) < \gamma = 366795/[773868 - 28547(510)^{1/2}] \doteq 2,8392788$$

then the pair  $\xi, \eta$  is equivalent in an appropriate sense to one of a denumerable set which is given explicitly; and for these the value of  $c(\xi, \eta)$  is given. There are innumerable many inequivalent pairs for which  $c(\xi, \eta) = \gamma$ . J. W. S. Cassels.

Vinogradov, I. M.: Ein besonderer Fall der Abschätzungen von trigonometrischen Summen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 20, 289—302 (1956) [Russian].

The following results are proved: Let  $f(x) = A_n x^n + \dots + A_1 x$  be a polynomial with real coefficients of degree  $n \geq 12$  and  $\nu = 1/n$ . Each of  $A_n, \dots, A_1$  can be expressed as  $A_s = a_s/q_s + \theta_s/q_s \tau_s$ , where  $(a_s, q_s) = 1$ ,  $0 < q_s \leq \tau_s$  and  $|\theta_s| \leq 1$  with  $\tau_1 = P^{1/3}$  and  $\tau_s = p^{s-1/3+\nu/3}$  for  $s > 1$ . Let  $Q$  be the least common multiple of  $q_n, \dots, q_2$  and  $Q_1$  be that of  $q_n, \dots, q_1$ . Let  $S_m = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m f(x)}$ . Then 1. In case  $Q \geq P^{1/3-\nu/3}$ , for any integer  $m$  satisfying  $0 < m \leq P^{0,05\nu(1/3-\nu/3)}$  we have  $S_m \ll P^{1-\epsilon}$ ,  $\epsilon = 1/10 n^2 \log 40 n^2$ ; 2. In case  $Q < P^{1/3-\nu/3}$  for  $Q_1 > Q$ , then  $S_1 \ll P^{2/3-\nu/3}$  and for  $Q_1 = Q$ , then  $S_1 \ll P Q^{-\nu+\epsilon} u_0^{-\nu}$  where  $u_0 = \max(u_n, \dots, u_1)$ ,  $u_s = \max(1, |z_s| P^s)$  and  $A_s = a_s/q_s + z_s$  for  $s = n, \dots, 1$ . Let  $\tau_s = P^{s/2}$  for  $s = n, \dots, 2$ ; and that among the numbers  $q_n, \dots, q_2$  there are some not exceeding  $P^{0,25}$ . We take some  $q$  from them and let  $Q$  denote the least common multiple of these  $q$ . We define  $\kappa$  by  $Q = P^\kappa$  for  $Q \leq P^{0,25}$  and  $\kappa = 1/4$  for  $Q > P^{0,25}$ . Then for  $l \leq P^{2\epsilon_0}$  we have  $S = \sum_{p \leq P} e^{2\pi i l f(p)} \ll P^{1-\epsilon_0+\epsilon'}$  where  $\epsilon_0 = \kappa/6,7 n^2 \log 12 n^2$ . Further let  $\tau_s = P^{0,5s}$  for  $s = n, \dots, 1$ , and that the least common multiple  $Q$  of  $q_n, \dots, q_2 \leq P^{1/9}$ , then for  $0 < l \leq P^{2\epsilon}$  we have  $\sum_{p \leq P} e^{2\pi i l f(p)} \ll P^{1-\epsilon+\epsilon'}$  where  $Q_1 = P^{\kappa_1}$ ,  $\epsilon = \min(\kappa_1/6,75 n^2 \log 12 n^2, 1/27 n^2 \log 108 n^2)$ .

L. K. Hua.

Corput, J. G. van der: On the transformation of certain trigonometric sums. J. Analyse math. 4, 236—245 (1956).

Let  $f_0(x) = \operatorname{cosec} x$  and  $f_1(x) = \cot x$ . Let  $a$  and  $b$  be two real numbers and  $b-a$  be a positive integer.  $\sum_{n \in (a,b)}^{(\lambda)}$  denote a sum running over  $n = a + \frac{1}{2}, a + \frac{3}{2}, \dots, b - \frac{1}{2}$  for  $\lambda = 0$  and  $n = a, a+1, \dots, b$  for  $\lambda = 1$ . For  $\lambda = 0$



or 1 and for  $\mu = 0$  or 1, we have the identity

$$\begin{aligned}
 & (2i)^{-q} \sum_{n \text{ in } (a,b)}^{(\lambda)} e^{2\pi i (B\eta n + Cn + Bc)} (n - \beta)^Q f_{\mu}^{(q)} (\pi \eta n + \pi c) \\
 &= \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (2i)^{-k} (A - B)^{q-k} \sum_{n \text{ in } (a,b)}^{(\lambda)} e^{2\pi i (A\eta n + Cn + Ac)} (n - \beta)^Q f_{\mu}^{(k)} (\pi \eta n + \pi c) \\
 &+ \sum_{k=0}^Q \binom{Q}{k} (2i)^{-k} (b - \beta)^{Q-k} \sum_{n \text{ in } (A,B)}^{(\mu)} e^{2\pi i (b\eta n + cn + bC)} (n - B)^q f_{\lambda}^{(k)} (\pi \eta n + \pi C) \\
 &- \sum_{k=0}^Q \binom{Q}{k} (2i)^{-k} (a - \beta)^{Q-k} \sum_{n \text{ in } (A,B)}^{(\mu)} e^{2\pi i (a\eta n + cn + aC)} (n - B)^q f_{\lambda}^{(k)} (\pi \eta n + \pi C),
 \end{aligned}$$

provided that each term occurring in this identity is finite, otherwise the formula is modified by the limiting processes. The formula is deduced from the defining relation of  $f_{\mu}(p\pi)$

$$f_{\mu}(p\pi) = 2i \left( \sum^{(\mu)} e^{2\pi i p n} \right) \left( e^{2\pi i p b} - e^{2\pi i p a} \right).$$

*L. K. Hua.*

## Analysis.

● **Duschek, Adalbert:** *Vorlesungen über höhere Mathematik. 1. Band: Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Anwendungen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Unendliche Reihen.* 2. neu bearbeitete Aufl. Wien: Springer-Verlag 1956. XI, 440 S. mit 169 Textabb. DM 45,—.

Die 2. Aufl. wurde gegenüber der 1. Aufl. (dies. Zbl. 37, 33) einer gründlichen Revision bis zur völligen Neubearbeitung einzelner Abschnitte unterzogen, stets mit dem Ziel, „eine auch dem Anfänger und dem Nicht-Mathematiker verständliche, ich möchte fast sagen: wirklich lesbare Darstellung zu liefern, die aber doch jenes Maß von Strenge besitzt, das der Mathematiker nun eben einmal mit guten Gründen für unerlässlich hält“. Der Abschnitt über unendliche Reihen wurde vom zweiten in den ersten Band, und die Wahrscheinlichkeitsrechnung vom ersten in den zweiten Band verlegt. (Sonst wurde die Stoffanordnung im wesentlichen beibehalten.) Inhalt: I. Zahlen und Zahlenfolgen; II. Der Funktionsbegriff; III. Integral und Ableitung; IV. die elementaren transzendenten Funktionen; V. Ergänzungen zur Differential- und Integralrechnung (Anwendungen in Geometrie und Mechanik, Unbestimmte Formen, Uneigentliche Integrale, Taylorsche Formel, Numerische Integration, Komplexe Zahlen usw.); VI. Polynome, algebraische Gleichungen, rationale Funktionen (einschl. numerischer Methoden); VII. Unendliche Reihen. Anhang, Lösungen der Aufgaben (37 Seiten). *L. Collatz.*

● **Joos, G. und Th. Kaluza:** *Höhere Mathematik für den Praktiker.* 8. verb. Aufl. Leipzig: Johann Ambrosius Barth 1956. XII, 399 S., 97 Abb. im Text. Ln. DM 23,10.

Die achte Auflage unterscheidet sich von den früheren nur durch eine Anfügung eines Anhanges (12 Seiten) über die Laplace-Transformation aus der Feder von Dr. Fick. — Die Art des Buches, das bewußt aller Problematik entsagt, ist schon anlässlich seiner 1. Auflage [dies. Zbl. 17, 347] gekennzeichnet worden. Die Autoren bekennen sich im Vorworte freimütig zu manchen „Ketzereien“, z. B. hinsichtlich der Behandlung der Differentiale. Man kann aber gerade diese Dinge ohne allen Mehraufwand an Druckerschwärze auch ganz exakt darstellen, indem man sich an einigen wenigen entscheidenden Stellen zu exakteren Definitionen entschließt, als sie in dem Buche meist vorgebracht werden. Das hätte den Vorteil, dem Studenten an manchen Stellen feste Handhaben statt gebrechlicher Krücken zu geben und ihm an manchen wichtigen Stellen unnötiges Kopfzerbrechen zu ersparen. Von

dieser von den Autoren absichtlich in Kauf genommenen theoretischen Schwäche der Grundlagen abgesehen, zeichnet sich das Buch durch einen großen Reichtum an schönen Anwendungen aus, die seine Hauptstärke bilden und die wohl vor allem seinen großen Erfolg verbürgen.

*K. Strubecker.*

● **Vygodskij, M. Ja.:** *Handbuch der höheren Mathematik.* Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 784 S. R. 13,40 [Russisch].

Das Buch ist die Fortsetzung des „Handbuches der Elementarmathematik“ desselben Verf. und für die Absolventen höherer technischer Lehranstalten bestimmt. Es enthält eine sehr ausführliche, systematische Zusammenstellung der Formeln und Regeln folgender Gebiete: Analytische Geometrie der Ebene (Geraden, Kurven 2. Ordnung), analytische Geometrie des Raumes (Vektorbegriff, lineare Gebilde, Flächen 2. Ordnung, Systeme linearer Gleichungen), Grundbegriffe der Analysis (Zahlbegriff, Funktionsbegriff, Grenzwert), Differentialrechnung, Integralrechnung, Anfangsgründe der ebenen und räumlichen Kurven, Reihen, Differential- und Integralrechnung bei mehreren Veränderlichen, gewöhnliche Differentialgleichungen (bis zur Methode der Variation der Konstanten für lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung). Vollständige Beweise werden nur in Ausnahmefällen gegeben, dagegen wird die Einführung von Begriffen stets sehr gründlich vorgenommen, und es werden überall viele Beispiele gebracht. Den Schluß des Buches bilden Tafeln des natürlichen Logarithmus der Zahlen 1,00 bis 9,99 auf 4 Dezimalen und der Exponentialfunktion für die Argumente von 0,00 bis 3,99 auf 5 geltende Ziffern sowie eine Tabelle von 14 unbestimmten Integralen.

*W. Schulz.*

● **Tarasov, N. P.:** *Lehrgang der höheren Mathematik für Technische Lehranstalten.* 9. überarb. Aufl. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 404 S. R. 7,15 [Russisch].

● **Klaf, A. Albert:** *Calculus refresher for technical men.* Unabridged and unaltered republication of the first edition. New York: Dover Publications, Inc. 1956. VIII, 431 p. \$ 195.

Aufgabensammlung aus dem Gebiet der reellen Analysis und ihrer Anwendung auf Physik und Technik. Anhang betreffend Bezeichnungen, Formeln, Tabellen.

*W. Maier.*

**Clarke, L. E.:** *Inequalities involving upper and lower limits.* Math. Gaz. 40. 43—44 (1956).

Es seien  $\{a_n\}$  und  $\{b_n\}$  beschränkte Folgen von reellen Zahlen mit  $A$  und  $A'$  bzw.  $\lambda$  und  $\lambda'$  als oberen bzw. unteren Grenzen. Die Ungleichungen

$$f(\lambda, \lambda') \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n, b_n) \leq f(\lambda, A') \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(a_n, b_n) \leq f(A, A')$$

gelten genau dann für alle beschränkten  $\{a_n\}$  und  $\{b_n\}$ , wenn  $f(x, y)$  stetig und für festes  $y$  eine nicht-absteigende Funktion von  $x$ , für festes  $x$  eine nicht-absteigende Funktion von  $y$  ist.

*L. Fuchs.*

**Bellman, Richard:** *On an inequality concerning an indefinite form.* Amer. math. Monthly 63, 108—109 (1956).

### **Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:**

**Kondô, Motokiti:** Sur la nommabilité d'ensembles. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 1841—1843 (1956).

**Kondô, Motokiti:** Sur les nombres réels et nommables. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 1945—1948 (1956).

**Kondô, Motokiti:** Sur les analyses relatives. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 2084—2087 (1956).

**Kondô, Motokiti:** Sur la notion du transfini. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 2209—2212 (1956).

**Kondô, Motokiti:** Sur le continu projectif et la conclusion de l'étude des ensembles nommables. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 2275—2278 (1956).



Verf. behandelt die Frage nach der „effektiven Definierbarkeit“ im Sinne (des Existenzbegriffes) von H. Lebesgue, nach der sogenannten „Nommabilität“. Unterschieden wird dabei, ob für die Definitionen transfinite Hilfsmittel herangezogen werden oder nicht. In den ersten drei Noten wird vom Transfiniten kein Gebrauch gemacht. Wesentliche Konstruktionsmittel sind die Projektionen (vgl. weiter unten). Im übrigen wird unterschieden: Nommabilität ( $E$ ) auf unendlichen Folgen ganzer Zahlen, Nommabilität ( $S$ ) auf den  $B$ -meßbaren Mengen und Nommabilität ( $P$ ) auf den projektiven Mengen. — 1. Note. Nommable Mengen. 1. 1. Es sei  $J$  der Integritätsbereich der ganzen Zahlen und  $L$  der Körper der reellen Zahlen, ferner  $J^n$  bzw.  $L^n$  der Raum der geordneten  $n$ -tupel  $(a_1, \dots, a_n)$ ,  $a_v \in J$  bzw.  $a_v \in L$ ; falls kein bestimmtes  $n$  ins Auge gefaßt ist, schreiben wir  $J^*$  bzw.  $L^*$  (statt  $J^n$  bzw.  $L^n$ ). Unterräume von  $J^*$  bzw.  $L^*$  werden bezeichnet mit  $U', U''$  usw., ferner der Raum der  $(u', u'')$ , wobei  $u' \in U', u'' \in U''$ , mit  $U' + U''$  und als direkte Summe von  $U', U''$ . Wenn  $M \subset U' + U''$ , wobei  $U'$  ein  $L^*$  bzw. ein  $J^*$  ist, werde unter der „Projektion“  $P(U', M)$  bzw.  $S(U', M)$  verstanden die Menge aller  $u' \in U'$ , zu denen ein  $u'' \in U''$  existiert mit  $(u', u'') \in M$ . — 1. 2. Es seien  $k_0, k$  Unterkörper von  $L$  mit  $k_0 \subset k$ . Verf. bezeichnet die im folgenden ange deutete Theorie als eine relative Analysis  $\mathfrak{A}(k_0, k)$ . — Nun sei  $F = F(x_1, \dots, x_n; a'_1, \dots, a'_k)$  ein Polynom über  $k_0$  und  $[F \geq 0]$  die Menge aller  $(a_1, \dots, a_n; a'_1, \dots, a'_k)$  mit  $a_v \in J, a'_v \in k$  und mit  $F(a_1, \dots, a_n; a'_1, \dots, a'_k) \geq 0$ ; ein solches  $[F \geq 0]$  heiße elementar, genauer  $(k_0, k)$ -elementar bzw., falls neben den  $x_v$  keine  $x'_v$  auftreten,  $(k_0)$ -elementar. Ist  $M \in U' + U''$   $(k_0)$ - bzw.  $(k_0, k)$ -elementar, so heiße  $S(U', M)$  resp. das Komplement von  $S(U', M)$  bezüglich  $U'$  nommabel- $(E^1, k_0)$  bzw.  $-(S^1; k_0, k)$  resp. nommabel- $(E_1; k_0)$  bzw.  $-(S_1; k_0, k)$ ; kürzer schreiben wir hierfür  $S(U', M) \in (E^1; k_0)$  usw. Allgemein: Wenn  $M \in (E_n; k_0)$ , sei  $S(U', M) \in (E^{n+1}, k_0)$  und  $U' - S(U', M) \in (E_{n+1}; k_0)$ ; und entsprechend wird  $(S^{n+1}; k_0, k)$  sowie  $(S_{n+1}; k_0, k)$  definiert. Ist  $M \in (E_n; k)$  und  $M \in (E_n; k_0)$ , so schreiben wir  $M \in (E_n; k_0)$ ; entsprechend ist  $M \in (S_n; k_0, k)$  zu verstehen. Ist  $n$  nicht festgelegt, so wird statt  $(E^n, k_0)$  usw. geschrieben  $(E; k_0)$  usw. Ersetzt man in der Definition von  $(E^n; k_0)$  die Projektion  $S$  durch  $P$ , für  $M \in (S; k_0, k)$ , so erhält man die Definition von  $M \in (P^n; k_0, k)$  usw. — 1. 3. Es sei  $f(u)$  eine Abbildung von  $D \subset U'$  in  $U''$  und  $G(f)$  die Paarmenge  $(u, f(u)) \subset U' + U''$  mit  $u \in D$ . Wenn  $G(f) \in (E_n; k_0)$ , schreiben wir  $f \in (E_n; k_0)$  oder kürzer  $f \in (E; k_0)$ ; entsprechend ist  $f \in (S_n; k_0, k)$  und  $f \in (P_n; k_0, k)$  zu verstehen. 2. Note. Nommable Zahlen. 2. 1. Es sei  $M \subset J^2$  und  $M \in (E; k_0)$ ; ferner sei  $K(n; M) = K(M \cap Q_n)$  die Mächtigkeit von  $M \cap Q_n$ , wobei  $Q_n$  das Quadrat  $(|x| < n, |y| < n)$ ,  $(x, y) \in J^2$  bedeutet. Man setze  $d(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} K(n; M)/K(n; J^2)$  und  $d(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} K(n; M)/K(n; J^2)$ . Falls  $d(M) = d(M)$  ist, wird  $d(M)$  als die Dichte  $d(M)$  von  $M$  bezeichnet und  $M$  selbst als meßbar; dabei ist also  $M \in (E; k_0)$  vorausgesetzt. Die reelle Funktion  $d(X)$  ist über dem System  $m$  der meßbaren Mengen ein (normierter) Inhalt; nämlich:  $m$  ist ein Boolescher Verband mit  $J^2$  als Einheit; ferner ist  $0 \leq d(X) \leq 1$  und  $d(0) = 0$ ,  $d(J^2) = 1$ ;  $d(X') \leq d(X'')$  für  $X' \leq X''$ ;  $d(X') + d(X'') = d(X' \cap X'') + d(X' \cup X'')$ . Außerdem ist  $d(X)$   $(E; k_0)$ -deformationsinvariant, d. h.  $d(X) = d(\sigma(X))$ , wobei  $\sigma \in (E; k_0)$  eine ein-eindeutige Abbildung von  $J^2$  auf sich ist derart, daß  $K(\sigma(Q_n) \cap (J^2 - Q_n)) + K(Q_n \cap (J^2 - \sigma(Q_n))) = o(n^2)$ . Übrigens ist  $d(X)$  der einzige derartige Inhalt. — 2. 2. Ist  $\alpha \in L$  gegeben, so schreiben wir  $\alpha \in (E^n; k_0)$  und nennen  $\alpha$  von der Klasse  $n$ , wenn ein  $M \in m$  existiert mit  $d(M) = \alpha - [\alpha]$ ; kürzer:  $\alpha \in (E; k_0)$ . Es gilt der Satz: Es sei  $\alpha = a_0 + a_1 p^{-1} + a_2 p^{-2} + \dots \in k$ ,  $1 < p \in J$ ,  $0 \leq \alpha < p$ ,  $0 \leq a_n \in J$ ; es ist  $\alpha \in (E; k_0)$  genau dann, wenn für die Menge  $A$  der Punkte  $(n, a_n) \in J^2$  gilt  $A \in (E; k_0)$ . Die reellen Zahlen  $\alpha \in (E; k_0)$  bilden einen algebraisch abgeschlossenen Oberkörper  $\pi(k_0)$  von  $k_0$ . [Es gibt  $\alpha \in \pi(k_0)$  von jeder Klasse  $n$ .] Es heißt  $k_0$  ein Relativkontinuum, wenn  $k_0 = \pi(k_0)$ ; jede nicht leere beschränkte

Teilmenge  $T$  eines solchen  $k_0 (= \pi(k_0))$  besitzt, wenn  $T \in (S; k_0, k)$ , in  $k_0$  ein Supremum. Ist  $R$  der Körper der rationalen Zahlen, so enthält die relative Analysis  $\mathfrak{A}(\pi(R), \pi(R))$  eine „nominale“ Theorie der Baireschen Funktionen und des Lebesgueschen Integrals. 3. Note. In 3. 1.—3. 2. werden  $k_0$  und  $k$  als Relativkontinua angenommen. — 3. 1. Bezeichnet man mit  $k^*$  die Menge der in  $k$  enthaltenen Irrationalzahlen, so gilt: Ist  $N$  eine nicht leere, in  $k$  enthaltene Menge mit  $N \in (P^1; k_0, k)$ , so gibt es eine, in  $k^*$  definierte, stetige Funktion  $f \in (S; k_0, k)$  mit  $N = f(k^*)$ . Jede nicht leere, in  $k$  enthaltene, beschränkte Menge  $H \in (P^1; k_0, k)$  besitzt in  $k_0$  ein Supremum. Für die abgeschlossene Hülle  $\bar{M}$  eines  $M \in (P^1; k_0, k)$  gilt  $\bar{M} \in (S; k_0, k)$ . — 3. 2. Sodann werden Sätze über reelle Funktionen  $f \in (S; k_0, k)$  angegeben; insbesondere gilt der Satz von der Existenz des Maximums und Minimums einer stetigen Funktion mit kompaktem Definitionsbereich  $D \in (S; k_0, k)$ . — 3. 3. Schließlich wird der Begriff der reellen Zahl  $\beta \in (P; k_0)$  analog erklärt wie der der Zahlen  $\alpha \in (E; k_0)$ ; dabei tritt  $(P; k_0, k_0)$  an Stelle von  $(E, k_0)$ . Ist  $p(k_0)$  die Menge aller  $\beta \in (P; k_0)$ , so gilt  $\pi(p(k_0)) = p(k_0)$ . Ist sogar  $p(k_0) = k_0$ , so heißt  $k_0$  projektiv abgeschlossen. Zu jedem Körper  $k'$  reeller Zahlen existiert ein kleinster projektiv abgeschlossener Oberkörper  $P(k')$  von  $k'$ , die sogenannte projektive Hülle von  $k'$ . Falls  $k'$  der Körper  $R$  der rationalen Zahlen ist, heißt  $P(R) = K$  projektives Kontinuum. 4. Note. Die Sätze in 3. 1.—3. 2. gelten aber im allgemeinen nicht für Mengen bzw. Funktionen aus  $(P; k_0, k)$ . Diese Unebenheit wird beseitigt vermöge weiterer Entwicklungen über Nommabilität- $(P; k_0, k)$  und Heranziehung transfiniter Prozesse. Zunächst werden die (auch transfiniten) Ordinalzahlen  $t \in (S; k_0, k)$  bzw.  $t \in (P; k_0, k)$  folgendermaßen definiert: Es sei  $Q$  die Menge der (positiven) dyadischen Brüche  $2^{-p}(2q+1)$ , wobei  $p, q \in J$ ,  $0 \leq p$ ,  $0 \leq q$ , und  $t(A)$  der Ordnungstypus der Untermenge  $A$  von  $Q$ . Wir setzen  $t(A) \in (S; k_0, k)$ , wenn  $A \in (S; k_0, k)$ ; entsprechend wird  $t(A) \in (P; k_0, k)$  erklärt. Aus  $a, b \in (S; k_0, k)$  folgt  $a + b, a \cdot b \in (S; k_0, k)$  und  $t \in (S; k_0, k)$  für jedes  $t < a$ . Von dieser Definition ausgehend gewinnt man, wie hier im einzelnen nicht beschrieben werden kann, den Begriff der Funktionen  $f(x_1, \dots, x_n) \in (S; k_0, k)$  bzw.  $f(x_1, \dots, x_n) \in (P; k_0, k)$ , worin die  $x_1, \dots, x_n$  und die Funktionswerte Ordinalzahlen sind; sodann gelangt man (vermittelt transfiniter Prozesse) zum Begriff der „transfinit  $(E; k_0)$ -nominablen“ Mengen  $W$ , kurz  $W \in \text{tr}(E; k_0)$ , sowie entsprechend  $W \in \text{tr}(S; k_0, k)$  bzw.  $W \in \text{tr}(P; k_0, k)$ . Wie im nicht-transfiniten Fall (vgl. 2. Note) erklärt man das System  $\omega(k_0)$  der reellen Zahlen  $a \in \text{tr}(E; k_0)$  und bezeichnet  $k_0$  als transfinit-relatives Kontinuum, wenn  $k_0 = \omega(k_0)$ . Für  $K = P(R)$ , wobei  $R$  der Körper der rationalen Zahlen (vgl. 3. Note), gilt nun  $K = \omega(K)$ . Sind  $k_0, k$  transfinit-relative Kontinua, so kann man in der relativen Analysis  $\mathfrak{A}(k_0, k)$  die Theorie der analytischen Mengen entwickeln; aus  $M \in (P^1; k_0, k)$  folgt nämlich  $M \in \text{tr}(S; k_0, k)$  genau dann, wenn für das Komplement  $CM$  von  $M$  gilt  $CM \in (P^1; k_0, k)$ . 5. Note. Ist  $M \subset K$  (oder  $M \subset L$ ) nicht leer, beschränkt und  $M \in \text{tr}(P; K, K)$  (oder  $M \in \text{tr}(P; K, L)$ ), so besitzt  $M$  in  $K$  ein Supremum. Eine Menge  $M \in (P^2; K, L)$  mit  $M \subset L$  ist nicht leer genau dann, wenn  $M \cap K$  nicht leer ist. Für Systeme von Mengen  $M \in (P^2; K, L)$  gilt das Zermelosche Auswahlaxiom. — Weitere Bemerkungen betreffen unter anderem das Kontinuumproblem in der vom Verf. entwickelten relativen Analysis und die Beziehungen zu den Untersuchungen von Gödel. Beweise werden im allgemeinen nicht gegeben.

Otto Haupt.

Rechard, Ottis W.: Invariant measures for many-one transformations. Duke math. J. 23, 477—488 (1956).

Es sei  $\mathfrak{X}$  eine sigma-Algebra von Teilmengen einer Menge  $X$  mit  $X \in \mathfrak{X}$ ,  $m$  ein endliches Maß auf  $\mathfrak{X}$  und  $\tau$  eine eindeutige, meßbare und nichtsinguläre Transformation von  $X$  in sich. Ein zweites derartiges Maß  $m^*$  heißt stärker als  $m$ , wenn aus



$m^*(A) = 0$  folgt  $m(A) = 0$ , und  $\tau$ -asymptotisch stärker als  $m$ , wenn aus  $m^*(A) = 0$  folgt  $\inf_n m(\tau^{-n}(A)) = 0$ . Beide Begriffe fallen zusammen, wenn  $\tau$  umkehrbar eindeutig mit meßbarer Umkehrung ist. Einen sich nur auf diesen Fall beziehenden Satz von Cotlar und Ricabarra (dies. Zbl. 37, 76) verallgemeinernd beweist der Verf., daß dann und nur dann ein gegenüber  $\tau$  invariantes Maß  $m^*$  existiert, so daß  $m$  stärker als  $m^*$  und  $m^*$   $\tau$ -asymptotisch stärker als  $m$  ist, wenn die in  $\mathfrak{X}$  erklärten Mengenfunktionen  $m(\tau^{-n}(E))$ ,  $n = 1, 2, \dots$  gleichmäßig totalstetig in bezug auf  $m$  sind. Dies dient dazu, die Beweise der Ergodensätze von Dunford und Miller [Trans. Amer. math. Soc. 60, 538—549 (1946)], denen ein nicht invariantes Maß zugrunde liegt, zu vereinfachen. Das Hauptergebnis kann teilweise auf den Fall einer Abelschen Semigruppe meßbarer Transformationen übertragen werden.

K. Krickeberg.

**Kunugi, Kinjiro:** Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I. Proc. Japan Acad. 32, 215—220 (1956).

The author considers the set  $S$  of all step-functions (on a fixed interval) as an „espace rangé“ (see the earlier papers of the author: this Zbl. 57, 147; 58, 166). By completion of  $S$  and by extension of the integral of step-functions he obtains a definition of the Lebesgue integral.

S. Sikorski.

**Bartle, R. G.:** A general bilinear vector integral. Studia math. 19, 337—352 (1956).

Es sei  $\mathfrak{S}$  ein Körper von Teilmengen  $E$  einer Grundmenge  $S$ . Es seien ferner  $X$  und  $Y$  normierte lineare (reelle oder komplexe) Räume und  $Z$  ein Banachraum. Es existiere eine eindeutige bilineare Verknüpfung  $x y$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  mit Werten  $x y = z \in Z$ . Es gelte  $|x y| \leq k |x| |y|$  für jedes Paar  $x \in X$ ,  $y \in Y$  mit einer festen Konstanten  $k$ . Verf. führt einen Integralbegriff  $\lambda(E) = \int_E f(s) \mu(ds)$ ,  $E \in \mathfrak{S}$ , für

gewisse eindeutige Abbildungen (Funktionen  $f|S$ ) von  $S$  in  $X$  bezüglich eines additiven Maßes  $\mu|S$  mit Werten des Maßes  $\mu(E) \in Y$  ein. Die Werte des Integrals  $\lambda(E)|\mathfrak{S}$  liegen dann im Banachraum  $Z$ . Das Integral  $\lambda(E)$  wird zuerst für Treppenfunktionen  $t = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{E_i}$ , d. h. für lineare Kombinationen von charakteristischen

Funktionen  $\chi_{E_i}$ ,  $E_i \in \mathfrak{S}$  mit Koeffizienten  $x_i \in X$  durch:  $\lambda(E) = \int_E t(s) \mu(ds) = \sum_{i=1}^n x_i \mu(E_i \cap E)$ , für jedes  $E \in \mathfrak{S}$ , definiert. Es bezeichne für jedes  $E \in \mathfrak{S}$ :

$\|E\| = \sup \{|\sum x_j \mu(E_j)| \text{ für alle endlichen Zerlegungen von } E \text{ und beliebige } x_j \in X\}$

und für eine beliebige Teilmenge  $A \subseteq S$ :  $\|A\| = \inf \{\|E\|, E \in \mathfrak{S} \text{ mit } A \subseteq E\}$ ;

dann soll eine Folge von Funktionen  $f_n(s)|S$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\mu$ -konvergent gegen  $f(s)|S$  genannt werden, wenn  $\|(S, n, \varepsilon)\| \rightarrow 0$  für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt, wobei  $(S, n, \varepsilon) = \{s \in S: |f_n(s) - f(s)| \geq \varepsilon\}$  ist. Eine Funktion  $f(s)|S$  heißt  $\mu$ -meßbar, wenn sie als  $\mu$ -Grenzfunktion einer Folge  $t_n(s)|S$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , von Treppenfunktionen dar-

stellbar ist. Der so definierte Raum der  $\mu$ -meßbaren Funktionen ist linear und abgeschlossen für die  $\mu$ -Konvergenz. Eine Funktion  $f(s)|S$  heißt  $\mu$ -integrierbar über  $S$ , wenn eine Folge von Treppenfunktionen  $t_n(s)|S$  existiert, die folgende Bedingungen erfüllt: I.  $t_n(s)$  ist  $\mu$ -konvergent gegen  $f(s)$ . II. Die Folge der Integrale  $\lambda_n(E) = \int_E t_n(s) \mu(ds)$ ,  $E \in \mathfrak{S}$ , hat die folgenden zwei Eigenschaften: 1. für jedes  $\varepsilon > 0$

existiert ein  $\delta > 0$  derart, daß  $|\lambda_n(E)| < \varepsilon$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , für jedes  $E \in \mathfrak{S}$  mit  $\|E\| < \delta$  gilt; 2. für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $E_\varepsilon \in \mathfrak{S}$  mit  $\|E_\varepsilon\| < +\infty$  derart,

daß  $|\lambda_n(G)| < \varepsilon$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , für jedes  $G \in \mathfrak{S}$  mit  $G \subseteq S - E_\varepsilon$  gilt. Verf.

zeigt nun: Wenn  $f$   $\mu$ -integrierbar über  $S$  ist, dann konvergiert für jedes  $E \in \mathfrak{S}$  die Folge  $\lambda_n(E)$  (bezüglich der Norm in  $Z$ ), und zwar gleichmäßig, und der Grenzwert  $\lambda(E)$  dieser Folge in  $Z$  definiert eindeutig das Integral  $\lambda(E) = \int_E f(s) \mu(ds)$

von  $f$  über  $E \in \mathfrak{S}$ . Bei fester  $\mu$ -integrierbarer Funktion  $f$  ist  $\lambda(E) | \mathfrak{S}$  additiv. Bei fester Menge  $E \in \mathfrak{S}$  bilden die  $\mu$ -integrierbaren Funktionen einen linearen Raum und das Integral ist eine lineare Abbildung dieses Raumes in  $Z$ . Es gilt ferner für jede  $\mu$ -integrierbare Funktion  $\lim_{||E|| \rightarrow 0} \int_E f(s) \mu(ds) = 0$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $E_\varepsilon \in \mathfrak{S}$  derart, daß  $\left| \int_G f(s) \mu(ds) \right| < \varepsilon$  für jedes  $G \in \mathfrak{S}$  mit  $G \subseteq S - E_\varepsilon$  ist.

Die wesentlich beschränkten  $\mu$ -meßbaren Funktionen sind über jeder Menge  $E \in \mathfrak{S}$  mit  $||E|| < +\infty$  stets  $\mu$ -integrierbar. Für das Integral des Verf. gilt der Vitalische Konvergenzsatz. Der Lebesguesche Konvergenzsatz dagegen gilt nicht stets, sondern nur für Folgen, die fast überall durch eine Konstante beschränkt sind. Verf. untersucht weiter Eigenschaften seines Integrals, im Falle, daß das Maß  $\mu$  auf einem  $\sigma$ -Körper  $\mathfrak{S}$  definiert und  $\sigma$ -additiv ist, und Beziehungen seines Integrals zu anderer Integralbegriffen.

D. A. Kappos.

**Pagni, Mauro:** Sulla derivazione negli insiemi astratti delle funzioni a variazione limitata integrabili secondo Burkil. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **25**, 279—302 (1956).

Es sei  $\mathfrak{J}$  ein Halbring von Mengen, die hinsichtlich eines endlichen, abzählbar additiven und nichtnegativen Maßes  $\mu$  meßbar sind, und  $F$  eine auf  $\mathfrak{J}$  erklärte reelle Funktion beschränkter Variation. Existiert das Unterteilungsintegral  $G$  von  $F$ , so bezeichnet der Verf. als Ableitung  $f$  von  $F$  die von Fichera [Rend. Sem. mat. Univ. Padova **23**, 366—397 (1954)] definierte Ableitung von  $G$ , die der Radon-Nikodým-sche Integrand des  $\mu$ -totalstetigen Teils von  $G$  ist. Fichera hatte  $f$  im Fall eines nichtnegativen und additiven  $F$  (d. h.  $F = G \geq 0$ ) durch ein Maximumprinzip charakterisiert; der Verf. tut das gleiche bei nichtnegativem und oberadditivem (in der Terminologie des Verf., unteradditivem)  $F$ .

K. Krickeberg.

**Mikolás, Miklós:** Construction des familles de fonctions partout continues non dérivables. Acta Sci. math. **17**, 49—62 (1956).

Viene dato un nuovo procedimento per costruire funzioni continue senza derivata. Tra i risultati raggiunti dall'A. riportiamo il seguente, dopo aver premesso che una funzione  $f(x)$  si chiama convessa [concava] a segmenti in  $(a, b)$  con i punti di divisione  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$ , se è continua in questi punti e convessa [concava] o lineare in ciascuno degli intervalli  $(x_{r-1}, x_r)$ , ( $r = 1, 2, \dots, m$ ). — Sia  $\varphi(x)$ , ( $-\infty < x < +\infty$ ) una funzione continua, periodica con periodo  $p$  e convessa [o concava] a segmenti in  $(0, p)$  con i punti di divisione  $\omega_r$ , ( $r = 0, 1, \dots, m$ ), e sia  $\varphi(0) > \varphi(p/2)$  [o rispettivamente  $\varphi(0) < \varphi(p/2)$ ]. Supponiamo che: 1.  $c_k$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) sia una successione di numeri reali o tutti positivi o tutti negativi

e tali che sia convergente la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ ; 2.  $v_k$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) sia una successione crescente di numeri interi positivi, ognuno dei quali è un divisore del successivo, e esistano dei valori di  $k$  arbitrariamente grandi, per i quali i rapporti  $v_k \omega_r / v_{k-1} p$ , ( $r = 1, 2, \dots, m$ ) sono interi; 3. per  $k \rightarrow \infty$  sia  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k |c_k| > 0$ . Allora la funzione  $\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi(v_k x)$  risulta ovunque continua, ma non è derivabile in alcun punto.

S. Cinquini.

**Bögel, K.:** Die Struktur der stetigen Funktionen einer Veränderlichen. I, II. J. reine angew. Math. **196**, 1—33, 137—154 (1956).

Über die Grundgedanken und die wesentlichen Ergebnisse wurde in einer Voranzeige berichtet (dies. Zbl. **58**, 49). In der vorliegenden Arbeit wird eine ausführliche Darstellung mit Beweisen gegeben. Insbesondere wird im II. Teil eine einheitliche Konstruktion aller stetigen Funktionen gewonnen. Es handelt sich dabei andeutungsweise um folgendes: Es seien vorgegeben: Beliebig eine aufsteigende Folge abgeschlossener, die Endpunkte von  $J$  enthaltender Mengen  $F_n$ ; ferner ab-



zählbar viele (Bedingungen ziemlich allgemeiner Natur unterworfenen) reelle Zahlen als Schranken für den Betrag der zu konstruierenden stetigen Funktion  $f$  in gewissen (durch die  $F_n$  bestimmten) Teilmengen von  $J$ . Nun werden mit Hilfe von (ebenfalls ziemlich willkürlich wählbaren) konkaven (stetigen) Funktionen Folgen stetiger Funktionen gebildet, die gleichmäßig konvergieren; deren Limes ist das zu konstruierende  $f$ . Die Konstruktion ist so eingerichtet, daß jede stetige Funktion genau einmal erhalten wird.

Otto Haupt.

**Kolmogorov, A. N.:** On the representation of continuous functions of several variables by superpositions of continuous functions of a smaller number of variables. Doklady Akad. Nauk SSSR 108, 179—182 (1956) [Russisch].

The paper contains the following partial solution of the well known problem of Hilbert: Every continuous function of several real variables is a finite superposition of continuous functions of three real variables. In particular, each continuous function  $f$  of four variables is of the form

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{r=1}^4 h_r(x_4, g_{1,r}(x_1, x_2, x_3), g_{2,r}(x_1, x_2, x_3)).$$

The problem whether every function of three variables is a superposition of functions of two variables, remains open. The answer to this problem is affirmative if some variables run through a dendrite instead of the interval.

R. Sikorski.

**Froda, Alexandre:** Propriétés (à distance) des fonctions réelles dans un espace euclidien. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 1948—1951 (1956).

Es sei  $a > 0$  eine feste reelle Zahl,  $R$  der  $n$ -dimen., euklidische Raum,  $n > 1$ , und  $d(s, t)$  der Abstand zweier Punkte  $s, t \in R$ . Bezeichnen  $E, E', E''$  Teilmengen von  $R$ , so sei  $L(R, R; a)$  bzw.  $L(R; a)$  die Familie aller Paare  $(E', E'')$  bzw. aller  $E$  derart, daß  $0 < d(s', s'') < a$  oder  $2a < d(s', s'')$  für alle  $s' \in E', s'' \in E''$  bzw. für alle  $s', s'' \in E$  ( $s' \neq s''$ ). Weiter sei  $J(p; a)$  ein homothetisches [d. h. ein durch eine topologische Abbildung  $y - p = b(x) \cdot (x - p)$ , wobei  $b(x) > 0$  reelle Zahl, vermitteltes] Bild der Einheitssphäre  $a(x, p) = 1$  derart, daß  $d \leq d(y, p) \leq 2a$  ist. Mit  $\Phi(E; a)$  sei bezeichnet jedes System solcher  $J(p; a)$  derart, daß zu jedem  $p \in E$  genau ein  $J(p; a)$  in  $\Phi(E; a)$  existiert. Es sei  $f$  eine eindeutige, reelle, endliche Funktion mit  $R$  als Definitionsbereich. Ist  $c(f; J(p; a)) = \sup(f(y); y \in J(p; a))$  bzw.  $c(f; J(p; a)) = \inf(f(y); y \in J(p; a))$  gesetzt, so werde  $f$  als  $a$ -beschränkt bezeichnet, wenn  $-\infty < c(f; J(p; a)) \leq \bar{c}(f; J(p; a)) < +\infty$  für alle  $J(p; a)$  aus allen möglichen  $\Phi(R; a)$ . Bei festem,  $a$ -beschränktem  $f$  und gegebenen  $\Phi_1 = \Phi(E_1; a)$ ,  $\Phi_2 = \Phi(E_2; a)$  setze man  $F_1 = \{x | f(x) \geq c(f; J_1(x; a))\} =$  Menge aller  $x \in E_1$ , für die  $f(x) \geq \bar{c}(f; J_1(x; a))$  bezügl. aller  $J_1(x; a) \in \Phi_1$ . Ferner sei  $F_2 = \{x | f(x) \leq c(f; J_2(x; a))\}$ ,  $G_1 = \{x | f(x) > \bar{c}(f; J_1(x; a))\}$ ,  $G_2 = \{x | f(x) < c(f; J_2(x; a))\}$ . — Dann wird unter anderem gezeigt: (1) Die Mengen  $G_1 \cap G_2$ ,  $G_1 \cap F_2$  und  $G_2 \cap F_1$  gehören zu  $L(R; a)$ . — (2) Ist  $f$  einwertig, so gilt  $F_1 \cap F_2 \in L(R; a)$ . — (3) Sind je zwei Punkte von  $F = F_1 \cap F_2$  durch eine Kette von endlich vielen Punkten  $q_i \in F$  verbindbar derart, daß  $a < d(q_i, q_{i+1}) < 2a$ , so ist  $f$  konstant auf  $F$ . — (4) Ist  $f$  konstant auf  $F_1 \cup G_2$ , so gilt  $(F_1, G_2) \in L(R, R; a)$ ; entsprechend für  $(G_1, F_2)$  und  $(G_1, G_2)$ . — Außerdem werden zwei weitere, weniger einfach formulierbare Sätze angegeben, deren einer sich auf die Konstanz von  $f$  auf gewisse andere Mengen bezieht.

Otto Haupt.

**Nevanlinna, Rolf:** Über den Satz von Stokes. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 219, 24 S. (1956).

Die Stokessche Integralformel wird zunächst für eine alternierende Differentialform  $A$  der Stufe (Dimension)  $m$ , die auf einem  $(m+1)$ -dimensionalen, in einem linearen Raum enthaltenen Simplex  $s_{m+1}$  stetig differenzierbar ist, bewiesen. Definiert man allgemeiner die Rotation (das äußere Differential) von  $A$  als die „Dichte“ des als Funktion eines beliebigen Simplexes  $\bar{s}_{m+1}$  aufgefaßten Integrals von  $A$  über den Rand von  $s_{m+1}$ , so gilt die Stokessche Formel auch dann noch, wenn diese Dichte

in  $s_{m+1}$  gleichmäßig existiert und stetig ist. Mit dieser Definition von  $\text{rot } A$  hat die Gleichung  $\text{rot } X = A$ , wobei  $A$  in einem konvexen Gebiet  $G$  stetig und  $\text{rot } A$  in  $G$  vorhanden (aber nicht notwendig stetig) ist, dann und nur dann eine Lösung, wenn  $\text{rot } A = 0$ . K. Krickeberg.

**Dvoretzky, Aryeh:** On a theorem of J. L. Walsh. Proc. Amer. math. Soc. 7, 363—366 (1956).

Si tratta di una precisazione di un recente teorema di Walsh (questo Zbl. 53, 228) il quale aveva provato che se  $f(x)$  e  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) sono funzioni  $p$  volte differenziabili nell'intervallo  $a < x < b$ , tali che (1)  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  in ogni punto di  $(a, b)$ , allora assegnato un  $x_0 \in (a, b)$ , esiste una successione  $x_n \in (a, b)$  per cui (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  e (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(p)}(x_n) = f^{(p)}(x_0)$ . L'A. crede di generalizzare questo risultato, affermando che al posto della (1) si può solo supporre

$$(1') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\substack{x \in I \\ y \in I}} |f_n(y) - f(x)| = 0$$

per ogni sottointervallo aperto  $I$  di  $(a, b)$  e, invece delle (2) e (3), si può richiedere l'esistenza di una successione  $N = \{n\}$  di interi formata da due successioni (non entrambe necessariamente infinite)  $N_1 = \{n_1\}$  e  $N_2 = \{n_2\}$  tali che per ogni  $n_1$  esista  $x_{n_1} \in (a, b)$  per cui  $f_{n_1}^{(p)}(x_{n_1}) = f^{(p)}(x_0)$  e, se  $N_1$  è infinita: (2')  $\lim_{n_1 \rightarrow \infty} x_{n_1} = x_0$ , mentre, se  $N_2$  è

infinita, si abbia: (3')  $\limsup_{n_2 \rightarrow \infty} \int_{x_0-h}^{x_0+h} |f_{n_2}^{(p)}(x) - f^{(p)}(x_0)| dx = o(h)$  se  $0 < h \rightarrow 0$ .

Inoltre, se  $x_0$  non è un estremo relativo (nel senso debole) di  $f^{(p)}(x)$ , la successione  $N_2$  può richiedersi che sia finita. La tesi dell'A. non è corretta, come può vedersi con esempi. Lo è si suppone che, detto  $(a, b)$  un sotto intervallo aperto di  $(a, b)$  contenente  $x_0$ , è  $x_{n_1} \in (a, b)$  e non si prescrive che debba valere la (2'). V'è da notare che la condizione (1') è più debole non solo della convergenza puntuale, ma anche della convergenza in misura e della convergenza su un insieme ovunque denso di punti. La Nota termina con alcune osservazioni, alcune delle quali mettono in luce ulteriori immediate generalizzazioni del risultato centrale a cui si è accennato. L. Giuliano.

**Koksma, J. F.:** Sur les suites  $(\lambda_n x)$  et les fonctions  $g(t) \in L^{(2)}$ . J. Math. pur. appl., IX. Sér. 35, 289—296 (1956).

Soit  $g(x+1) = g(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ),  $\int_0^1 g(x)^2 dx < \infty$  et  $\lambda_n$  une suite croissante d'entiers positifs. Plusieurs auteurs ont donné récemment des conditions pour qu'on ait (\*)  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\lambda_n x) \rightarrow \int_0^1 g(x) dx$  presque partout lorsque  $N \rightarrow \infty$  (Erdős, ce Zbl. 34, 72; Koksma, ce Zbl. 58, 49). L'A. prouve ici le théorème suivant. Soit  $A(n, d; M, N)$  ( $M \geq 0, N \geq 1$  entiers) le nombre des indices  $m \neq n$  tels que  $M+1 \leq m \leq M+N$  et  $(\lambda_m, \lambda_n) = d$ . Soit  $k = k(n)$  l'exposant pour lequel  $2^k \leq n < 2^{k+1}$  et posons  $P(n, d) = \max A(n, d; M, N)/N$ , où le maximum est pris par rapport aux  $M, N$  avec  $2^k \leq M+1 \leq M+N < 2^{k+1}$ . Soit finalement  $\sum_{h=-\infty}^{\infty} c_h e^{2\pi i h x}$  la série de Fourier de  $g(x)$ . Si

$$\sum_{h=1}^{\infty} |c_h|^2 \sum_{\delta|h, \delta|\lambda_n} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-2k} A\left(n, \frac{\lambda_n}{\delta}; 0, 2^k\right) < \infty \text{ et } \sum_{h=1}^{\infty} |c_h|^2 \sum_{\delta|h, \delta|\lambda_n} n^{-1} P\left(n, \frac{\lambda_n}{\delta}\right) < \infty,$$

alors (\*) est vrai p. p. La démonstration est basée sur un théorème antérieur de l'A. (loc. cit., Théorème 2). — Voici deux cas où les hypothèses du théorème sont vérifiées.

1.  $\lambda_n = n^a$  ( $a$  entier  $> 0$ ),  $\sum_{h=2}^{\infty} |c_h|^2 \sum_{\delta|h} d^{-1} < \infty$  (pour  $a = 1$  ce résultat a été démontré par l'A. loc. cit., Théorème 3); 2.  $(\lambda_n, \lambda_m) = 1$  pour tout  $m \neq n$ ,



$\sum_{h=2}^{\infty} |c_h|^2 \sum_{\lambda_n/h} n^{-1} < \infty$ . — Faute d'impression: p. 293, ligne 8 du bas et p. 296, ligne 2 du haut: au lieu de  $u_n(x) = \lambda_n x$ , lire  $u_n(x) = g(\lambda_n x)$ . *J. Horváth.*

**Williamson, R. E.: Multiply monotone functions and their Laplace transforms.** Duke math. J. **23**, 189—207 (1956).

Eine Funktion  $f(t)$  ( $t > 0$ ) heißt  $n$ -fach monoton ( $n \geq 2$ ), wenn  $(-1)^k f^{(k)}(t)$  nichtnegativ, nichtzunehmend und konvex für  $k = 0, 1, \dots, n-2$  ist. In Analogie zu dem Bernsteinschen Satz über vollmonotone Funktionen gilt: Notwendig und hinreichend dafür, daß  $f(t)$   $n$ -fach monoton ist, ist die Darstellbarkeit von  $f(t)$  in der

Form  $f(t) = \int_0^{\infty} (1-ut)_+^{n-1} d\gamma(u)$ , wo  $(t)_+ = t$  für  $t \geq 0$ ,  $= 0$  für  $t < 0$  und

$\gamma(u)$  nichtabnehmend und nach unten beschränkt ist. — Indem man in dieser Darstellung die ganze Zahl  $n$  durch eine reelle Zahl  $\alpha \geq 1$  ersetzt, kann man die  $\alpha$ -fache Monotonie definieren. Diese läßt sich andererseits auch mit Hilfe der Riemann-Liouvilleschen Derivierten  $D^{\alpha-2}$  definieren. — Bezüglich der Laplace-Transformierten von  $f(t)$  wird bewiesen: Notwendig und hinreichend dafür, daß eine nicht negative Funktion  $F(s)$  ( $0 < s < \infty$ ) die Laplace-Transformierte einer  $\alpha$ -fach monotonen ( $\alpha \geq 1$ ) und in jedem endlichen Intervall integrierbaren Funktion  $f(x)$  ist, sind die Bedingungen: (1)  $D^{\alpha}[s^{\alpha} F(s)]$  ist vollmonoton und bei  $s = 0$  integrierbar, (2)  $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ , (3)  $\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$  existiert.

*G. Doetsch.*

**Szekeres, G.: On a property of monotone and convex functions.** Proc. Amer. math. Soc. **7**, 351—353 (1956).

Die Sätze sind: 1. Ist die Funktion  $f(x)$  streng wachsend und zweimal stetig derivierbar in einem offenen Intervall  $(a, b)$  ( $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ), dann kann sie als (1)  $f(x) = \varphi[\varphi(x)]$  mit streng wachsendem von unten bzw. von oben konvexem  $\varphi$  bzw.  $\psi$  dargestellt werden. 2. Ist  $f(x)$  auch beschränkt, so kann in (1)  $\varphi(x)$  dann und nur dann als beschränkt gewählt werden, wenn das (uneigentliche) Integral

$$\int_a^b \exp\left(\int_d^y \left\{ \frac{1}{2} [f'''(x) + |f''(x)|/f'(x)] dx \right\} dy\right) (a < d < b)$$

konvergiert. Ein kurz skizziertes Beispiel zeigt daß dies nicht bei jedem beschränkten  $f(x)$  zutrifft. — Im Beweise des Satzes 2. (S. 352, Z. 5. v. u.) sollte richtig  $\frac{d}{dx} \log \varphi'(x) \geq f''_+(x) f'(x) = \frac{d}{dx} \log \varphi'_0(x)$  stehen. (Briefliche Mitteilung des Verf.)

*J. Aczél.*

**Bellman, Richard: Converses of Schwarz's inequality.** Duke math. J. **23**, 429—434 (1956).

Sind  $u$  und  $v$  konkave Funktionen im Intervall  $[0, 1]$  mit  $u(0) = u(1) = v(0) = v(1) = 0$  und  $\int_0^1 [u(x)]^2 dx = \int_0^1 [v(x)]^2 dx = 1$ , so gilt  $\int_0^1 u(x) v(x) dx \geq 1/2$ . Dieser auf Blaschke und Pick [Math. Ann. **77**, 277—302 (1916)] zurückgehende Satz wird hier auf einem Wege bewiesen, der auch eine zweidimensionale Verallgemeinerung zuläßt; dabei treten an Stelle der Konkavität die Bedingungen  $\nabla^2 u \leq 0$  und  $\nabla^2 v \leq 0$  im Innern des Definitionsbereiches von  $u$  und  $v$  neben dem Verschwinden von  $u$  und  $v$  auf dem Rande.

*G. Aumann.*

**Shepton, L. B.: A determinantal expansion for a class of definite integral.** III. Generalised continued fractions. Proc. Edinburg math. Soc. **10**, 134—140 (1956).

(Teil II, dies. Zbl. **56**, 281.) Verf. untersucht die aus I (dies. Zbl. **53**, 38) folgende Determinantenentwicklung

$$\int_a^b \frac{w(x)}{P_n(x)} dx = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{|a_0, \gamma_{01}, \dots, \gamma_{s-1}, s|^2}{\Delta_{s-1} \Delta_s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{N_{s+1}(z_1, z_2, \dots, z_n)}{D_{s+1}(z_1, z_2, \dots, z_n)},$$

wo  $a_s = \int_a^b \Theta_s(x) w(x) dx$ ,  $\gamma_{r,s} = \int_a^b \Theta_r(x) \Theta_s(x) w(x) P_n(x) dx$ ,  $\Delta_s = D_{s+1} =$

$|\gamma_{00}, \gamma_{11}, \dots, \gamma_{ss}|$  und  $P_n(x), \Theta_s(x)$  Polynome vom Grade  $n$  bzw.  $s$  sind, für die Spezialfälle  $\Theta_s(x) = (v-x)^s, p_s(x), q_s(x)$ , wo  $\{p_s(x)\}, \{q_s(x)\}$  orthogonale Polynom-systeme mit der Gewichtsfunktion  $w(x)$  bzw.  $w(x)P_n(x)$  sind, und zeigt insbesondere die Beziehung zur Kettenbruchentwicklung von  $\int_a^b \frac{w(z)}{z-x} dx$  auf.

O. Volk.

**Jacobsthal, Ernst:** Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Bieberbach über Kreisbogendreiecke. Math. Ann. **132**, 145—147 (1956).

In einer Untersuchung über Kreisbogendreiecke (dies. Zbl. **65**, 363) hat L. Bieberbach durch numerische Ausrechnungen gezeigt, daß die Funktion

$$F(x) = x \cos x (\sin x - x \cos x) / (\sin x \cos x - x^2)$$

im Intervall  $0 < x < \frac{1}{2}\pi$  monoton abnimmt. Hier werden zwei einfachere Beweise mitgeteilt, welche auf eine geeignete Umformung des Zählers der Ableitung  $F'(x)$  von  $F(x)$  gestützt sind; man wird zu folgender Ungleichung geführt:  $t/\sin t - 1 < 2(1/t - \operatorname{ctg} t)^2$  für  $0 < t < \pi$ .

E. Togliatti.

**Aczél, János:** Über die Einführung des natürlichen Logarithmus und der Exponentialfunktion. Mat. Lapok **7**, 101—104, russ. und dtsh. Zusammenfassg. 104—105 (1956) [Ungarisch].

Eine didaktische Bemerkung über die Einführung des natürlichen Logarithmus im Universitätsunterricht. Es wird vorgeschlagen, ausgehend von der Relation  $(a^x)' = \lambda a^x$ , den Faktor  $\lambda$  als  $\ln a$  zu definieren.

St. Fenyő.

### Allgemeine Reihenlehre:

**Petersen, Gordon M.:** Inclusion between limitation methods. Math. Z. **65**, 494—496 (1956).

Verf. betrachtet permanente Matrixverfahren bei beschränkten Folgen und zeigt: Gilt  $A \subset B$ , so gibt es ein  $C$  mit  $A \subset C \subset B$  (hier bedeutet also  $\subset$  strenge Inklusion bezüglich beschränkter Folgen). Zum Beweis werden geeignete Zeilen aus  $A$  ausgewählt („submethod“) und mit allen Zeilen aus  $B$  zu einer Matrix  $C$  zusammengestellt. Ein allgemeineres Ergebnis stammt von Brudno, Mat. Sbornik, n. Ser. **16** (58), 191—243 (1945).

K. Zeller.

**Goffman, Casper and G. M. Petersen:** Consistent limitation methods. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 367—369 (1956).

Es gibt kein Matrixverfahren, das alle beschränkten Folgen limitiert zu jeder beschränkten Folge kann aber ein Verfahren angegeben werden, das diese limitiert. Die Verff. werfen die Frage auf, ob eine Menge  $\mathfrak{A}$  von Verfahren angegeben werden kann, die in bezug auf beschränkte Folgen verträglich sind, so daß jede beschränkte Folge durch mindestens ein Verfahren limitiert wird. Diese Frage wird positiv beantwortet durch  $\mathfrak{A}$  = Menge aller permanenten positiven Verfahren, bei denen in jeder Zeile und Spalte mindestens einmal die Zahl  $\frac{1}{2}$  vorkommt. Ist  $\{s_n\}$  limitierbar durch  $A \in \mathfrak{A}$ , so ist  $A\text{-lim } s_n = \frac{1}{2}(u + l)$  mit  $u = \overline{\lim} s_n$ ,  $l = \underline{\lim} s_n$ , woraus sofort die Verträglichkeit folgt. Ist eine Menge  $\mathfrak{A}$  gegeben, so daß für jedes durch ein  $A \in \mathfrak{A}$  limitierbare  $\{s_n\}$  der  $A\text{-lim } s_n$  nur von  $u$  und  $l$  abhängt, so wird diese Abhängigkeit stets durch  $\frac{1}{2}(u + l)$  gegeben. Dies ist jedoch nicht die einzige Möglichkeit, die bei Mengen  $\mathfrak{A}$  auftreten kann.

A. Peyerimhoff.

**Volkov, I. I.:** Einige Fragen der linearen Matrixtransformationen. Doklady Akad. Nauk SSSR **106**, 591—594 (1956) [Russisch].

Verf. definiert „verstärkte“ Matrixverfahren  $A$  im Reellen durch

$$A\text{-lim } s_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^q a_{mn} s_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{q \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^q a_{mn} s_n,$$



falls das rechte Gleichheitszeichen gilt. Im Komplexen wird die Definition durch Verwendung von  $\operatorname{Re}$  und  $\operatorname{Im}$  modifiziert. Der  $A$ -Kern  $K_A(z_n)$  einer Folge besteht aus den  $z$ , die

$$\operatorname{Re} z e^{i\varphi} \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{q \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^q a_{mn} z_n e^{i\varphi}$$

für jedes reelle  $\varphi$  erfüllen. Verf. beweist Sätze über Totalpermanenz, Kernschrumpfung, totale Äquivalenz; z. B. Satz 2: Bei einem permanenten Verfahren  $A$  gilt genau dann

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{q \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^q a_{mn} z_n e^{i\varphi} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n e^{i\varphi}$$

für jedes reelle  $\varphi$  und alle komplexen  $\{z_n\}$ , wenn das Matrixverfahren nach Streichung von geeigneten endlich vielen Spalten und Zeilen totalpermanent ist (d. h. jeder Folge  $s_n \rightarrow +\infty$  bzw.  $-\infty$  den Grenzwert  $+\infty$  bzw.  $-\infty$  zuordnet). — Vgl. Birindelli, dies. Zbl. **66**, 305. K. Zeller.

**Peyerimhoff, Alexander:** On convergence fields of Nörlund means. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 335—347 (1956).

Nörlund methods  $N_p$  of limitation are defined as follows: A complex sequence  $\{p_n\}$  is given with  $P_n = \sum_{\nu=0}^n p_\nu \neq 0$  for  $n \geq N$ . For any complex sequence  $\{s_n\}$  one considers the means  $\sigma_n = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^n p_{n-\nu} s_\nu$  for  $n \geq N$ . If  $\sigma_n \rightarrow s$ , then  $s_n \rightarrow s (N_p)$ . The conditions for regularity of the method  $N_k$  are known to be (i)  $p_n = o(P_n)$  and (ii)  $\sum_{\nu=0}^n |p_\nu| = O(P_n)$ . The associated power series  $p(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu z^\nu$  then converges for  $|z| < 1$ . — Suppose now that  $N_p$  is regular, while  $N_r$  is associated with  $r(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu z^\nu$  which is regular in  $|z| \leq 1$ , and for which  $r(0) \neq 0$ ,  $r(1) \neq 0$ . Then  $q(z) = r(z)p(z)$  belongs to a regular  $N_q$ . The following result is obtained: If  $r(z) \neq 0$  for  $|z| = 1$  and  $p(z) \neq 0$  for  $|z| < 1$ , then  $s_n \rightarrow 0 (N_q)$  if, and only if,  $s_n = u_n + v_n$  where  $u_n \rightarrow 0 (N_r)$  and  $v_n \rightarrow 0 (N_p)$ . Moreover, the form of all such  $u_n$ , in terms of the zeros of  $r(z)$  in  $|z| < 1$ , is determined (compare, in the case where  $r(z)$  is a polynomial, G. M. Petersen, this Zbl. **47**, 299). Similar results are obtained regarding absolute limitation  $N_p$ :  $\sum |\sigma_n - \sigma_{n+1}| < \infty$ . They all are contained in a more general theorem comparing the methods  $N_p, N_q, N_r$ . W. W. Rogosinski.

**Gaier, Dieter:** Über die Äquivalenz der  $|B_k|$ -Verfahren. Math. Z. **64**, 183—191 (1956).

Eine Reihe (1)  $\sum a_n$  mit komplexen Gliedern und den Teilsummen  $s_n$  heißt  $B$ -summierbar zum Wert  $s$ , wenn die Transformation  $B(x; s_\nu) = e^{-x} \sum s_\nu x^\nu / \nu!$  für  $x > 0$  existiert und für  $x \rightarrow +\infty$  gegen den Grenzwert  $s$  strebt. Sie heißt  $|B|$ -summierbar, wenn noch das Integral  $\int_0^\infty \left| \frac{d}{dx} B(x; s_\nu) \right| dx < \infty$  ist. Sie heißt  $|B_k|$ -summierbar, wenn die durch Verschiebung sämtlicher Glieder um  $k$  Stellen nach rechts und Vorschalten von  $k$  Nullen erhaltene neue Reihe  $\underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_k + a_0 + a_1 + \dots$   $|B|$ -summierbar ist. Verf. beweist, gestützt auf gewisse auch an sich interessante Sätze der Funktionentheorie, insb. der Theorie der ganzen Funktionen, für die  $|B_k|$ -Verfahren ein Analogon zu den von ihm früher für die  $B_k$ -Verfahren gewonnenen Ergebnissen (dies. Zbl. **50**, 284; **66**, 305). Sämtliche  $|B_k|$ -Verfahren ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) sind in der Anwendung auf (1) äquivalent, wenn (2)  $a_n = O(K^n)$  ( $n \rightarrow \infty, K$  fest) gilt, jedoch nicht mehr, wenn (2) durch  $a_n = O(K^n n^{\varepsilon n})$  ( $\varepsilon > 0$ ) ersetzt wird. V. Garten.

**Davydov, N. A.:** Über eine Eigenschaft der Cesàroschen Methoden für die Summierung von Reihen. *Mat. Sbornik, n. Ser.* **38(80)**, 509—524 (1956) [Russisch].

Verf. beweist ein allgemeines Resultat über die Cesàroverfahren  $C_\alpha$  ( $\alpha > -1$ ). aus dem zahlreiche Taubersätze folgen. Hauptsatz: Wird die Folge  $S_n$  von einem  $C_\alpha$ -Verfahren zum Werte  $S$  limitiert und ist die abgeschlossene konvexe Menge  $G$  so beschaffen, daß es zu jedem  $\varepsilon > 0$  Intervalle  $\iota_k = \langle n_k, m_k \rangle$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) gibt mit folgenden Eigenschaften:  $n_k \rightarrow \infty$ ,  $\inf (m_k/n_k) > 1$ , die  $S_i$  mit  $i \in \iota_k$  haben von  $G$  einen Abstand  $< \varepsilon$ ; so liegt  $S$  in  $G$ . — Eine typische Folgerung lautet (Satz 1): Aus  $C_\alpha\text{-}\lim S_n = S$  und  $a_n = O(1/n)$  ( $n \rightarrow \infty$ ,  $n \in \iota_k$ ; wo  $\iota_k$  wie oben, abgesehen von der  $\varepsilon$ -Bedingung) folgt  $S_n \rightarrow S$  ( $n \rightarrow \infty$ ,  $n \in \iota_k$ ). — Hier sind natürlich die  $a_n$  die zu  $S_n$  gehörigen Reihenglieder. In weiteren Sätzen wird  $a_n = O(1/n)$  durch die entsprechende einseitige Bedingung oder allgemeinere Schwankungsbedingungen ersetzt, wobei etwas schwächere Behauptungen herauskommen. — Schließlich überträgt Verf. den Hauptsatz auf bewichtete Mittel (auch in Integralform); statt  $\inf (m_k/n_k) > 1$  verwendet er hier eine Bedingung, in die die Gewichte eingehen. Speziell betrachtet er die logarithmischen Mittel (Gewichte  $1/(n+1)$ ).

K. Zeller.

**Boyd, A. V.:** A Tauberian theorem for  $\alpha$ -convergence of Cesàro means. *Proc. Amer. math. Soc.* **7**, 59—61 (1956).

Let  $\sum a_n$  be a series and  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Gehring (this Zbl. **55**, 286) has introduced the concept of  $\alpha$ -convergence:  $\sum a_n$  is  $\alpha$ -convergent if given  $\varepsilon > 0$  there exists  $N(\varepsilon)$  such that for  $n > m \geq N(\varepsilon)$  we have

$$(1) \quad \text{l. u. b.} \left\{ \sum_{k=1}^l |a_{n_{k-1}} + \dots + a_{n_k-1}|^{1/\alpha} \right\} < \varepsilon,$$

where the l. u. b. is taken with respect to all sequences  $(n_k)$  with  $n_0 = m < n_1 < \dots < n_l - 1 = n$ . For  $\alpha = 0$ , (1) is to be interpreted as  $\left| \sum_{v=m}^n a_v \right| < \varepsilon$ , i. e.

0-convergence is ordinary convergence. A sequence  $A_n$  is  $\alpha$ -convergent if  $A_n$  is the  $n^{\text{th}}$  partial sum of an  $\alpha$ -convergent series.  $A_n^k$  ( $k > -1$ ) being the  $n^{\text{th}}$  Cesàro sum of order  $k$  of  $\sum a_n$ , we say that  $\sum a_n$  is summable  $(C, k; \alpha)$ , if  $A_n^k$  is  $\alpha$ -convergent.  $\sum a_n$  is summable  $(A; \alpha)$  to  $S$  if  $f(x) = \sum a_n x^n$  is of bounded  $\alpha$ -variation [i. e.  $f(x) \in W_\alpha$ , cf. loc. cit.] and  $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = S$ . Summability  $(C, -1; \alpha)$  means that  $\sum a_n$  is summ-

able  $(C, 0; \alpha)$  and that  $n a_n$  is  $\alpha$ -convergent to 0. — Let  $\sum b_n$  be the series with  $b_n = n a_n$  and  $B_n^k$  its  $n^{\text{th}}$  Cesàro mean of order  $k$ . We put  $A_n^{-1} = a_n$ ,  $B_n^{-1} = b_n$ . The following result is proved: Suppose that  $\sum a_n$  is summable  $(A; \alpha)$  to  $S$ . Let  $r \geq -1$ . Then  $\sum a_n$  is summable  $(C, r; \alpha)$  to  $S$  if and only if the sequence  $B_n^r / \binom{n+r+1}{r+1}$  is  $\alpha$ -convergent to 0. — For  $r = 0$  we obtain a theorem of Gehring (loc. cit., Theorem 4.3.3); for  $r = -1$ ,  $\alpha = 0$  this is Tauber's original theorem.

J. Horváth.

**Kangro, G.:** On extension of Peyerimhoff's method to double series. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **107**, 629—632 (1956) [Russisch].

Es werden Folgen  $\{\varepsilon_{mn}\}$  betrachtet, die  $A$ -summierbare Doppelfolgen  $\{U_{mn}\}$  in  $B$ -summierbare Reihen  $\sum U_{mn} \varepsilon_{mn}$  bzw.  $A$ -summierbare Reihen  $\sum u_{mn}$  in  $B$ -summierbare Reihen  $\sum u_{mn} \varepsilon_{mn}$  überführen (Summierbarkeitsfaktoren vom ersten bzw. zweiten Typ). Die Art der Summierbarkeit hängt dabei — außer von den Matrizen  $A$  und  $B$  — noch von der vorgeschriebenen Konvergenzart für die transformierte Folge ab (vgl. hierzu C. N. Moore, dies. Zbl. **19**, 18). Für Summierbarkeitsfaktoren vom ersten Typ werden unter der Annahme, daß  $A$  einen gewissen Mittelwertsatz erfüllt, notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben (es handelt sich dabei um die Fortführung früherer Ergebnisse des Ref.; dies. Zbl. **44**, 64). Dieses Ergebnis wird spezialisiert auf die Cesàroverfahren  $C_{\alpha, \beta}$  mit  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$  und auf gewisse



bewichtete arithmetische Mittel. Teilweise berühren sich die Ergebnisse mit denen von Moore (s. oben). Bei Summierbarkeitsfaktoren vom zweiten Typ wird für  $B$  nur die Identität zugelassen. Aus einem allgemeinen Satz werden Anwendungen für die obigen speziellen Verfahren  $A$  abgeleitet. Auch bei einfachen Reihen sind in diesem Fall — bei vorausgesetztem Mittelwertsatz für  $A$  — nur für spezielle Klassen von Matrizen  $B$  die Summierbarkeitsfaktoren bekannt (vgl. Jurkat, dies. Zbl. 42, 294; Jurkat-Peyerimhoff, dies. Zbl. 44, 63; 50, 67; Kangro, dies. Zbl. 56, 282).

*A. Peyerimhoff.*

**Stöhr, Alfred: Neuer Beweis einer Formel über das reelle arithmetisch-geometrische Mittel.** J. Ber. Deutsch. Math.-Verein. 58, 73—79 (1956).

Es wird für die Folgen  $a_0 > b_0 > 0$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ ,  $b_{n+1} = +\sqrt{a_n b_n}$  des arithmetisch-geometrischen Mittels  $M(a_0, b_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  durch Verwendung von vollständigen elliptischen Integralen erster Gattung und von konformen Abbildungen bewiesen, daß

$$2^{-n} \log(4 a_n \sqrt{a_n^2 - b_n^2}) = \frac{1}{2} \pi M(k_0, b_0) / M(a_0, \sqrt{a_0^2 - b_0^2}) + O(2^{-n} e^{-\alpha 2^n})$$

mit einem von  $n$  unabhängigen positivem  $\alpha$  gilt. Auf S. 77 ist in der Formel (7) der Nenner des Integrals auf der rechten Seite mit doppeltem Druckfehler belastet: richtig sollte er  $\sqrt{z_n(z_n - c_n)(c_n z_n - a_n^2)}$  heißen.

*J. Aczél.*

**Denjoy, Arnaud: La fonction minkowskienne complexe uniformisée éclaire la genèse des fractions continues canoniques réelles.** C. r. Acad. Sci., Paris 242, 1817—1823 (1956).

La fonction réelle et continue de Minkowski, définie pour tout  $x$  et  $0 < \alpha < 1$ , vérifie  $\chi(0, \alpha) = 1$ ,  $\chi(+\infty, \alpha) = 0$  et

$$(1) \quad \chi((p+p')/(q+q'), \alpha) = \alpha \chi(p'/q', \alpha) + (1-\alpha) \chi(p/q, \alpha),$$

avec  $p, p', q \geq 1$ ,  $q'$  entiers;  $p q' - q p' = 1$ . Soit  $x = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$  le développement de  $x$  en fraction continue. On a

$$(2) \quad \chi(x, \alpha) = \alpha^{a_0} - \alpha^{a_0} (1-\alpha)^{a_1} + \alpha^{a_0+a_2} (1-\alpha)^{a_1} - \alpha^{a_0+a_3} (1-\alpha)^{a_1+a_2} + \dots$$

On constate aisément que (2) vérifie (1). La formule (2) montre ainsi la relation étroite existant entre la fonction  $\chi(x, \alpha)$  de Minkowski et le développement de  $x$  en fraction continue. La fonction réelle  $\chi(x, \alpha)$  est transformée linéairement en  $\chi(x', \alpha) = A \chi(x, \alpha) + B$  par toute substitution  $x' = (p x + p')/(q x + q')$  du groupe modulaire. La fonction  $\chi(z, \alpha)$ , définie dans le demi-plan supérieur complexe  $\Pi$ , tendant vers  $\chi(x, \alpha)$  avec  $z$  tendant vers  $x$  réel, et présentant les mêmes substitutions modulaires que  $\chi(x, \alpha)$  admettra pour points critiques tous les points  $(p i + p')/(q i + q')$ ,  $(p e^{i\pi/3} + p')/(q e^{i\pi/3} + q')$ . Pour uniformiser  $\chi(z, \alpha)$ , il faut englober tous ces points dans un système de coupures  $\Omega$  ne divisant pas  $\Pi$ . Celui que l'A. adopte met en évidence la génération d'un certain développement canonique complet de  $x$ , uniquement formé de chiffres 0 et 1, indéfini dans les deux sens, et se répartissant en doublets successifs identiques à 0, 1 ou à 1, 0.

*C. Uluçay.*

**Denjoy, Arnaud: La fonction minkowskienne complexe uniformisée détermine les intervalles de validité des transformations de la fonction réelle.** C. r. Acad. Sci., Paris 242, 1924—1930 (1956).

Dans cette note l'A. poursuit l'étude de la note précédente. Il montre: 1. que le système de coupures  $\Omega$  met en évidence sur l'axe réel, les intervalles de validité pour les transformations  $\chi(x', \alpha) = A \chi(x, \alpha) + B$ , tels que dans chaque intervalle les coefficients  $A, B$  sont indépendants de  $x$ , tandis qu'ils varient discontinument aux extrémités de chacun de ces intervalles qui sont les points d'aboutissement des coupures; 2. que l'expression analytique de  $\chi(z, \alpha)$  dans le plan complexe est donnée par

$$\chi(z, \alpha) = y(t) = Y(t) + t^a (1-t)^b P(t) \quad \text{où} \quad Y(t) = h \int_0^t \frac{t^a (1-t)^b}{(a+bt-a)^2} dt,$$

avec  $P(t)$ , une fonction uniforme quelconque dans le plan des  $t$ ;  $h, a, b$  s'exprimant à l'aide de  $\alpha$ .

C. Uluçay.

**Denjoy, Arnaud: Propriétés différentielles de la fonction minkowskienne réelle. Statistique des fractions continues.** C. r. Acad. Sci., Paris 242, 2075—2079 (1956).

Die Note enthält Beweise für früher mitgeteilte Ergebnisse (vgl. dies. Zbl. 8, 202 und 13, 155). — I. Die reelle, stetige, abnehmende Funktion  $\kappa = \kappa(x; a)$  sei definiert durch folgende Eigenschaften:  $\kappa((p + p')(q + q')^{-1}; a) = a \kappa(p' q'^{-1}; a) + (1 - a) \kappa(p q^{-1}; a)$ ,  $\kappa(\infty; a) = 0$ ,  $\kappa(0; a) = 1$ , wobei  $p, p', q, q'$  ganze Zahlen mit  $q \geq 1$ ,  $q' \geq 0$  und  $p q' - p' q = 1$ . Es wird gezeigt: Es besitzt  $\kappa$  nirgends eine endliche Ableitung, die von Null verschieden ist. Im Falle, daß die extremen z. B. vorderen Derivierten von  $\kappa$  in einem Punkt  $x$  beide negativ und endlich sein sollten, ist ihr Quotient unabhängig von  $x$  größer als  $17/16$ . — II. Es seien  $a_{M_1} \geq a_{M_2} \geq \dots \geq a_{M_q} \geq \dots \geq a_{M_n} \geq 1$  die  $n$  ersten, nach abnehmender Größe geordneten positiven Teilnenner (quotients incomplets) der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung (fraction continue normale) von  $x$ . Ferner sei  $q \geq 1$  eine ganze Zahl. II 1. Es sei  $\theta(u) > 0$  wachsend mit konvergentem  $\Sigma(\theta(n))^{-1}$  und mit  $\theta(k')/\theta(k) \leq k'/k$  für  $k'/k > 1$ . Dann existiert zu „fast jedem“  $x$  ein  $n_q(x)$  derart, daß  $a_{M_q} < n(\theta(\log n))^{1/q}$  für  $n > n_q(x)$ . — II 2. Es sei  $\varphi(u) > 0$  wachsend mit divergentem  $\Sigma(\varphi(n))^{-1}$  und mit  $\varphi(u')/\varphi(u) \leq u'/u$  für  $u'/u > 1$  ( $u > 1$ ). Dann existiert für „fast jedes“  $x$  eine Folge natürlicher Zahlen  $n_i$  derart, daß  $a_{M_q} > n_i(\varphi(\log n_i))^{1/q}$ . Die Ausnahmenullmengen, auf welche sich der Ausdruck „fast alle“ bezieht, sind in der Arbeit näher erklärt.

Otto Haupt.

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

• Erdélyi, A.: Asymptotic expansions. New York: Dover Publications, Inc. 1956. VI, 108 p. \$ 1,35 paper.

This small book contains the notes of a course given by the author in 1954 and is a very readable introduction into the subject. Several notions and results are new and useful references are given for further study. Chapter I (Asymptotic series) introduces the concepts of asymptotic sequence and expansion.  $R$  being a topological space and  $x_0 \in R$ , the sequence  $\{\Phi_n\}$  of numerical functions defined on  $R$  is called an asymptotic sequence for  $x \rightarrow x_0$  if  $\Phi_{n+1} = o(\Phi_n)$  as  $x \rightarrow x_0$ .  $\{\Phi_n\}$  being an asymptotic sequence, the formal series  $\Sigma a_n \Phi_n$  is called an asymptotic series.  $f(x)$  being a function defined on  $R$ , the asymptotic series  $\sum_{n=1}^N a_n \Phi_n$  is an asymptotic expansion to  $N$  terms of  $f(x)$  as  $x \rightarrow x_0$ , if  $f(x) = \sum_{n=1}^N a_n \Phi_n(x) + o(\Phi_N(x))$  as  $x \rightarrow x_0$ . An asymptotic expansion to any number of terms ( $N = \infty$ ) is called simply an asymptotic expansion and is indicated by  $f \sim \Sigma a_n \Phi_n$ . Numerous examples and elementary theorems on operations with asymptotic expansions and series are given.  $f_1$  and  $f_2$  defined on  $R$  are called asymptotically equal with respect to  $\{\Phi_n\}$  if  $f_1 - f_2 = o(\Phi_n)$  as  $x \rightarrow x_0$  for every  $n$ . Two asymptotically equal functions have the same asymptotic expansion, and given an asymptotic series  $S$  the class of all functions which have  $S$  as an asymptotic expansion is called the sum of  $S$ . It is proved that every asymptotic series has a sum, a result known before only for special  $\Phi_n$  (cf. van der Corput, Asymptotic expansions I. Fundamental theorems of Asymptotics. University of California, Berkeley 1954). In Chapter II (Integrals) several methods for obtaining asymptotic expansions of definite integrals depending on a parameter in terms of that parameter are discussed. A general theorem on the expansion of integrals of the form  $\int_{\alpha}^{\beta} g(t) h(t) dt$ , with the help of repeated integration by parts, is given and applied to Laplace and Fourier integrals. Next a new extension



of a result of Laplace (cf. Pólya-Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin 1925, II. Abschnitt, Aufgabe 201) is proved, concerning the asymptotic behaviour of (1)  $f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) e^{xh(t)} dt$ , where  $h(t)$  has a maximum at  $t = \alpha$ . The

method of proof is a reduction to Laplace integrals with help of the change of variables  $u = h(\alpha) - h(t)$ . The method of steepest descents can then be applied to any integral (1), transforming it into one where  $h(t)$  has a stationary value at certain

points. The method of stationary phase, which permits to deal with (2)  $\int_{\alpha}^{\beta} g(t) e^{ixh(t)} dt$

is briefly mentioned and a theorem of the author [J. Soc. industr. appl. Math. 3, 17—27 (1955)] concerning integrals (2) is proved. The chapter contains many examples. Chapter III (Singularities of differential equations) deals with the asymptotic expansions as  $x \rightarrow \infty$  of solutions of (3)  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  ( $a \leq x < \infty$ ). In the more interesting case when at least one solution of (3) has an essential singularity at  $x = \infty$ , then  $\infty$  is called an irregular singularity of (3). For this case Thomé's normal series are introduced and the asymptotic expansion of the solution is obtained transforming (3) into an integral equation of Volterra type and solving it by successive approximations. Stokes' phenomenon is explained and illustrated by the expansions of Bessel functions of order zero. In Chapter IV (Differential equations with a large parameter) asymptotic expansions in terms of  $\lambda$  are obtained for the solutions of Liouville's equation (4)  $y'' + [\lambda^2 p(x) + r(x)]y = 0$  ( $a \leq x \leq b$ ),  $p(x)$  twice continuously differentiable,  $r(x)$  continuous. If  $p(x) > 0$  in  $a \leq x \leq b$ , then easy classical methods are used, but for the case when there is a transition point, i. e. one in which  $p(x)$  changes sign, a more recent method due to Langer is used, which compares (4) with the equation  $y'' - xy = 0$ , whose solutions (the Airy functions) are also discussed. Bessel and Hankel functions  $J_{\lambda}$  and  $K_{\lambda}$  serve as examples as  $\lambda \rightarrow \infty$ . Mention is made of recent research on asymptotic expansions of solutions of equations more general than (4); see also the author's lecture [Proc. internat. Congr. Math. 1954, Amsterdam 3, 92—101 (1956)]. A bibliography can be found in: Asymptotic solutions of differential equations with turning points. Review of the literature. (Technical Report 1. Pasadena: California Institute of Technology, Department of Mathematics, 1953).

J. Horváth.

**Mairhuber, John C.: On Haar's theorem concerning Chebychev approximation problems having unique solutions.** Proc. Amer. math. Soc. 7, 609—615 (1956).

Es sei  $M$  eine mindestens  $n$  Punkte enthaltende kompakte Menge im euklidischen,  $k$ -dimensionalen Raum  $E_k$ ;  $n$  eine vorgegebene natürliche Zahl  $n \geq 2$ . Ferner seien  $f_{\nu}$  stetige Funktionen mit  $M$  als Definitionsbereich,  $\nu = 1, \dots, n$ . Man setze

$L(x; (a_{\nu})) = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} f_{\nu}(x)$ . Nach A. Haar [Math. Ann. 18, 294—311 (1918)] gilt

dann: Zu jeder in  $M$  stetigen Funktion  $f$  existiert genau eine Tschebyscheffsche Approximation  $f^*(x) = L(x; (a_{\nu}^*))$  [also mit  $\max(|f(x) - f^*(x)|; x \in M) \leq \max(|f(x) - L(x; (a_{\nu})|; x \in M)$  bei beliebigem  $(a_{\nu})$ ] dann und nur dann, wenn jedes  $L(x; (a_{\nu}))$  mit  $(a_{\nu}) \neq (0)$  höchstens  $n-1$  Nullstellen in  $M$  besitzt, oder — was damit gleichwertig — wenn  $\text{Det}(f_{\nu}(x_{\mu})) \neq 0$  für beliebige, verschiedene  $n$  Punkte  $x_{\mu} \in M$ ,  $\mu = 1, \dots, n$  (Bedingung (D)), Verf. zeigt: Eine mindestens  $n$  Punkte ( $n \geq 2$ ) enthaltende kompakte Menge  $M$  in  $E_k$  ist Träger eines der Bedingung (D) genügenden Systems von  $n$  in  $M$  stetigen Funktionen  $f_{\nu}(x)$  genau dann, wenn  $M$  homöomorph ist zu einer abgeschlossenen Teilmenge der Kreisperipherie. Wegen des Beweises muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

Otto Haupt.

**Rutovitz, D.: On the  $L_p$ -convergence of Eigenfunction expansions.** Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 7, 24—38 (1956).

Betrachtet wird (1)  $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$  mit für  $0 \leq x \leq b$  stetigem

$q(x)$ ; hierbei ist  $b > 0$  eine reelle Zahl („Sturm-Liouville-Fall“) oder  $+\infty$  („singulärer Fall“).  $\varphi(x, \lambda)$  und  $\chi_b(x, \lambda)$  seien Lösungen von (1) mit  $\varphi(0, \lambda) = \sin \alpha$ ,  $\varphi'(0, \lambda) = -\cos \alpha$  bzw. (für  $b < \infty$ )  $\chi_b(b, \lambda) = \sin \beta$ ,  $\chi'_b(b, \lambda) = -\cos \beta$ . Es sei  $\omega_b(\lambda) = \varphi \chi'_b - \chi_b \varphi'$ . Es sei  $k_b(t)$  die für  $t = 0$  verschwindende halbstetige Stufenfunktion, die bei jedem Eigenwert  $t$  um den Betrag  $a_{b,t}/\pi \omega'(t)$  wächst, d. h. bei jedem Wert  $\lambda = t$ , für den  $\omega_b(\lambda) = 0$  und demnach  $\chi_b = a_{b,\lambda} \varphi$  ist.  $L_{p,b}$  bzw.  $\mathfrak{L}_p(b)$  sei der Raum der reellwertigen Funktionen  $f$  bzw.  $F$  einer reellen Variablen, für die

$$\|f\|_{p,b} = \left( \int_0^b |f|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad \left( \int_{-\infty}^{\infty} |F|^p dk_b(t) \right)^{1/p} < \infty$$

ist. Weiterhin sei  $\Phi_b f = \int_0^b f(x) \varphi(x, t) dx$  ( $b < \infty$ ),  $\Psi_{\omega,b} f = \int_{-\omega}^{\omega} F(t) \varphi(x, t) dk_b(t)$ ,  $\Theta_{\omega,b} = \Psi_{\omega,b} \Phi_b$ . Dann gilt: I. Die Sturm-Liouville-Entwicklung einer Funktion  $f \in L_{p,b}$  konvergiert im Mittel gegen die Funktion, d. h.  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|\Theta_{\omega,b} f - f\|_{p,b} = 0$ ; ferner gilt  $\|\Theta_{\omega,b} f\|_{p,b} \leq A_{p,b} \|f\|_{p,b}$ , wobei  $A_{p,b}$  nicht von  $f$  abhängt. II. Es sei  $q^*(x) = x q(x)$ ,  $q(x)$  stetig,  $q^* \in L(0, \infty)$  und von beschränkter Variation,  $f \in L_{p,\infty}$ ,  $1 < p \leq 2$ . Dann gilt  $\|\Theta_{\omega} f - f\|_{p,\infty} \rightarrow 0$  für  $\omega \rightarrow \infty$ . Ferner gibt es zu jedem  $q(x)$ , das den vorstehenden Bedingungen genügt, eine Konstante  $c$  und eine nur von  $p$  abhängige Zahl  $A_p$  derart, daß  $\|\Theta_{\omega} f\|_{p,\infty} \leq A_p \|f\|_{p,\infty}$  für alle  $\omega > c$  gilt.

E. Kreyszig.

Alexits, G.: Ein Summationssatz für Orthogonalreihen. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 7, 5–8 u. russ. Zusammenfassg. 8–9 (1956).

Sia  $\{\varphi_n(x)\}$  un arbitrario sistema ortogonale sull'intervallo finito  $(a, b)$ . L'A. da un criterio per la  $(C, \alpha)$ -sommabilità, con  $\alpha > 0$ , della serie (\*)  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n(x)$ , il quale in certi casi (di cui l'A. da un esempio) si rivela più fine del noto criterio di Menchoff [Fundamenta Math. 8, 56–108 (1926)]. Il criterio in questione è il seguente: Se  $\{q_n\}$  è una successione monotona, decrescente, di numeri positivi per la quale  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\sqrt{n}} < \infty$  e se  $c_n = O(q_n)$  allora la serie (\*) è  $(C, \alpha)$ -sommabile quasi dappertutto per ogni  $\alpha > 0$ . La dimostrazione è fondata sul seguente lemma. La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$  sia convergente e sia  $c_n = O(q_n)$ , essendo per i numeri  $q_n$  soddisfatte le seguenti condizioni: (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} |q_n - q_{n+1}| < \infty$ , (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n q_{2^n}^2 < \infty$ , allora la serie (\*) è quasi dappertutto  $(C, \alpha)$ -sommabile per ogni  $\alpha > 0$ .

J. Cecconi.

Gosselin, Richard P.: On the convergence of Fourier series of functions in an  $L^p$  class. Proc. Amer. math. Soc. 7, 392–397 (1956).

Fie Folge  $\{n_k\}$  genüge der Lückenbedingung  $n_{k+1}/n_k \geq \lambda > 1$  für alle  $k$ . Unter  $[y]$  die größte ganze Zahl  $\leq y$  verstanden, sei  $L_k = [(n_{k+1} - n_k)/\log n_{k+1}]$ . Verf. zeigt im Anschluß an Kolmogoroff zunächst: Wenn  $f(x)$  zur Klasse  $L^2$  gehört, gibt es eine Folge positiver ganzer Zahlen  $\{m_\nu\}$ , die  $L_k$  aufeinander folgende Glieder in jedem Intervall  $(n_k, n_{k+1})$  enthält derart, daß die Teilfolge  $s_{m_\nu}(x; f)$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) der Teilsummen der Fourierreihe von  $f(x)$  fast überall gegen  $f(x)$  konvergiert. Ein entsprechender Satz wird auch für den komplizierteren Fall  $L^p$  ( $1 < p < 2$ ) statt  $L^2$  bewiesen.

V. Garten.

Mohanty, R. and M. Nanda: On the logarithmic mean of the derived conjugate series of a Fourier series. Proc. Amer. math. Soc. 7, 397–400 (1956).

Es wird ein Analogon zu gewissen Ergebnissen von O. Szász (dies. Zbl. 19, 15) für die konjugierte Reihe einer Fourierreihe bewiesen:  $f(t)$  sei in  $(-\pi, \pi)$   $L$ -integra-



bel und besitze die Periode  $2\pi$ ,

$$f(t) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} A_n(t), \quad A_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Die Ableitung der konjugierten Reihe von (1) bei  $t = x$  ist  $-\sum_1^{\infty} n(a_n \cos nx - b_n \sin nx) = -\sum_1^{\infty} n A_n(x)$ . Die logarithmischen Mittel 1. Ordnung von (2) seien mit  $\sigma_n$  bezeichnet und es werde  $\Phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$ ,  $h(t) = \Phi(t)/4 \sin \frac{1}{3}t - d$  gesetzt, wobei  $d$  eine Funktion von  $x$  ist. Wenn dann die Bedingung  $\int_t^{\pi} \frac{|h(u)|}{u} du = o\left(\log \frac{1}{t}\right)$  für  $t \rightarrow 0$  erfüllt ist, so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_{2^n} - \sigma_n) = d\pi^{-1} \log 2$ .  
V. Garten.

### Spezielle Funktionen:

Fulks, W.:  $\Gamma(z)$  at minus infinity. Amer. math. Monthly **63**, 484 (1956).

Herzog, Fritz and George Piranian: Some properties of the Fejér polynomials. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 379—386 (1956).

Die für verschiedene Untersuchungen bei Fourier- und Potenzreihen nützlichen Fejérschen Polynome

$$P_n(z) = \frac{1}{n} + \frac{z}{n-1} + \dots + \frac{z^{n-1}}{1} - \frac{z^n}{1} - \frac{z^{n+1}}{2} - \dots - \frac{z^{2n-1}}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

werden hier auf Lage der Nullstellen und Maximum  $M_n = \max_{|z|=1} |P_n(z)|$  hin untersucht. Die Nullstellen häufen sich gegen  $|z| = 1$  und lassen sich außerdem in Sektoren von sehr engen Kreisringen einschließen. Während  $P_n(z)$  für ungerades  $n$  keine negativen Wurzeln hat, besitzt es für gerades  $n$  zwei negative Wurzeln an den Stellen  $z = -1 \pm n^{-1}(\log n + \log \log 16) + o(1/n)$ . Für  $M_n$  wird  $M_n \rightarrow M = 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = 3,704 \dots$  ( $n \rightarrow \infty$ ) bewiesen und ferner erwähnt, daß sogar stets  $M_n \leq M$  gilt.  
D. Gaier.

Miles jr., E. P. and Ernest Williams: A basic set of polynomials for the Euler-Poisson-Darboux and Beltrami equations. Amer. math. Monthly **63**, 401—404 (1956).

Bezeichnet man mit  $E_{ij}$  die Gleichung  $\sum_{n=1}^m u_{x_n x_n} + (-1)^i (u_{tt} + j k t^{-1} u_t) = 0$ ,  $i, j = 0, 1, 2, \dots$ , so gibt  $i = j = 0$  die Laplacesche Gleichung,  $i = 1, j = 0$  die Wellengleichung,  $i = j = 1$  die Euler-Poisson-Darbouxsche und  $i = 0, j = 1$  die Beltramische Gleichung. Verff. leiten aus den früher (dies. Zbl. **65**, 300) gegebenen Basisreihen von Polynomlösungen für  $E_{00}, E_{10}$  solche für  $E_{11}$  und  $E_{01}$  ab; diese führen für  $k > 0$  unmittelbar zu einer formalen Lösung des Cauchyschen Problems für  $E_{11}$  und  $E_{01}$ .  
O. Volk.

Smith, R. C. T.: Generating functions of Appell form for the classical orthogonal polynomials. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 636—641 (1956).

Una successione di polinomi  $\{P_n(x)\}$  chiamasi del tipo di Appell se esiste una funzione generatrice  $K(x, w)$  della forma

$$K(x, w) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n P_n(x) = A(g(w)) \psi(xg(w))$$

con  $g(w) = g_1 w + g_2 w^2 + \dots$ ,  $A(y) = 1 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots$ ,  $\psi(t) = 1 + \psi_1 t + \psi_2 t^2 + \dots$ , con  $g, a, \psi$  costanti. L'A. dimostra che i polinomi di Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  sono polinomi di Appell soltanto nei seguenti casi:  $\alpha - \beta = -1, 0, 1$ .  
G. Sansone.

Chak, A. M.: A class of polynomials and a generalization of Stirling numbers. Duke math. J. **23**, 45—55 (1956).

Gegenstand der Untersuchung sind die Polynome

$$G_{n,k}^{(\alpha)}(x) = (k-1)^n L_{n,1/(k-1)}^{(\alpha-k+1)/(k-1)}(x) = x^{-\alpha-kn+n} e^x (x^k D)^n e^{-x} x^\alpha,$$

die sowohl in  $\alpha$  wie in  $x$  vom Grade  $n$  sind. Es werden Rekursionen, erzeugende Funktionen, Entwicklungen nach den Laguerreschen Polynomen  $L_i^{(\alpha)}(x)$  u. a. gegeben. Ferner werden die Polynome  $P_{n,r}^{(\alpha)}(x) = (n!)^{-1} e^x x^{-\alpha} D^n (x^{n+\alpha} e^{-x^r}) = (n!)^{-1} L_{n,r}^{(\alpha)}(x^r)$  in ähnlicher Weise untersucht. Zum Schluß werden die von L. Toscano im Zusammenhang mit einer Verallgemeinerung der Stirlingschen Zahlen eingeführten Polynome verallgemeinert. Vgl. L. Toscano, dies. Zbl. **23**, 314; **40**, 32. Druckfehler: lies S. 47: Leibniz's; S. 55: Funktionalbeziehungen; J. F. Steffensen; Rivista.

O. Volk.

**Campbell, Robert:** Détermination de la famille des polynomes orthogonaux dont les dérivés sont orthogonaux. C. r. Acad. Sci. Paris **242**, 1110—1111 (1956).

Ausgehend von den dreigliedrigen Rekursionen für die orthogonalen Polynome  $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots$ :  $P_n(x) = (x + r_n)P_{n-1}(x) - C_n P_{n-2}(x)$ , bzw.  $P'_n(x) = n(n-1)^{-1}(x + \varrho_n)P'_{n-1}(x) - \gamma_n P'_{n-2}(x)$ ,  $C_n, \gamma_n$  positiv,  $n \geq 2$ , erhält Verf. 4 Bedingungsgleichungen für die Größen  $r_n, C_n, \varrho_n, \gamma_n$ , deren Auflösung keine Schwierigkeiten bietet; die so erhaltenen Rekursionen bestimmen die orthogonalen Polynomensysteme, deren Ableitungen wieder ein orthogonales System bilden.

O. Volk.

**Ragab, F. M.:** New integrals involving Bessel functions. Acta math. **95**, 1—8 (1956).

Im Anschluß an Formeln von T. M. MacRobert (dies. Zbl. **27**, 213; **52**, 69) und des Verf. (dies. Zbl. **52**, 296; **55**, 298; **56**, 65; **57**, 57) werden die Integrale

$$\int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^{k-1} K_m(x\lambda^j) K_n(x\lambda^j) d\lambda, \quad \int_0^\infty \lambda^{k-1} f_l(\lambda) K_m(x\lambda^j) K_n(x\lambda^j) d\lambda$$

mit  $f_l(\lambda) = K_l(2\lambda)$  bzw.  $= J_l(2\lambda)$  für  $j = +1$  bzw.  $= -1$  durch hypergeometrische Reihen ausgewertet.

O. Volk.

**Frank, Evelyn:** A new class of continued fraction expansions for the ratios of hypergeometric functions. Trans. Amer. math. Soc. **81**, 453—476 (1956).

Verf. untersucht in dieser Arbeit die Entwicklung des Quotienten zweier hypergeometrischer Funktionen in einen Kettenbruch der Form

$$1 + \frac{a_1 z}{b_1 z + 1} + \frac{a_2 z}{b_2 z + 1} + \frac{a_3 z}{b_3 z + 1} + \dots$$

Wenn  $F(a, b, c, z)$  die hypergeometrische Funktion ist, so werden in § 2 zunächst die Kettenbruchentwicklungen für die Quotienten folgender hypergeometrischer Funktionen aufgestellt:

$$\begin{aligned} F(a, b, c, z) : F(a, b+1, c+1, z), & \quad F(a, b, c, z) : F(a+1, b, c+1, z), \\ F(a, b, c, z) : F(a+1, b, c, z), & \quad F(a, b, c, z) : F(a, b+1, c, z), \\ F(a, b, c, z) : F(a, b, c+1, z), & \quad F(a, b, c, z) : F(a+1, b+1, c+1, z). \end{aligned}$$

In § 3 werden die Konvergenzeigenschaften dieser Kettenbruchentwicklungen näher untersucht. Verf. gewinnt das Ergebnis, daß diese Kettenbruchentwicklungen von gewissen Polen abgesehen außerhalb und innerhalb eines Schnittes entlang des Einheitskreises gegen verschiedene Funktionen konvergieren. Für die zunächst formale Entwicklung

$$(1) \quad \frac{F(a, b, c, z)}{F(a, b+1, c+1, z)} \sim \frac{1 - \frac{a(c-b)z}{c(c+1)}}{\frac{(a-b)z}{c+1} + 1} - \frac{\frac{(a+1)(c+1-b)z}{(c+1)(c+2)}}{\frac{(a+1-b)z}{c+2} + 1} - \frac{\frac{(a+2)(c+2-b)z}{(c+2)(c+3)}}{\frac{(a+2-b)z}{c+3} + 1} - \dots$$

gilt bezüglich der Konvergenz folgendes: Für  $|z| < 1$  ist der obige Kettenbruch



gleich dem Quotienten

$$F(a, b, c, z): F(a, b+1, c+1, z).$$

Für  $|z| > 1$  ist der obige Kettenbruch gleich dem Quotienten

$$b(a-c) F(a, a+1-c, a+1-b, 1/z): c(a-b) F(a, a-c, a-b, 1/z)$$

Analoges gilt für die anderen Entwicklungen. In § 4 werden besonders solche Kettenbruchentwicklungen der Quotienten zweier hypergeometrischer Funktionen betrachtet, die im Bereich  $|z| < 1$  gegen dieselbe Funktion konvergieren. In den §§ 5 u. 6 werden die Kettenbruchentwicklungen spezieller Funktionen untersucht, die durch Spezialisierung der Kettenbruchentwicklung (1) gewonnen werden und dabei verschiedene Kettenbruchentwicklungen für elementare Funktionen ermittelt.

*J. Mall.*

## Funktionentheorie:

**Herzog, Fritz and George Piranian:** Some point sets associated with Taylor series. Michigan math. J. 3, 69—75 (1956).

Let  $E$  be a set of type  $F_\sigma$  on the unit circle  $C$ . It is proved that there exists a function  $f(z) = \sum a_m z^m$  such that: (i) the sequence  $\{s_m(z)\}$  of its partial sums converges for  $z \in E$ , (ii)  $\{s_m(z)\}$  is unbounded at every point  $z \in C - E$ . Moreover, if  $\{B_k\}$  is any denumerable set of regular Toeplitz sequence-to-sequence transformations, then it may be required also that (iii) for each  $k$ , the sequence  $B_k(s_m(z))$  exists and is unbounded at every point  $z \in C - E$ . If the set  $E$  is of full measure, then  $f(z)$  can be constructed in such a way that  $\sum |a_m|^2 < \infty$ . A corresponding theorem for trigonometric series: If  $E$  is a set of type  $F_\sigma$  on  $I = [0, 2\pi]$ , then there exists a series  $\sum a_m \cos mx$  which converges on  $E$  and whose partial sums are unbounded at each point of  $I - E$ . If  $E$  is of full measure, one may choose the series so that  $\sum a_m^2 < \infty$ . In the proof, essential use is made of properties of the polynomials  $g(z, n) = [(z^n - 1)/(z - 1)]^2$ .

*B. Sz.-Nagy.*

**Daïovitch, Voïn:** Quelques théorèmes sur l'existence des valeurs limites de la résultante de certaines classes de fonctions analytiques. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 2087—2090 (1956).

Für seinen in einer früheren Note (vgl. dies. Zbl. 66, 54) aufgestellten Satz gibt Verf. einen neuen Beweis und leitet daraus weitere Sätze gleicher Art her.

*St. Schottlaender.*

**Wintner, Aurel:** On an absolute constant pertaining to Cauchy's „principal moduli“ in bounded power series. Math. Scandinav. 4, 108—112 (1956).

Ist  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  regulär und  $|f(z)| < 1$  in  $|z| < 1$ , und ist  $g(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$  gesetzt ( $0 \leq r \leq 1$ ), so gilt: (a)  $\sup_{0 \leq r \leq 1} r/g(r) > 1/3$ ; (b) die Konstante  $1/3$  in

(a) ist bestmöglich. Dabei folgt (a) aus Ergebnissen von Bohr [z. B. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1916, S. 26—28], und (b) gewinnt man durch Betrachtung der Funktionen  $f_a(z) = (z-a)/(1-az)$  ( $0 < a < 1$ ) für  $a \rightarrow 1$ .

*D. Gaier.*

**Berg, Lothar:** Asymptotische Entwicklung einer Klasse von Integralen. Z. angew. Math. Mech. 36, 245—246 (1956).

**Trošín, G. D.:** Über die Interpolation der in einem Winkelraum analytischen Funktionen. Mat. Sbornik, n. Ser. 39 (81), 239—252 (1956) [Russisch].

Pour  $\varrho$  donné  $\geq 1/2$ ,  $W_\varrho$  désigne la classe des fonctions  $f(z)$  analytiques dans l'angle  $|\arg z| < \pi/2\varrho$  admettant dans cet angle une limite quand  $z$  tend vers zéro et une majoration  $|f(z)| < \exp |z|^\varrho + \varepsilon$  pour  $|z| > R(\varepsilon)$ . Les  $\lambda_n$  ( $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ ) sont donnés dans un angle plus petit  $|\arg z| < \pi/2\varrho - \omega$ . Pour une suite  $\{a_n\}$  donnée, on cherche  $f(z) \in W_\varrho$  telle que  $f(\lambda_n) = a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Une condition nécessaire évidente est  $\limsup \log |a_n|/\log |\lambda_n| \leq \varrho$ . L'A. établit une condition nécessaire et suffisante, portant sur les seuls  $\lambda_n$ , pour que le problème d'interpolation considéré

admette une solution au moins pour tout choix des  $a_n$  satisfaisant à la condition ci-dessus. G. Bourion.

**Erdős, P. and A. Rényi:** On the number of zeros of successive derivatives of analytic functions. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **7**, 125—143, russ. Zusammenfassg. 143—144 (1956).

Let  $N_k(f(z), r)$  denote the number of zeros of  $f^{(k)}(z)$  in  $|z| \leq r < R$ . The following theorems, which include and extend results of Pólya (*Bull. Amer. math. Soc.* **49**, 178—191 (1943)) and Evgrafov (*Interpolationsaufgabe von Abel-Gončarov*, Moskau 1954) are proved. Theorem 1. If  $f(z)$  is regular in  $|z| < 1$  and  $0 < r < 1$ , then  $\lim_{k \rightarrow +\infty} k^{-1} N_k(f(z), r) \leq K(r)$ , where  $K(r)$  is the only positive root of  $K = r(1 + K)^{1+1/K}$ . Theorem 2. Let  $g(r) \uparrow +\infty$  in  $0 < r < +\infty$ . Let  $x = h(y)$  denote the inverse function of  $y = g(x)$ . Then, if  $f(z)$  is an integral function which satisfies  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \{g(r)\}^{-1} \log M(r) < 1$ , we have  $\lim_{k \rightarrow +\infty} k^{-1} N_k(f(z), 1) h(k) \leq e^2$ .

Theorem 3. If  $f(z)$  is an integral function and  $z_k$  is the zero of  $f^{(k)}(z)$  which is nearest the origin ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), and if  $x = H(y)$  is the inverse function of  $y = \log M(x)$ , then  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \{k |z_k|\}^{-1} H(k) \leq e (\log 2)^{-1}$ . Theorem 4. If  $f(z)$  is regular in  $|z| < R$  and is not a polynomial, then  $\lim_{k \rightarrow +\infty} k |z_k| \geq R \log 2$ . The proofs are based on Jensen's formula and Rouché's theorem. N. A. Bowen.

**Levin, B. J(a):** Distribution of roots of exponential sums. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **108**, 20—22 (1956) [Russisch].

Notations:  $n(r, \delta, \theta)$  est le nombre des zéros de la fonction entière  $f(z)$  dans le secteur  $\delta < \arg z < \theta$ ,  $|z| < r$ ; la densité  $\Delta(\delta, \theta)$  est par définition la limite de  $n(r, \delta, \theta)/r$  pour  $r \rightarrow \infty$ , quand cette limite existe. La longueur de l'arc frontière d'une région convexe  $I$  entre les points de contact des droites d'appui normales aux directions  $\delta$  et  $\theta$  est notée  $S_I(\delta, \theta)$ . On introduit  $\Delta(\delta + 0, \theta - 0)$  etc. — Soit alors  $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}$  où  $\sum |a_k| < +\infty$  et où les conjugués  $\bar{\lambda}_k$  des exposants sont sur la frontière de l'ensemble convexe fermé  $I$ ; si  $I$  est l'ensemble minimal satisfaisant à ces conditions, et si les directions  $\delta$  et  $\theta$  ne sont pas perpendiculaires à des côtés rectilignes de  $I$ , la densité  $\Delta(\delta, \theta)$  existe, et  $\Delta(\delta \pm 0, \theta \pm 0) = (1/2\pi) S(\delta \pm 0, \theta \pm 0)$ . — Dans l'espace  $E_J$  des fonctions entières du type moyen de l'ordre 1 ayant leur diagramme indicateur dans la région convexe bornée  $J$ , l'A. introduit la norme  $\|f\| = \sup [f(r e^{i\theta}) e^{-K(\theta)r}]$  ( $r > 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ), où  $K(\theta)$  désigne la fonction d'appui de  $J$ . Un théorème analogue au précédent est énoncé pour une fonction limite selon cette norme d'une suite de polynômes exponentiels tels que les  $\bar{\lambda}_k$  appartiennent à la frontière de  $J$ . — L'A. examine en particulier le cas où  $J$  est un polygone, puis le cas  $f(z) = \sum \varphi(n) z^n/n!$  avec  $\varphi(z)$  presque périodique (à spectre borné). — Aucune démonstration n'est donnée. L'A. signale des résultats antérieurs dans la même voie de M. Regensburger (ce Zbl. **12**, 262) et H. Matison (ce Zbl. **19**, 125).

G. Bourion.

**Boas jr., R. P.:** Inequalities for functions of exponential type. *Math. Scandinav.* **4**, 29—32 (1956).

Let  $f(z)$  be an entire function of exponential type  $\tau$ , with  $|f(x)| \leq M$  on the real axis. For arbitrary real  $\omega$  we have

$$|f(x + iy) e^{-i\omega y} + f(x - iy) e^{i\omega y}| \leq 2M \{\cosh^2 \tau y - \sin^2 \omega\}^{1/2}.$$

Specializing  $V$ , this inequality yields several known results: 1. If  $f(x)$  is real on the real axis, then  $|f(x + iy)| \leq M \cosh \tau y$  (Duffin and Schaeffer, this Zbl. **18**, 409); 2.  $|f(x + iy)| + |f(x - iy)| \leq 2M \cosh \tau y$ ; 3.  $|\operatorname{Im} f(x + iy)| \leq M \sinh \tau |y|$  (Hörmander, this Zbl. **65**, 303, Theorem 2). Similar results are obtained for  $L^p$ -norms.

J. Horváth.



**Hiong, King-Lai:** Sur l'impossibilité de quelques relations identiques entre des fonctions entières. C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 222—225 (1956).

Let  $F(z)$ ,  $G(z)$  be nonconstant integral functions devoid of zeros, and let  $\alpha_s(z)$ , ( $s = 0, 1, \dots, l$ ) be integral functions of lower order of magnitude than  $F(z)$ . Then the identity  $\sum_{s=0}^l \alpha_s(z) F^{(s)}(z) + G(z) \equiv H(z)$ , where  $H(z)$  is an integral function not identically zero of lower order of magnitude than  $F(z)$ , is impossible. A typical corollary, obtained for the case  $H(z) \equiv 1$  is: Let  $f(z)$  be a nonconstant integral function and  $\alpha_s(z)$ , ( $s = 0, 1, \dots, l$ ), be integral functions of lower order of magnitude than  $f(z)$ . Then only one of the following alternatives can hold, (i)  $f$  does not take the value zero, (ii) if  $\sum_{s=0}^l \alpha_s f^{(s)}$  is not a constant, this sum does not take the value unity.

N. A. Bowen.

**Denjoy, Arnaud:** L'allure asymptotique des fonctions entières d'ordre fini. C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 213—218 (1956).

Verf. kommt in dieser Arbeit auf einige Fragen zurück, die in seiner bekannten Note von 1907 [C. r. Acad. Sci., Paris **145**, 106—108] neben dem später von Ahlfors bewiesenen Satz über die Zielwerte ganzer Funktionen endlicher Ordnung formuliert worden waren. Eine ganze Funktion  $P(z)$  heißt eine asymptotische Approximation einer ganzen Funktion  $F(z)$ , wenn es einen gegen unendlich strebenden Weg  $C$  in der  $z$ -Ebene gibt, auf welchem  $F(z) - P(z)$  gegen 0 strebt. Eine der Vermutungen lautete: Ist  $F(z)$  von der endlichen Ordnung  $\varrho$ , so gibt es höchstens  $2\varrho$  verschiedene asymptotische Approximationen, deren Ordnung kleiner ist als  $\mu = (2 + 1/\varrho)^{-1}$ . (Hierbei muß  $\varrho \geq \frac{1}{2}$  vorausgesetzt werden.) Der Satz wird bewiesen unter der Voraussetzung, daß die Wege  $C$  Geraden oder gewisse Spiralen sind. (Im letzteren Fall ergibt sich noch eine gewisse Verschärfung, analog wie im Satz von Denjoy-Ahlfors). Ähnliche Abschätzungen werden auch für den Fall aufgestellt, daß die Approximation nicht auf den ganzen Geraden stattfindet, sondern nur auf gewissen, sich im unendlichen häufenden Abschnitten derselben.

P. Seibert.

**Bagemihl, F. and W. Seidel:** Functions of bounded characteristic with prescribed ambiguous points. Michigan math. J. **3**, 77—81 (1956).

Unter einem „ambiguous point“ (a. p.) einer in  $|z| < 1$  definierten komplexwertigen Funktion  $f$  verstehen Verf. einen Punkt  $\zeta$  auf  $|z| = 1$ , zu welchem zwei Jordan-Bögen existieren, die in  $\zeta$  enden, und auf denen  $f$  gegen zwei verschiedene Grenzwerte konvergiert. Die Menge der a. p.'s ist stets höchstens abzählbar (vgl. Bagemihl, dies. Zbl. **65**, 66). Nach dem Konvergenzsatz von Lindelöf besitzt eine holomorphe, beschränkte Funktion keine a. p.'s. Hingegen gilt — wie hier gezeigt wird — folgender Satz: Zu einer beliebigen abzählbaren Menge  $E$  auf  $|z| = 1$  existiert in  $|z| < 1$  eine holomorphe Funktion von beschränkter Charakteristik, für welche jeder Punkt von  $E$  ein a. p. ist. Der Beweis stützt sich teilweise auf eine Methode von Privalov (dies. Zbl. **45**, 347).

P. Seibert.

**Johnson jr., Guy:** Collective singularities of a family of analytic functions. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 653—655 (1956).

Let  $J$  be a family of functions  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) z^n$  subuniformly bounded in  $|z| < 1$  which has a radius of regularity  $R(J) = 1$ . The author shows that if to each function there corresponds a sequence of integers  $\{\lambda_p(f)\}_{p=1}^{\infty}$  such that  $a_n(f) = 0$  whenever  $n \neq \lambda_p(f)$ , ( $p = 1, 2, \dots$ ), and  $\lambda_{p+1}(f)/\lambda_p(f) \geq \lambda > 1$  ( $\lambda$  is independent of  $f$ ), then each point of  $|z| = 1$  is a singular point of  $F$ . The theorem is a generalization of the gap theorem of Hadamard [J. Math. pur. appl., IV. Sér. **8**, 116 (1892)].

T. Eweida.

**Lohwater, Arthur J.:** Sur le principe de symétrie et la répartition des valeurs des fonctions analytiques bornées. C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 2278—2281 (1956).

La répartition des valeurs d'une fonction  $f(z)$ , holomorphe et bornée sur  $|z| < 1$ , est étudiée à l'aide de propriétés topologiques telles que: connexion simple des composantes connexes d'un ensemble ouvert défini par une condition imposée à  $f(z)$ . Outre des résultats connus de Hösşjer-Frostman et Seidel, on obtient ainsi le théorème suivant: Si  $f(z)$  a des limites radiales de module 1 en presque tout point d'un arc  $A$  de la circonférence  $|z| = 1$ , ou bien  $f(z)$  peut être prolongée analytiquement par réflexion à travers  $A$ , ou bien, au voisinage de chaque point singulier situé sur  $A$ ,  $f(z)$  prend toute valeur de module inférieur à 1 à l'exception d'un ensemble  $e$  de capacité nulle; si en outre l'ensemble des points singuliers situés sur  $A$  est de capacité nulle,  $e$  contient au plus un point. — Les mêmes méthodes, appliquées à une fonction méromorphe sur  $|z| < 1$ , donnent le résultat suivant: Si  $|f(z)|$  a pour limite radiale 1 en presque tout point de  $A$  et si  $f(z)$  a un point singulier  $P$  situé sur  $A$ , l'ensemble des valeurs prises par  $f(z)$  au voisinage de  $P$  comprend, soit le disque-unité, soit son complémentaire, soit enfin tout le plan, à l'exception toujours d'un ensemble de capacité nulle.

*M. Hervé.*

**Tumarkin, G. C.:** Über Folgen meromorpher Funktionen mit gleichmäßig beschränkten Flächeninhalten der Riemannschen Flächen über der Kugel. Doklady Akad. Nauk SSSR **106**, 199—202 (1956) [Russisch].

$f(z)$  étant méromorphe dans  $|z| < 1$ , soit  $A(f)$  la mesure sphérique de l'aire de la surface de Riemann que cette fonction fait correspondre au cercle-unité. Si  $A(f) < +\infty$ , la limite radiale  $f(e^{i\theta})$  est définie presque partout sur la circonférence. Pour une suite  $\{f_n\}$  telle que les  $A(f_n)$  soient bornés par une même constante  $C$ , l'A. établit plusieurs théorèmes liant la convergence des  $f_n(z)$  dans  $|z| < 1$  et la convergence des  $f_n(e^{i\theta})$  sur  $|z| = 1$ . Je citerai les deux suivants: Si  $\{f_n(z)\}$  converge vers  $f(z)$  uniformément après exclusion d'un nombre fini de points irréguliers, alors  $f_n(e^{i\theta})$  converge vers  $f(e^{i\theta})$  en moyenne d'écart sphérique, et a fortiori en mesure. Si  $\{f_n(e^{i\theta})\}$  converge en mesure sur un ensemble de mesure positive, la convergence en mesure s'étend à toute la circonférence.

*G. Bourion.*

**Fišman (Fishman), K. M.:** On a certain representation of meromorphic functions in a unit circle. Doklady Akad. Nauk SSSR **107**, 366—369 (1956) [Russisch].

The author announces sweeping generalizations of some earlier special results of M. Džrbašjan. Let  $\sigma(r)$  be a continuous, positive, decreasing function on  $[0, 1]$ ,

and let  $\alpha_n = \int_0^1 \sigma(r) r^{2n} dr$ ; then  $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\alpha_n}$  is analytic in  $C_1$ :  $|z| < 1$ . Let

$\{w_n\}$  be a sequence of non-zero points of  $C_1$  which are ordered by the magnitude of their moduli and whose moduli tend to 1 in such a way that  $\sum S(|w_n|) (1 - |w_n|) < \infty$ ,

where  $S(r) = \int_r^1 \sigma(r) dr$ . It is then asserted that the infinite product  $\pi(z; w_n) =$

$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{w_n}\right) e^{-U_\sigma(z; w_n)}$ , where  $U_\sigma(z; w_n) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} \int \log \left|1 - \frac{\zeta}{w_n}\right| E(z\zeta) \sigma(r) dr d\vartheta$ ,

converges absolutely and uniformly in  $C_r$ :  $|z| \leq r < 1$  and represents an analytic function in  $C_1$  having its zeros at the points  $w_n$ . It is further announced that, by these methods, one may obtain the following integral representation of an arbitrary meromorphic function  $F(z) = c_\lambda z^\lambda + \dots$  in  $C_1$ :

$$F(z) = \frac{K}{\bar{c}_\lambda} z^\lambda \frac{\pi(z; a_n)}{\pi(z; b_n)} \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_{C_1} \int \log |F(\zeta)| E(z\zeta) S(r) dr d\vartheta \right],$$

where  $K = \exp \left[ \frac{2\lambda}{\alpha_0} \int_0^1 \sigma(r) \log \frac{1}{r} dr \right]$ . The author then considers the class  $A_\sigma$  of



functions  $f(z)$ , analytic in  $C_1$ , for which the further restriction

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \sigma(r) dr d\theta < \infty$$

holds.

*A. J. Lohwater.*

**Reich, Edgar:** On a Bloch-Landau constant. Proc. Amer. math. Soc. 7, 75—76 (1956).

Verf. betrachtet in  $|z| < 1$  schlichte Funktionen  $w(z) = z + \dots$ , die noch der Bedingung  $(1 - |z|^2)|w'(z)| \leq 1$ ,  $|z| < 1$ , genügen, und folgert aus Koeffizientenabschätzungen schlichter Funktionen (Schaeffer, Spencer, Goluzin), daß das  $w$ -Bild von  $|z| < 1$  den Kreis  $|w| < 0,569$  enthält. Daraus ergibt sich für die Bloch-Landausche Konstante  $\mathfrak{A}$ :  $\mathfrak{A} > 0,569$ .

*H. Wittich.*

**Reich, Edgar:** Schlicht functions with real coefficients. Duke math. J. 23, 412—427 (1956).

Es sei  $S$  die Menge der Funktionen  $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ , die im Kreise  $|z| < 1$  regulär und schlicht sind. Man bezeichne ferner mit  $S_T$  die Untermenge der Funktionen  $f(z)$  von  $S$  mit reellen Koeffizienten  $a_k$ . Manche Eigenschaften der Menge  $S_T$  wurden von W. Rogosinski (dies. Zbl. 3, 393) und G. M. Goluzin (dies. Zbl. 41, 44) vermöge der Betrachtung der allgemeineren Menge  $T$  typisch-reeller Funktionen abgeleitet. Auf diese Weise wurde die Gleichung

$$m(z_0) = \inf_{f \in S_T} |f(z_0)| = |z_0/(1 + z_0^2)|, \text{ wenn } R(z_0 + 1/z_0) \geq 2,$$

festgestellt. Bei Untersuchung der Eigenschaften der Menge  $S_T$  vermöge der Differentialgleichung von J. Basilewitsch [J. Basilewitsch, dies. Zbl. 18, 144; O. Tammi, dies. Zbl. 56, 74], stellt Verf. die Gleichung  $\lim_{r \rightarrow 1} m(re^{i\theta}) = \frac{1}{4}$  (gleichmäßig nach  $\theta$ ) auf, in dem er den folgenden Satz beweist: Es gibt eine Funktion  $f(z) \in S_T$  derart, daß  $|f(z_0)| = \frac{1}{4} + \delta(1 - |z_0|)$ ,  $|z_0| < 1$ , worin  $\delta(u) = o(1)$ . — Bei  $-1 < \lambda < 1$  und  $f(z) \in S_T$  werden ferner die Ungleichung

$$|f(i\lambda)| \geq \frac{|\lambda|}{1 + \lambda^2} \exp \left[ - \int_0^{Y(\lambda)} \frac{p(\lambda) + e^{-2y}}{p(\lambda) + \cosh 2y} dy \right],$$

worin  $p(\lambda) = (6\lambda^2 - \lambda^4 - 1)/(\lambda^2 + 1)^2$ ,  $Y(\lambda) = \frac{1}{2} \log [(1 + \lambda^2)/(1 - \lambda^2)]$ , und speziell die Ungleichungen  $0,30 < m[i(\sqrt{2} - 1)] < 0,35$  festgestellt. Daraus folgt das interessante Ergebnis, daß  $m(z)$  seinen Maximalwert in einem inneren Punkt des Kreises  $|z| \leq 1$  erreicht. — Es sei  $s(x)$  die Menge der Funktionen  $w = h(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$  mit reellen Koeffizienten  $a_k$ , die im Kreise  $|z| < 1$  regulär und schlicht sind und den Bedingungen  $0 < \alpha_1 \leq \alpha$ ,  $|h(z)| < 1$  genügen. Es wird für festes  $z_0$  das Variationsgebiet von  $h(z_0)$ , falls  $f(z) \in s(x)$ , erhalten. *L. Ilieff.*

**Reade, Maxwell O.:** The coefficients of close-to-convex functions. Duke math. J. 23, 459—462 (1956).

Sei  $K_\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) die Klasse der im Kreise  $|z| < 1$  regulär analytischen Funktionen  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ , welche folgenden Bedingungen genügen:  $f'(z) \neq 0$ ,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} d\theta > -\pi \alpha \text{ für alle } \theta_1 < \theta_2, \quad 0 \leq r < 1 \quad (z = re^{i\theta}). \quad K_0 \text{ ist}$$

die Klasse der konvexen,  $K_1$  die der beinahe konvexen (close-to-convex) Funktionen von Kaplan (dies. Zbl. 48, 311). Verf. beweist, daß für  $f(z) \in K_\alpha$  gilt:  $|a_n| \leq [1 + \alpha(n-1)]|a_1|$ . — Eine analoge Verallgemeinerung der sternartigen Funktionen wird noch studiert.

*V. Paatero.*

**Jørgensen, Vilhelm:** On an inequality for the hyperbolic measure and its applications in the theory of functions. Math. Scandinav. 4, 113—124 (1956).

Diese Arbeit behandelt den Verlauf des konformen Radius  $R(z)$  (= Verhältnis zwischen euklidischer und hyperbolischer Maßbestimmung  $ds$  und  $d\sigma$ :  $d\sigma = ds/R(z)$ )

in einem einfach oder mehrfach zusammenhängenden Gebiet  $G$ . — Den Ausgangspunkt bildet die bekannte Differentialgleichung  $\Delta u = 4e^{2u}$  für die Funktion  $u(z) = -\ln R(z)$ ; jedoch wird sie nur „qualitativ“ verwendet, z. B. so: Sind  $u_1(z)$  und  $u_2(z)$  in einem Gebiet Lösungen der Differentialgleichung, so kann die Funktion  $u_1 - u_2$  in keinem inneren Punkt ein negatives Minimum haben. — Folgender anschaulicher Satz wird bewiesen: Enthält das hyperbolische Gebiet  $G$  die untere Halbebene und ist  $z = x + iy \in G$  mit  $y > 0$ , so gilt  $R(z) \leq R(\bar{z})$ ; Gleichheit gilt nur, wenn der Rand von  $G$  ganz auf der reellen Achse liegt. — Daraus folgt unmittelbar die Verallgemeinerung eines von J. L. Ullman (dies. Zbl. 43, 80) für einfach zusammenhängende Gebiete ausgesprochenen Satzes. — Durch eine lineare

Transformation folgen die Abschätzungen:  $\min_{z \in \Gamma} \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right|^2 \leq \frac{R(z_1)}{R(z_2)} \leq \max_{z \in \Gamma} \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right|^2$ , wo  $\Gamma$  der Rand von  $G$  und  $z_1, z_2$  zwei endliche Punkte von  $G$  sind. Gleichheit ist nur bei konstantem  $|z - z_1|/|z - z_2|$  möglich ( $\Gamma \subset$  Kreislinie). — Ferner wird für die euklidische Krümmung  $\kappa_e$  und die hyperbolische Krümmung  $\kappa_h$  die allgemeine Beziehung  $\kappa_e = \kappa_h/R - \partial \ln R / \partial n$  bewiesen. Daraus folgt z. B. die allgemeine Formulierung eines für einfach zusammenhängende Gebiete von J. L. Walsh [Amer. math. Monthly 46, 472–485 (1939)] stammenden Satzes. — Bemerkenswert sind insbesondere die Einheit und die Einfachheit der Methode. — Inwieweit man die Differentialgleichung  $\Delta u = 4e^{2u}$  auch quantitativ benützen könnte, ist schwer einzusehen.

J. Hersch.

**Diamantopoulos, Th.:** Geometrische Interpretation der höheren Ableitungen und der Reziprokannten bei der konformen Abbildung der Ebene. Arch. der Math. 7, 67–73 (1956).

Die absoluten homogenen Reziprokannten sind rationale Funktionen der Ableitungen  $w'(z), w''(z), \dots$  einer analytischen Funktion  $w(z)$ , welche sich nur um ein Vorzeichen ändern, wenn man die Ableitungen durch ihre Reziproken ersetzt. Ein Differentialoperator erzeugt aus  $\lg w'(z)$  eine Reihe solcher Reziprokannten oder Inversoren. In dies. Zbl. 57, 373 ist der Begriff des Schrumpfungsradius angeführt und Anwendungen auf die konforme Abbildung und auf Kurvenscharen angegeben. Verf. zieht diesen Begriff sowie den in einer gewissen Dualität dazu stehenden Begriff des Krümmungsradius zu einer geometrischen Interpretation der Reziprokannten heran. Insbesondere werden die Reziprokannten der Form  $d^n \lg w' / d\alpha^n$  mit  $\alpha = \int \sqrt{w'(z)} dz$  betrachtet.

W. Klingenberg.

**Renggli, Heinz:** Zur konformen Abbildung auf Normalgebiete. Commentarii math. Helvet. 31, 5–40 (1956).

Verwendet wird in dieser Dissertation durchgehend der von Ahlfors und Beurling stammende Begriff der Extremallänge einer Kurvenschar. — Betrachtet werden Gebiete  $G$ , welche von endlich vielen analytischen Kurven  $C_i$  berandet werden; auf jedem  $C_i$  seien endlich viele offene disjunkte Teilbogen von positivem gegenseitigem Abstand ausgewählt und in zwei Klassen  $E_0$  und  $E_1$  eingeteilt. In diesem „allgemeinen Kreisring“ ( $G; E_0, E_1$ ) sei  $\{\gamma\}$  die Schar der  $E_0$  mit  $E_1$  verbindenden Bogen. — Hat eine Teilschar  $\{\tilde{\gamma}\}$  von  $\{\gamma\}$  dieselbe Extremallänge wie  $\{\gamma\}$ , so heißt sie normal bezüglich  $\{\gamma\}$ . Ist ihr Träger ein Gebiet  $\tilde{G}$ , so heißt dieses Normalgebiet bezüglich  $G$ . — Unter Umständen werden für  $G, \tilde{G}$  und  $\{\tilde{\gamma}\}$  weitere Bedingungen (topologischen Charakters) aufgestellt. — Nun betrachte man eine diese Bedingungen erfüllende Kurvenschar  $\{\tilde{\gamma}\} \subset \{\gamma\}$ ; man denke an alle allgemeinen Ringgebiete ( $G'; E'_0, E'_1$ ) mit folgenden Eigenschaften: (a)  $G'$  habe dieselbe Zusammenhangszahl wie  $G$ ; (b) durch eine geeignete konforme Abbildung von  $\tilde{G}$  in  $G'$  sei die Bildschar  $\{\tilde{\gamma}'\}$  von  $\{\tilde{\gamma}\}$  eine Teilschar der für ( $G'; E'_0, E'_1$ ) definierten Schar  $\{\gamma'\}$ . Offenbar ist stets die Extremallänge  $\lambda\{\gamma'\} \leq \lambda\{\tilde{\gamma}'\} = \lambda\{\tilde{\gamma}\}$ . Folgendes zentrale Extremalproblem wird aufgestellt: Zwischen allen diesen ( $G'; E'_0, E'_1$ ) sucht man ein allgemeines Ring-



gebiet mit möglichst großem  $\lambda\{\gamma'\}$ . Unter den erwähnten topologischen Voraussetzungen wird gezeigt: Das  $\text{Sup}_G \lambda\{\gamma'\} = 1$  wird tatsächlich erreicht und ist gleich  $\lambda\{\tilde{\gamma}\}$ . Dies bedeutet aber, daß für die extremale Abbildung  $\{\tilde{\gamma}\}$  normale Teilsehar von  $\{\gamma'\}$  und  $\tilde{G}'$  Normalgebiet bezüglich  $G'$  ist. Die Möglichkeit einer konformen Abbildung auf ein Normalgebiet ist somit für die betrachtete Gebietsklasse sichergestellt. [Einen etwas ähnlichen Satz hat H. Grötzsch (dies. Zbl. 5, 68) bewiesen, dort war aber vorausgesetzt, daß der Relativrand von  $\tilde{G}$  bezüglich  $G$  in  $G$  kompakt sei.] — Die Frage der Eindeutigkeit der Abbildung auf ein Normalgebiet (sofern konform äquivalente allgemeine Ringgebiete nicht als verschieden angesehen werden) wird unter einigen Voraussetzungen bejaht: Eine konforme Abbildung eines Normalgebietes  $\tilde{G} \subset G$  auf ein Normalgebiet  $\tilde{G}' \subset G'$  läßt sich dann zu einer konformen Abbildung von  $G$  auf  $G'$  erweitern. — Ferner wird bei Parallelschlitzgebieten die Identität der hiesigen Definition mit derjenigen von Koebe (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. 1918, 60—71) gezeigt. J. Hersch.

**Warschawski, S. E.:** On the distortion in conformal mapping of variable domains. Trans. Amer. math. Soc. 82, 300—322 (1956).

Es seien  $C$  und  $C_1$  zwei geschlossene Jordankurven, welche im Kreisring  $0 < d \leq |w| \leq D$  liegen und einige Regularitätsbedingungen erfüllen. Mit  $f(z)$  bzw.  $f_1(z)$  werden die Funktionen bezeichnet, die den Kreis  $|z| < 1$  auf das Innere von  $C$  bzw.  $C_1$  konform abbilden, so daß  $f(0) = f_1(0) = 0$ ,  $f'(0) > 0$ ,  $f_1'(0) > 0$ . Der Verf. findet eine Abschätzung nach oben für die Ausdrücke  $\mathfrak{M}_p \{f - f_1\}$ ,  $\mathfrak{M}_p \{f' - f_1'\}$ , wo  $\mathfrak{M}_p \{\varphi\} = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^p d\theta \right]^{1/p}$  ist, mittels der „Abweichung“ der Kurven  $C$  und  $C_1$  und ihrer „Regularitätsgrade“. Aus dieser Abschätzung folgert man einen früher bewiesenen Satz des Verf. (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. 1930, 344—369), laut welchem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_p \{f' - f_n'\} = 0$  gilt, wenn die Kurven  $C_n$  in einer bestimmten Weise gegen die Kurve  $C$  konvergieren. Auf ähnlichem Wege findet der Verf. Abschätzungen nach oben für die Ausdrücke

$$\mu = \sup_{|z| \leq 1} |f(z) - f_1(z)|, \quad \mu' = \sup_{|z| \leq 1} |f'(z) - f_1'(z)|.$$

C. Constantinescu.

**Walsh, J. L. and L. Rosenfeld:** On the boundary behavior of a conformal map. Trans. Amer. math. Soc. 81, 49—73 (1956).

Améliorant un procédé dû au Ref. (ce Zbl. 49, 61) et basé sur la théorie de Carathéodory des domaines variables, les AA. étudient le comportement asymptotique de la représentation conforme  $w = u + iv = f(x + iy) = f(z)$  de la bande  $\Sigma$ :  $|y| < \pi/2$  sur une bande  $S$  limitée par  $v = \varphi_+(u)$  et  $v = \varphi_-(u)$ , ( $u_1 < u < +\infty$ ), les fonctions  $\varphi_+$  et  $\varphi_-$  pouvant être multiformes. Posant  $\theta(u) = \varphi_+(u) - \varphi_-(u)$ , les AA. prouvent la convergence uniforme de  $[f(z+x) - f(x)]/\theta[u(x)]$  vers  $z/\pi$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , uniformément sur tout compact de  $\Sigma$ , moyennant certaines conditions sur les fonctions  $\varphi_+$  et  $\varphi_-$ , et ils en déduisent le comportement des dérivées de  $f$ . Les AA. montrent ensuite comment les résultats obtenus s'adaptent à l'étude de la représentation conforme au voisinage d'un point à distance finie, et comparent les conditions imposées à la frontière de  $S$ , à celles imposées par S. E. Warschawski (ce Zbl. 28, 203) et par le Ref. (ce Zbl. 49, 61) pour une étude analogue. J. Lelong.

**Künzi, Hans P.:** Entwicklung und Bedeutung der konformen Abbildung. Elemente Math. 11, 1—15 (1956).

Der Aufsatz, der den Inhalt der Antrittsvorlesung des Verf. an der E. T. H. Zürich wiedergibt, bringt eine Reihe interessanter Tatsachen aus der Entwicklungsgeschichte der konformen Abbildung. Nach kurzer Erörterung des allgemeinen Abbildungsbegriffes in der Mathematik werden stereographische Projektion (Ptolemäus) und Merkatorprojektion (G. Kremer, genannt Merkator) behandelt. Verf.

spricht die Vermutung aus, „daß das erste klassische Beispiel der konformen Abbildung (nämlich die stereographische Projektion) bis weit ins Mittelalter hinein noch nicht als konform erkannt wurde“. Merkator erkannte die konformen Eigenschaften seiner Abbildung. Nach Würdigung der Arbeiten von Lambert, Euler und Gauß gibt Verf. einen knappen Überblick über die klassischen Probleme der konformen Abbildung und über neuere Betrachtungen und allgemeinere Abbildungen, wobei die Theorie der quasikonformen Abbildungen besonders hervorgehoben wird.

H. Wittich.

Lambin, N. V.: Die Symmetrielinien von nicht-einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 5 (71), 84—85 (1956) [Russisch].

Hällström, Gunnar af: Zur Beziehung zwischen den Automorphiefunktionen und dem Flächentypus. Acta. Acad. Aboensis, Math. Phys. 20, Nr. 10, 12 S. (1956).

Dans chacun des exemples qu'il étudie, l'A. considère une surface de Riemann donnée  $R$  dont les points de ramification recouvrent un nombre fini de points, la fonction  $w = f(z)$  qui effectue la représentation conforme sur  $R$  d'un domaine  $D$  du plan  $z$ , les fonctions d'automorphie  $S(z)$  de  $f(z)$  [c'est-à-dire les substitutions telles que  $f(S(z)) = f(z)$ ]. Dans les exemples 1 et 2, il met en évidence une  $S(z)$  uniforme et multivalente ( $\infty$ -valente dans l'ex. 1,  $n$ -valente dans l'ex. 2); il en déduit, d'après un théorème de Shimizu, que les  $R$  simplement connexes correspondantes sont de type hyperbolique. Dans l'ex. 3, où  $R$  est simplement connexe et hyperbolique en vertu du théorème d'Ahlfors sur le défaut, il montre que toutes les  $S(z)$  sont multiformes à  $n$  branches. Dans le dernier exemple, où  $R$  a un ordre de connexion infini, il montre que toutes les  $S(z)$  sont uniformes, donc que  $f(z)$  est totalement automorphe et il en déduit que  $R$  est du type hyperbolique ( $D$  a une frontière de capacité positive).

J. Dufresnoy.

Sabat, B. V.: Über Abbildungen, die durch die Lösungen eines Carlemanschen Systems bewirkt werden. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 3 (69), 203—206 (1956) [Russisch].

L'A. donne quelques exemples élémentaires qui montrent que les représentations  $w = u + i v$ ,  $u, v$  étant solutions d'un système

$$(1) \quad u_x - v_y = a u + b v, \quad u_y + v_x = c u + d v$$

ne sont pas toujours topologiquement équivalentes à des fonctions analytiques (c. à d.  $u + i v$  n'est pas une transformation intérieure dans le sens de S. Stoilow). Par exemple, si  $a, b, c, d$  sont constantes, le système (1) possède toujours une solution que soit un homéomorphisme, aussi bien qu'une autre solution qui applique un ensemble ouvert dans une droite.

I. Berstein.

Rinehart, R. F.: The derivative of a matrix function. Proc. Amer. math. Soc. 7, 2—5 (1956).

Es wird untersucht, wie weit es möglich ist, in der gewöhnlichen Definition  $f'(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(A + h E) - f(A))$ , wo  $f(z)$  eine komplexwertige skalare Funktion der komplexen Variablen  $z$  darstellt, die „incremental matrix“  $h E$  (wo  $E$  die Einheitsmatrix ist) durch eine Matrix  $H$  zu ersetzen derart, daß der Grenzwert immer noch unabhängig ist von der Art, wie  $H$  gegen die Nullmatrix strebt. Sei  $S_\delta$  die Menge aller mit  $A$  vertauschbaren Matrizen, deren Elemente dem Betrage nach unterhalb der vorgegebenen positiven Zahl  $\delta$  liegen. Falls nun  $f(A + H) - f(A) = H Q$  für alle  $H \in S_\delta$ , und falls  $\lim Q$  unabhängig von der Art, wie  $H$  in  $S_\delta$  gegen 0 strebt, existiert, so ist  $f'(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(z) dz}{(z E - A)^2} = \lim Q$ , wo  $\sigma$  eine Gesamtheit von einfach geschlossenen Kurven  $\sigma_i$  darstellt, auf und in denen  $f(z)$  analytisch ist und deren jede eine einzige charakteristische Wurzel von  $A$  umschließt. H. Schwerdtfeger.

**Ozaki, Shigeo and Takeshi Matsuno:** Note on bounded functions of several complex variables. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A 5, 130—136 (1956).

Let  $Z$  (resp.  $W(Z)$ ) be matrices of type  $(m, n)$  with complex numbers (resp. complex-valued functions) as coefficients. The norm  $\|A\|$  of a matrix  $A$  means the square root of the greatest characteristic value of  $\bar{A}'A$ . In this paper it is proved that if  $W(Z)$  is regular and  $\|W(Z)\| < 1$  for  $\|Z\| < 1$ , then

$$\|dW\|/\|dZ\| \leq [\|E_n - \bar{W}'W\| \cdot \|E_m - \bar{W}W'\|]^{1/2}/(1 - \|Z\|^2).$$

From this result it follows immediately that if  $W(Z)$  is regular and  $\|W\| < 1$  for  $\|Z\| < 1$  and  $n = 1$ , then  $\|dW/dZ\| \leq \sqrt{1 - \|W\|^2}/(1 - \|Z\|^2)$  where  $dW/dZ$  means the functional matrix of  $W(Z)$  (However, the author's proof of this latter inequality seems incorrect). Some related theorems are also proved. *K. Morita.*

● **Holmann, Harald:** Abbildungstheorie  $n$ -dimensionaler holomorph vollständiger Mannigfaltigkeiten. (Schriftenreihe des Math. Inst. der Univ. Münster. Heft 10.) Münster: Buch- und Steindruckerei Max Kramer 1956. 59 S. Dissertation.

Le point de départ est un résultat de H. Cartan: une variété complexe au-dessus de  $C^2$ , qui possède un groupe compact d'automorphismes avec un point fixe, est équivalente à un domaine  $(m, p)$  de Cartan. On généralise en considérant les domaines  $C_{p_1 \dots p_n}^n$  admettant un groupe compact  $G$  d'automorphismes avec point fixe  $P(z_k = 0)$ ,  $G$  ayant un sous-groupe  $G'$  de transformations qui s'expriment sur les coordonnées locales en  $P$  par: (1)  $z'_k = e^{p_{k\theta}} z_k$ , ( $1 \leq k \leq n$ ). On considérera les domaines de la classe  $(p_1, \dots, p_n)$  dans  $C^n$ , qui sont caractérisés par la propriété d'admettre les automorphismes précédents et aussi les variétés  $(p_1 \dots p_n)$  qui ont localement la structure des domaines  $(p_1 \dots p_n)$ . On établit alors que toute variété  $C_{p_1 \dots p_n}^n$ , holomorphiquement complète, est l'image pseudo-conforme d'une variété  $(p_1 \dots p_n)$ , et que toute variété holomorphiquement complète  $(p_1 \dots p_n)$  est isomorphe à une variété  $(p_1 \dots p_n)$  représentative de la classe. Pour  $n \geq 3$ , une variété  $(p_1 \dots p_n)$  holomorphiquement complète n'est pas en général isomorphe à un domaine  $(p_1, \dots, p_n)$  de  $C^n$ ; on donne une condition nécessaire et suffisante en termes d'espace fibré pour qu'il en soit aussi. *P. Lelong.*

**Sommer, Friedrich und Johannes Mehring:** Kernfunktion und Hüllenbildung in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Math. Ann. 131, 1—16 (1956).

Die Arbeit befaßt sich mit Fortsetzungen der Bergmannschen Kernfunktion  $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{\zeta})$  schlichter beschränkter Gebiete  $\mathfrak{G}$  im Raum von  $p$  komplexen Veränderlichen  $z = (z_1, \dots, z_p)$ . Es sei  $\mathfrak{H}$  die Holomorphiehülle von  $\mathfrak{G}$ , dann ist  $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{\zeta})$  als holomorphe Funktion von  $z$  und  $\bar{\zeta}$  in das Produkt der Holomorphiehüllen  $\mathfrak{H}_z(\mathfrak{G}) \times \mathfrak{H}_{\bar{\zeta}}(\mathfrak{G})$  hinein fortsetzbar, wobei  $\mathfrak{H}_{\bar{\zeta}}(\mathfrak{G}) = \{\bar{\zeta} | \zeta \in \mathfrak{H}(\mathfrak{G})\}$  ist. Insbesondere ist der „Kern“  $K_{\mathfrak{G}}(z) = K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{z})$  reellwertig und reell analytisch in  $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$  hinein fortsetzbar, d. h.  $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ , wenn  $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$  die „Kernhülle“ ist, das größte Gebiet, in das hinein  $K_{\mathfrak{G}}(z)$  sich reell analytisch fortsetzen läßt. Ist umgekehrt  $K_{\mathfrak{G}}(z)$  reell analytisch in ein Gebiet  $\mathfrak{G}_0$  (wobei  $\mathfrak{G}_0$  auch als lokal schlichtes Gebiet zugelassen ist) hinein fortsetzbar, so gilt: Jede in  $\mathfrak{G}$  quadratintegrierbare Funktion  $f (f \in \mathfrak{L}^2(\mathfrak{G}))$  ist nach  $\mathfrak{G}_0$  holomorph fortsetzbar, und  $K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{\zeta})$  läßt sich fortsetzen nach  $\mathfrak{G}_0 \times \mathfrak{G}_0$ , und es bleiben die Haupteigenschaften der Kernfunktion erhalten, zum Beispiel: Wenn  $f(z) \in \mathfrak{L}^2(\mathfrak{G})$  so ist  $f(z) = \int_{\mathfrak{G}} K_{\mathfrak{G}}(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) d\omega$  ( $d\omega =$  Volumelement),  $(K_{\mathfrak{G}}(z))^{-1} = \min \int_{\mathfrak{G}} |f|^2 d\omega$  für  $f \in \mathfrak{L}^2(\mathfrak{G})$  und  $|f(z)| = 1$ , etc. Insbesondere läßt sich auch die Bergmannsche Metrik von  $\mathfrak{G}$  nach  $\mathfrak{G}_0$  fortsetzen und bleibt positiv definit und pseudokonform invariant in  $\mathfrak{G}_0$ . Schließlich wird gezeigt: Wenn  $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$  die „Außenhülle“ von  $\mathfrak{G}$  ist ( $\mathfrak{A}(\mathfrak{G}) =$  Durchschnitt aller Holomorphiegebiete, die



$\mathfrak{G}$  kompakt enthalten), so gilt  $\mathfrak{S}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{G})$ , und es ist mit Beispielen belegt (wo  $\mathfrak{G}$  ein Reinhardtscher Körper ist), daß  $\mathfrak{S}(\mathfrak{G}) \neq \mathfrak{R}(\mathfrak{G})$  und  $\mathfrak{R}(\mathfrak{G}) \neq \mathfrak{U}(\mathfrak{G})$  vorkommt. — Ähnliche Resultate sind enthalten in: H. J. Bremermann, *Lectures on Functions of a Complex Variable*, Ann. Arbor Michigan 1955, S. 349—383.

H. J. Bremermann.

**Remmert, Reinhold:** Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes. C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 118—121 (1956).

Un espace analytique  $X$  (au sens de H. Cartan, Séminaire E. N. S., 1953—1954, Exposés VI et VII), holomorphiquement séparable, de dimension complexe  $n$ , admet une application  $\tau$  holomorphe et biunivoque dans  $C^{2n+1}$ . On appelle noyau de  $X$  le couple  $(X^*, \tau)$ , où  $X^*$  est un espace analytique holomorphiquement séparable.  $\tau = (X \rightarrow X^*)$  étant une application holomorphe et propre de  $X$  sur  $X^*$  et l'homomorphisme  $\tau^*$  de l'anneau  $R(X^*)$  des fonctions holomorphes sur  $R(X)$  étant un isomorphisme. On se réfère à des résultats récents de K. Stein [Arch. der Math. **7**, 354—361 (1956) et Math. Ann. **132**, 63—93 (1956)], concernant l'étude de la partition  $Z$  définie par la relation d'équivalence:  $(x \sim x') \in X$  si  $f(x) = f(x')$  pour toute  $f \in R(X)$ . L'existence du noyau  $(X^*, \tau)$  de  $X$  équivaut à celle d'une partition  $Z$  propre de  $X$ ,  $X^*$  étant alors isomorphe à l'espace quotient  $X/Z$ . Alors si  $X$  est holomorphiquement convexe, de dimension  $n$  avec  $k > n - 2$  fonctions analytiques indépendantes, l'existence de  $(X^*, \tau)$  est assurée; la dimension de  $X^*$  est le nombre de fonctions de  $R(X)$  analytiquement indépendantes. De là découle en particulier que tout espace analytique avec  $k > n - 2$  fonctions indépendantes est réunion dénombrable de compacts.

P. Lelong.

**Bremermann, H. J.:** Complex convexity. Trans. Amer. math. Soc. **82**, 17—51 (1956).

On étudie la pseudo-convexité des domaines en utilisant les fonctions plurisousharmoniques; le mémoire passe en revue un assez grand nombre de résultats connus (cf. P. Lelong, ce Zbl. **49**, 181) en insistant sur l'analogie entre domaines convexes de  $R^n$  et domaines pseudo-convexes de  $C^n$ . Un résultat intéressant de l'article est le suivant: si l'on considère  $C^n$  comme un espace vectoriel, muni d'une norme  $N(z)$  satisfaisant aux conditions:  $N(z) \neq 0$  pour  $z \neq 0$ ;  $N(z^{(1)} + z^{(2)}) \leq N(z^{(1)}) + N(z^{(2)})$ ;  $N(\lambda z) = |\lambda| N(z)$ , alors les domaines pour lesquels  $-\log \Delta(z)$  est plurisousharmonique dans  $D$ ,  $\Delta(z)$  étant la distance de  $z \in D$  à la frontière de  $D$ , comptée selon la norme  $N$ , sont exactement les domaines pseudo-convexes au sens du théorème de continuité, et ceci quelle que soit la norme  $N(z)$  satisfaisant aux conditions précédentes.

P. Lelong.

**Grauert, Hans und Reinhold Remmert:** Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen. Math. Z. **65**, 175—194 (1956).

On étend la définition des fonctions plurisousharmoniques aux espaces analytiques qu'on considère ici au sens de Behnke et Stein comme des images de recouvrements ramifiés au dessus de  $C^n$ , (cf. par exemple l'article des AA., ce Zbl. **64**, 81).  $\Gamma$  est plurisousharmonique sur un espace analytique  $X$  si elle est fonction semi-continue supérieurement sur  $X$  et si pour toute image  $\tau(z)$  holomorphe d'un plan analytique complexe  $C^1$  dans  $X$ ,  $V[\tau(z)]$  devient une fonction sousharmonique de  $z$ . A cette définition on peut en associer une autre qui avait déjà été donnée pour l'essentiel par le réf. dès 1945 [Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. **62**, 327 (1945)]: une fonction plurisousharmonique est une fonction semi-continue supérieurement sur  $X$  et est en tout point uniformisable de  $X$  une fonction plurisousharmonique des paramètres d'uniformisation. En utilisant des travaux récents sur l'uniformisation et les modifications analytiques, les auteurs établissent ici un résultat essentiel en montrant que les deux définitions coïncident. La démonstration utilise a) une réduction au cas  $n = 2$ , b) un résultat de Hirzebruch selon lequel pour  $n = 2$ , il existe une modification propre de  $X$  en une variété  $X'$ . Le mémoire contient

encore d'autres résultats: 1. Une fonction plurisousharmonique dans  $X - W$ , (où  $W$  est un sous-ensemble analytique de  $X$  de dimension complexe  $n - 1$ ), bornée supérieurement au voisinage de  $W$ , se prolonge sur  $X$  par passage à la limite supérieure (ce résultat avait été donné par le réf. au Congrès de l'Union math. italienne, 1955, dans le cas où  $X$  est un domaine de  $C^n$  et  $W$  est plus généralement un ensemble fermé de capacité nulle). 2. Une fonction plurisousharmonique dans  $X - W'$ , où  $W'$  est un sous-ensemble analytique de dimension complexe  $\leq n - 2$ , se prolonge de même sur  $X$ ; ce résultat est aussi à rapprocher d'un énoncé du réf. [C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 55—57 (1956)], donné pour  $C^n$ ,  $W'$  étant assujéti à des conditions sensiblement moins strictes.

*P. Lelong.*

**Huber, Alfred:** On functions subharmonic in a half-space. Trans. Amer. math. Soc. **82**, 147—159 (1956).

Utilisant une remarque due à A. Weinstein (ce Zbl. **53**, 253), à toute fonction  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , définie dans le demi-espace  $H = E[x_n > 0]$  de  $R^n$ , l'A. fait correspondre la fonction  $v(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}) = u(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \varrho)/\varrho$ , avec  $\varrho = [\xi_n^2 + \xi_{n+1}^2 + \xi_{n+2}^2]^{1/2}$ , définie dans  $R^{n+2} - \Delta$ , avec  $\Delta = E[\xi | \varrho = 0]$ . Posant  $v(\xi) = \limsup_{\eta \rightarrow \xi} v(\eta)$  sur  $\Delta$ , la transformation  $S: u \rightarrow v$ , ainsi définie, établit une

correspondance biunivoque entre la classe  $A$  des fonctions  $u$ , sousharmoniques dans  $H$  et satisfaisante à  $\limsup_{x_n \rightarrow 0} u(x) \leq 0$ , et la classe  $B$  des fonctions  $v$ , sousharmoniques dans  $R^{n+2}$ , ne dépendant que de  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  et  $\varrho$ . Des propriétés connues pour l'espace entier  $R^{n+2}$ , l'A. déduit ainsi des propriétés pour le demi-espace  $H$ . Divers résultats sont ainsi transformés: a) propriétés de croissance et de convexité de la moyenne sur une sphère [F. Riesz, Acta math. **48**, 329—343 (1926) et **54**, 321—360 (1930)] b) Théorèmes de représentation (F. Riesz, *ibid.*, et M. Brelot, ce Zbl. **36**, 69). Certains des résultats ainsi obtenus étaient partiellement connus, mais les derniers (qui sont appliqués à la représentation intégrale des fonctions analytiques d'ordre fini dans un demi-plan) semblent nouveaux.

*J. Lelong.*

### Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen

**Chakrabarti, S. C.:** On higher differences. III. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **25**, 105—121 (1956).

Verf. verallgemeinert die in den Teilen I und II (dies. Zbl. **56**, 309) untersuchten Operatoren dadurch, daß er in der Definition die Potenzen  $a^r$  des Parameters  $a$  durch die Elemente einer Folge  $\{w_r\}$  ersetzt. Für die so erklärten Operatoren werden formale Relationen abgeleitet, die zur Definition zahlreicher Abkürzungen und Bezeichnungen Anlaß geben.

*W. Hahn.*

**Duffin, R. J.:** Basic properties of discrete analytic functions. Duke math. J. **23**, 335—363 (1956).

Selon une définition due au Ref. [Bull. Sci. math. **68**, 152—180 (1944)], une fonction  $f(z)$ , définie aux sommets d'un quadrillage plan, est dite discrète analytique (préholomorphe au sens du Ref.; en abrégé d. a.) si elle satisfait à  $Lf(z) = f(z) + if(z+1) - f(z+1+i) - if(z+i) = 0$ . — Diverses formules intégrales nouvelles permettent à l'A. de donner une „formule de Cauchy“, d'abord pour un domaine borné, ensuite pour un demi-plan, et aussi de résoudre l'équation fonctionnelle  $Lf = w$ . L'utilisation de la fonction de Green pour les réseaux, introduite par Courant [Atti Congr. internaz. Mat. Bologna **3**, 83—89 (1930)] lui permet de donner un développement asymptotique des fonctions ainsi introduites. Les bipolynomes (fonctions prenant mêmes valeurs qu'un polynome sur le réseau pair, et qu'un autre polynome sur le réseau impair) donnent lieu à une étude algébrique, et à un „théorème de Liouville“. Un opérateur  $Z$ , qui est l'analogue de la multiplication par  $z$ , permet enfin à l'A. de donner un développement de la fonction, analogue à  $e^{zt}$ ,

définie par le Ref. De nombreuses références sont faites aux travaux sur les fonctions préharmoniques.

*J. Lelong.*

**Tanaka, Sen-ichiro:** On asymptotic solutions of non-linear difference equations of the first order. II. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A 10, 45–83 (1956).

Es handelt sich wie im Teil I (dies. Zbl. 52, 95) um die Gleichung  $y(x+1) = y(x) + f(x, y(x))$ , wobei  $f(x, y)$  für  $|x| \geq R$ ,  $|y| \leq r$  analytisch ist. Ist  $g_0$  eine Zahl, für die die  $|g_0| < r$  und  $f(\infty, g_0) = 0$  ist, so war in I vorausgesetzt, daß  $f'_y(\infty, g_0) \neq 0$  ist, und es wurden die Fälle  $|1 + f'_y(\infty, g_0)| > 1$  und  $= 1$  untersucht. Jetzt kommt der Fall  $0 < |1 + f'_y(\infty, g_0)| < 1$ . Da wird mit analogen Methoden gezeigt, daß es eine Reihe  $g_0 + g_1 x^{-1} + g_2 x^{-2} + \dots$  gibt, die der Gleichung formal genügt, und daß es im Winkelraum  $\varepsilon \leq \arg x \leq 2\pi - \varepsilon$  eine und nur eine für große  $|x|$  analytische Lösung gibt, die der Reihe daselbst asymptotisch gleich ist. Weiterhin wird dann der Fall behandelt, daß  $f_y^{(k)}(\infty, g_0) = 0$  für  $k = 1, 2, \dots, m-1$ , aber  $\neq 0$  für  $k = m$  ist. Dieser zerfällt wieder in mehrere Unterfälle, bei deren jedem das Endresultat ein Satz ist, der fast eine Seite füllt. Die Methode ist immer wesentlich dieselbe, und auch die Resultate sind alle von ähnlichem Charakter. Stets gibt es eine formale Lösung und einen oder mehrere Winkelräume, in denen analytische Lösungen existieren, die der formalen Reihe daselbst asymptotisch gleich sind. Zum Beispiel in dem Unterfall, daß  $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x, g_0) = 0$  ist, wobei  $\lim_{x \rightarrow \infty} x f'_y(x, g_0)$

beliebig, nur im Fall  $m \geq 3$  keine negative ganze Zahl sein darf, gibt es die Reihe  $g_0 + g_1 x^{-1} + g_2 x^{-2} + \dots$  und zwei solche Winkelräume mit Öffnungswinkel  $\pi - \varepsilon$ , deren einer die positive und deren anderer die negative reelle Achse zur Mittellinie hat. Im Unterfall  $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x, g_0) \neq 0$  gibt es  $m$  formale Reihen, bei denen die Exponenten von  $x^{-1}$  gebrochene Zahlen mit dem Nenner  $m$  sind. Im Unterfall  $m \geq 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x, g_0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x f'_y(x, g_0) \neq (n-m)/(m-1)^2$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$ , worin insbesondere auch der oben ausgeschlossene Fall einer negativen ganzen Zahl enthalten ist, gibt es  $m-1$  formale Reihen, bei denen die Exponenten von  $x^{-1}$  gebrochene Zahlen mit dem Nenner  $m-1$  sind.

*O. Perron.*

● **Diaz, J. B. and L. E. Payne** (Editors): Proceedings of the conference of differential equations held at the University of Maryland March 17, 18 and 19, 1955. College Park, Maryland: University of Maryland Book Store 1956. XII, 294 p.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

● **Stepanov (Stepanow), V. W. (V. W.):** Lehrbuch der Differentialgleichungen. (Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 20). Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956. IX, 470 S. Ln. DM 29,30; br. DM 27,—.

Es handelt sich um die Übersetzung ins Deutsche (nach der 6. Auflage, dies. Zbl. 50, 87) des anlässlich seiner 5. Auflage in diesem Zbl. 41, 418 besprochenen Lehrbuches.

*M. J. De Schwarz.*

● **Reddick, Harry W. and Donald E. Kibbey:** Differential equations. 3. edition. New York: John Wiley & Sons Inc.; London: Chapman & Hall, Ltd. 1956. IX, 304 p. 23 Fig. \$ 4,50.

Das jetzt in dritter Auflage vorliegende Lehrbuch der Differentialgleichungen ist für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik geschrieben. Der Stoff ist in die folgenden Kapitel aufgeteilt: Einleitung, Differentialgleichungen erster Ordnung, lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, besondere Typen von Differentialgleichungen höherer Ordnung, Systeme von Differentialgleichungen, lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Darstellung der Integrale durch Reihenentwicklungen, partielle Differentialgleichungen, wobei das letzte Kapitel nur als kurzer Anhang gedacht ist. Die Darstellung des Stoffes ist sehr elementar gehalten, da sie sich hauptsächlich an den Praktiker wendet. Zahlreiche in den Text eingestreute und meist den Anwendungen entnommene Beispiele und Übungsaufgaben, deren Lösungen in einem Anhang mitgeteilt werden, machen



das Buch zu einem nützlichen Helfer für die mathematische Ausbildung der Ingenieure.

*W. Quade.*

**Künzi, Hans-P.:** Sur un théorème de M. J. Malmquist. C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 866—868 (1956).

In der Differentialgleichung  $w' = f(z, w)$  sei  $f(z, w)$  rational in  $z$  und  $w$ . Aus der Annahme, daß diese Differentialgleichung eine algebraische Lösung  $w(z)$  zuläßt, folgt nach Sätzen von Bloch, Selberg und Valiron: Entweder ist  $w(z)$  algebraisch oder die Differentialgleichung ist vom Riccatischen Typus.

*H. Wittich.*

**Mitrinovich, D. S.:** Compléments au traité de Kamke. I. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **58**, II. Abt. 58—60 (1956).

L'A. indique quelques cas nouveaux d'équations du premier ordre qui s'intègrent par quadratures, dans le but de combler des lacunes du traité de Kamke (ce Zbl. **28**, 227).

*Ch. Blanc.*

**Herbst, Robert Taylor:** The equivalence of linear and nonlinear differential equations. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 95—97 (1956).

Généralisant un problème posé par J. M. Thomas (ce Zbl. **48**, 322), l'A. établit le théorème suivant: l'équation  $y'' - w^{-1} w' y' = f(y, y', w, q)$  (avec  $w$  et  $q$  fonctions de  $x$ ), où  $f = -q Z(y) + A(y) y'^2 + w^2 C(y)$ ,  $Z C' + (3 - A Z) C = 0$ ,  $Z' - A Z = 1$ , admet pour intégrale générale une fonction  $y = F(u, v)$  de deux intégrales particulières convenablement choisies de l'équation  $Y'' - w^{-1} w' Y' + q Y = 0$ . L'A. en déduit quelques types d'équations non linéaires réductibles à des équations linéaires.

*Ch. Blanc.*

**Barnett, J. A.:** Particular integrals of linear differential equations. Amer. math. Monthly **63**, 245—246 (1956).

Verf. bemerkt, daß das von Fettis (dies. Zbl. **64**, 83) angegebene Verfahren zur Bestimmung partikulärer Integrale einer linearen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten wohl bekannt ist und auch auf Gleichungen mit nicht-konstanten Koeffizienten angewandt werden kann. Es wird eine Beziehung zu gewissen Volterraschen Integralgleichungen hergestellt.

*H.-J. Kowalsky.*

**Bauer, W.:** Darstellung von Einflußzahlen in Matrizenschreibweise. Z. angew. Math. Mech. **36**, 272 (1956).

**Fuller, A. T. and R. H. Macmillan:** Expressions for the damping and natural frequency of linear systems. Quart. J. Mech. appl. Math. **9**, 345—359 (1956).

Wenn die charakteristische Gleichung eines linearen Systems  $f(p) = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n$  nur Wurzeln haben soll, deren Realteile kleiner sind als eine vorgegebene negative Konstante  $h$ , so kann man durch Einführung von  $p = q + h$  eine neue Gleichung ausrechnen und hierfür die Routh-Hurwitz-Bedingungen aufstellen. Eine notwendige Bedingung ist aber bereits durch  $f(h) > 0$ ,  $f'(h) > 0$ , ...,  $f^{(n-1)}(h) > 0$  gegeben. Ein weiterer Satz gibt eine Abschätzungsformel für den absolut kleinsten Dämpfungskoeffizienten eines nur schwach stabilen Systems, die sich leicht aus der Hurwitz-Determinante  $H_{n-1}$  ausrechnen läßt, und ein dritter Satz liefert eine in ähnlicher Weise zu errechnende Formel für die Frequenz eines solchen Systems.

*H. Molitz.*

**Glasko, V. B.:** Some problems on characteristic values, involving a small parameter. Doklady Akad. Nauk SSSR **108**, 767—769 (1956) [Russisch].

Consider on  $I$ :  $x_1 \leq x < x_0$ ,  $x_0 < x \leq x_2$  the boundary value problem, containing a small parameter  $\mu$ ,

$$\mu(p_2(x) y'')'' - (p_1(x) y')' + p_0(x) y = \lambda q(x) y,$$

$y(x_i) = 0$ ,  $y^{(j)}(x_i) = 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1$  or  $2$ , where  $y = p_1 y' = p_2 y'' = (p_2 y'')' = 0$  at  $x = x_0$ . Assume  $p_2, p_1 \in C^4$ ,  $p_0 \in C^2$ ,  $q \in C$  on  $I$ ,  $p_1(x_0) = 0$ , and  $p_2, p_1, q \geq k > 0$ ,  $p_0 \geq 0$ . The author shows that the eigenvalues  $\lambda_{n_j}$  and eigenfunctions  $y_{n_j}(x, \mu)$  tend, as  $\mu \rightarrow 0$ , to the corresponding eigenvalues  $\lambda_n$  and eigen-

functions  $u_n(x)$  of the reduced problem  $-(p_1(x) u')' + p_0(x) u = \lambda q(x) u$ ,  $u(x_i) = 0$  where  $u = p_1 u' = 0$  at  $x = x_0$ . H. A. Antosiewicz.

Olver, F. W. J.: The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 247, 307—327 (1954).

Olver, F. W. J.: The asymptotic expansion of Bessel functions of large order. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 247, 328—368 (1954).

Olver, F. W. J.: The asymptotic solution of linear differential equations of the second order in a domain containing one transition point. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 249, 65—97 (1956).

Die Differentialgleichung  $d^2w/dz^2 = (u p(z) + q(z)) w$ ,  $u$  Parameter, kann unter der Voraussetzung, daß  $p(z)$ ,  $q(z)$  in einem einfach zusammenhängenden Bereich  $\mathfrak{B}$  analytisch sind mit der weiteren Eigenschaft: A.  $p(z) \neq 0$  in  $\mathfrak{B}$ , B.  $p(z)$  hat in  $\mathfrak{B}$  die einfache Nullstelle  $z_0$ , C.  $p(z)$  hat in  $\mathfrak{B}$  den zweifachen Pol  $z = z_0$ ,  $q(z)$  kann an der gleichen Stelle einen einfachen oder zweifachen Pol haben, D.  $z = z_0$  ist ein einfacher Pol von  $p(z)$  und ein doppelter Pol von  $q(z)$ , auf die Form  $d^2W/dz^2 = (u z^n + f(z)) W$ ,  $z$  eine neue Veränderliche, gebracht werden, und zwar ist  $n = 0$  im Falle A und C,  $n = 1$  im Falle B und  $n = -1$  im Falle D. In der ersten Arbeit und im Anhang der dritten behandelt Verf. die Fälle A, B, C ( $n = 0, 1$ ). Er zeigt, daß es für große positive  $u$  unter der Voraussetzung  $f(z) = O(|z|^{-1-\alpha})$  bzw.  $= O(|z|^{-1/2-\alpha})$ ,  $\alpha > 0$ , Lösungen der Form gibt.:

$$W_{1,2}(z) = e^{\pm \sqrt{u} z} \left( \sum_{s=1}^{m-1} (\pm 1)^s \frac{A_s(z)}{u^{s/2}} + O(u^{-m/2}) \right), \quad \text{bzw.}$$

$$W_j = P_j(vz) \sum_{s=0}^{m-1} \frac{A_s(z)}{u^s} + \frac{P'_j(vz)}{v^2} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{B_s(z)}{u^s} + \exp(-\frac{2}{3}(\varrho_j vz)^{3/2}/(1+|vz|^{1/4})), j=1, 2, 3,$$

wo  $P_j(z) = \text{Ai}(z \varrho_j)$ ,  $\varrho_j = e^{(j-1)2\pi i/3}$ ,  $\text{Ai}(z) = (\sqrt{z}/\pi \sqrt{3}) K_{1/3}(\frac{2}{3} z^{3/2})$  (Airysche Funktionen),  $v = u^{1/3}$  und die Funktionen  $A_s(z)$ ,  $B_s(z)$  durch Rekursionen bestimmt sind. Für die Ableitungen dieser Funktionen ergeben sich ähnliche Entwicklungen. Die dritte Arbeit behandelt den Fall D ( $n = -1$ ;  $f(z) = \gamma/z^2 + h(z)/z$ ,  $h(z)$  eine in  $\mathfrak{B}$  reguläre Funktion); es wird gezeigt, daß in diesem Falle bei großen positiven  $u$  Lösungen von der obigen Form existieren, wo an Stelle der Exponentialfunktion bzw. Airyschen Funktionen die Funktionen

$$\sqrt{z} I_\mu(2\sqrt{uz}), \quad \sqrt{2} K_\mu(z\sqrt{uz}), \quad \mu^2 = 1 + 4\gamma,$$

$I_\mu$ ,  $K_\mu$  modifizierte Besselfunktionen treten, welche erstere Lösungen der Differentialgleichung  $d^2v/dz^2 = (u z^{-1} + \gamma z^{-2}) v$  sind. In der zweiten Arbeit werden die Untersuchungen der ersten Arbeit auf die Besselschen Funktionen  $I_\nu(vz)$ ,  $K_\nu(vz)$ ,  $J_\nu(vz)$ ,  $Y_\nu(vz)$ ,  $H_\nu^{(1,2)}(vz)$  und ihre Ableitungen für große  $v = n$  und für komplexe  $v$  mit großem  $|v|$  angewandt; diese erhaltenen Entwicklungen enthalten die Exponentialfunktion bzw. die Airyschen Funktionen. Verf. bestimmt mittels dieser Entwicklungen die Nullstellen von  $J_\nu(z)$ ,  $J'_\nu(z)$  für große  $v = n$  und absolut große komplexe  $v$ , von  $Y_\nu(z)$ ,  $Y'_\nu(z)$ ,  $H_\nu^{(1,2)}(z)$  für große  $v = n$  und  $2v = n$ . Tafeln für die Berechnung der Nullstellen und numerische Beispiele sowie ein Anhang über die Airyschen Funktionen  $\text{Ai}(z)$  und  $\text{Bi}(z)$  bilden den Abschluß der zweiten Arbeit. Über die Zusammenhänge der Untersuchungen mit früheren, z. B. denjenigen von Langer (dies. Zbl. 41, 59) und Cherry (dies. Zbl. 36, 61) berichtet Verf. in § 7 der ersten und in § 1 der dritten Arbeit.

O. Volk.

Reissig, R.: Über die Existenz periodischer Lösungen für Differentialgleichungen 2. Ordnung mit einem Störungsglied. Z. angew. Math. Mech. 36, 256—257 (1956).

Petropavlovskaja (Petropavlovskaya), R. V.: On the oscillatory aspect of the solutions of differential equation  $u'' = f(u, u', t)$ . Doklady Akad. Nauk SSSR 108, 389—391 (1956) [Russisch].

Es wird ein Abschätzungssatz für die Lösungen der Differentialgleichung  $u'' = f(u, u', t)$  angegeben, aus dem dann eine Reihe von Folgerungen über die Schwingungseigenschaften der Lösungen abgeleitet wird. Eine im einseitig unbeschränkten  $t$ -Intervall existierende Lösung wird dabei als „schwingend“ bezeichnet, wenn sie eine solche Folge von Nullstellen  $t_n$  besitzt, daß  $t_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt. — In zwei weiteren Sätzen werden für die Differentialgleichungen  $u'' + u \varphi(u, t) = 0$  und  $u'' + u[\varphi(u, t) + \psi(u, u', t)] = 0$  hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß alle ihre Lösungen schwingend sind.

K. Magnus.

**Volpato, Mario:** Sull'esistenza di soluzioni periodiche per equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 25, 371—385 (1956).

Dato il sistema  $\ddot{x} + P(t, x, \dot{x}) \dot{x} = Q(t, x, \dot{x})$ ,  $[\dot{x} = dx/dt, \ddot{x} = d^2x/dt^2]$ ,  $x(0) = x(\omega)$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{x}(\omega)$  se  $P(t, x, \dot{x})$ ,  $Q(t, x, \dot{x})$  sono funzioni continue dei loro argomenti, periodiche rispetto a  $t$  col periodo  $\omega$ ;  $0 \leq p(t) \leq P(t, x, \dot{x}) \leq P(t)$ ,

con  $p(t)$ ,  $P(t)$  continue e di periodo  $\omega$ ,  $\omega \int_0^\omega P(t) dt \leq 4$ , e se  $Q(t, x, \dot{x})$  è limitata,

allora il sistema ammette almeno una funzione  $x(t)$  che lo soddisfa. La dimostrazione si fonda sull'esistenza di un elemento unito in una trasformazione completamente continua, definita in un insieme chiuso convesso e limitato  $\Sigma_\omega$  di uno spazio appartenente ad uno spazio lineare normale e completo, la quale ad ogni elemento di  $\Sigma_\omega$  fa corrispondere un altro elemento pure di  $\Sigma_\omega$ .

G. Sansone.

**Prachar, K. und L. Schmetterer:** Über eine spezielle nichtlineare Differentialgleichung. Österreich. Ingenieur-Arch. 10, 247—252 (1956).

Il sistema  $v' + 2x^{-1}v = y$ ,  $y' = f(v)$  ammette una soluzione per la quale risulta  $y(x) \sim x^{-1}e^{-x}$  e  $v(x) \sim d(x^{-1}e^{-x})/dx$  al tendere di  $x$  all'infinito positivo, se  $f(v)$  è continua sull'asse reale, vi è crescente e vi soddisfa alle  $f(-v) = -f(v)$ ,  $\lim_{v \rightarrow +\infty} f(v) = 1$ ,  $0 < |f(v)| < |v|$  per  $|v| > 0$ , nonchè alla  $f(v) = v + O(|v|^\alpha)$  per

$v \rightarrow 0$ ,  $\alpha$  essendo un numero maggiore di 1. L'equazione  $y'' + 2y'(1 - y^2)/x = y(1 - y^2)^{3/2}$  si riconduce al sistema  $v' + 2x^{-1}v = y$ ,  $y' = v(1 + v^2)^{-1/2}$ , che è del tipo indicato, mediante una sostituzione opportuna.

G. Scorza-Dragoni.

**Thomas, Johannes:** Ein Abschätzungssatz für Lösungen Sturmscher Differentialgleichungen. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 58, 110—114 (1956).

Pour la solution  $u_0(x, \lambda)$ ,  $u(a, \lambda)$ ,  $u = 0$ ,  $du(x, \lambda)/dx|_{x=a} = 1$  de l'équation (1)  $d^2u/dx^2 + [\lambda g(x) + h(x)]u = 0$ , dans le cas  $g(x) = (x - x_0)^p g_1(x)$ ,  $g_1 > 0$ ,  $v$  pair  $\geq 2$ , on obtient

$$\max_{x \in [A, B]} |u_0(x, \lambda)| < \left[ \Gamma\left(\frac{v+1}{v+2}\right) \lambda^{1/(v+2)} / 4^{1/(v+2)} \Gamma\left(\frac{1}{v+2}\right) K - s \right]^{-1}$$

pour

$$\lambda > 4 \left( \Gamma\left(\frac{1}{v+2}\right) K S / \Gamma\left(\frac{v+1}{v+2}\right) \right)^{v+2},$$

$K, S$  étant des constantes qui dépendent de  $g(x)$  et de l'intervalle  $A, B$ . L'évaluation est obtenue en choisissant une fonction  $h_0(x)$  telle que les solutions de l'équation (1) pour  $h(x) = h_0(x)$  s'expriment à l'aide des fonctions cylindriques et en écrivant l'équation (1) sous la forme  $d^2u/dx^2 + (\lambda g(x) + h_0(x))u = (h_0(x) - h(x))u$ .

A. Halanay.

**Volpato, Mario:** Rettifica alla memoria: Sopra un problema di valori al contorno per l'equazione differenziale  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, \lambda)$ . Rend. Sem. mat. Univ. Padova 25, 273—278 (1956).

L'A. introduce un'ulteriore ipotesi nell'enunciato di un proprio precedente teorema esistenziale (questo Zbl. 55, 80).

S. Cingini.

**Čečík (Chechik), V. A.:** On a certain class of systems of ordinary differential equations with singularity. Doklady Akad. Nauk SSSR 108, 784—786 (1956) [Russisch].



11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840. 841. 842. 843. 844. 845. 846. 847

1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 2679, 2680, 26



$c > 0$ . Theorem: if  $m_4 > 0$  is the order of  $R_{44}$ , there is an  $m_4$ -column solution such that  $X_i \rightarrow 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $X_4 \rightarrow I$  as  $t \rightarrow \infty$ . Other similar results are stated.

*J. L. Massera.*

**Hartman, Philip and Aurel Wintner:** On linear and nonlinear perturbations of linear systems of ordinary differential equations with constant coefficients. Trans. Amer. math. Soc. **81**, 1–24 (1956).

Gli AA. considerano sia sistemi lineari  $y' = (J + G(t)) y$ , ove  $J$  è una matrice costante  $r \times r$ ,  $G(t)$  è una matrice  $r \times r$  continua in  $(0 \leq t < +\infty)$ , e  $y = (y^1, \dots, y^r)$  è il vettore incognito, sia sistemi non lineari  $y' = J y + F(t, y)$ ,  $F = (F^1, \dots, F^r)$  è un vettore continuo. — Tra i risultati raggiunti nella Memoria in esame riportiamo il seguente (che è dato sotto forma scalare): Sia l'equazione differenziale

$$(1) \quad x^{(r)} + f_1(t) x^{(r-1)} + \dots + f_{r-1}(t) x' + f_r(t) x = 0, \quad (r > 1),$$

ove  $f_j(t)$ ,  $(j = 1, \dots, r)$  sono funzioni continue per  $0 \leq t < +\infty$ , soddisfacenti alla condizione  $|tf_1| + \dots + |t^r f_r| \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ , o più generalmente alla

$$(1 + \lg V)^{-1} \int_U^V (|f_1| + |t f_2| + \dots + |t^{r-1} f_r|) dt \rightarrow 0,$$

quando  $UV > U \rightarrow \infty$ . Allora l'equazione differenziale (1) ha una soluzione  $x = x(t)$ , le cui derivate per  $m = 0, 1, \dots, r-1$  godono delle seguenti proprietà

$$\lg |x^{(m)}(t)| = o(\lg t), \quad x^{(j)}(t) = o(t^{m-j} |x^{(m)}(t)|) \quad \text{per } j = m+1, \dots, r,$$

$$x^{(j)}(t) \sim t^{m-j} x^{(m)}(t), \quad \text{per } j = 0, 1, \dots, m-1.$$

*S. Cinquini.*

**Clauser, Francis H.:** The behavior of nonlinear systems. J. aeronaut. Sci. **23**, 411–434 (1956).

Es wird ein sehr allgemeiner Übersichtsbericht gegeben, dessen Ziel es ist, das Gemeinsame der nichtlinearen Erscheinungen in Systemen mit einem bzw. wenigen Freiheitsgraden und in kontinuierlichen Systemen zu betonen. So findet man neben einer ausführlichen Diskussion der van der Polschen Differentialgleichung mit verschiedenen Formen des Dämpfungsgliedes auch Überlegungen zur Grenzschichttheorie strömender Flüssigkeiten und deren Anwendung z. B. auf Verkehrsströmungen. Wenngleich sachlich nichts Neues berichtet wird, so muß die Arbeit doch als wichtiger Versuch einer Zusammenschau begrüßt werden, die nicht nur zur Einführung, sondern gerade auch für den Fachmann dieses Spezialgebietes wertvoll ist.

*K. Magnus.*

**Manfredi, Bianca:** Sulla stabilità del moto di sistemi a più gradi di libertà in condizioni non lineari. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **11**, 64–71 (1956).

L'A., indicato con  $X(t)$  il gruppo di funzioni  $x_i(t)$  e con  $\dot{X}(t)$  il gruppo delle loro derivate  $\dot{x}_i(t)$  rispetto a  $t$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , dimostra elementarmente i seguenti tre criteri di stabilità per gli integrali di un sistema di equazioni differenziali ordinarie non lineari, esistenti in  $(0, +\infty)$ : 1. Se in  $\ddot{x}_i + \omega_i(X, \dot{X}) \dot{x}_i + \partial G(X)/\partial x_i = f_i(t)$  è  $\omega_i \geq 0$  per ogni  $X, \dot{X}$ ,  $G > 0$  per  $X \neq 0$ ,  $G(X) \rightarrow +\infty$  per  $|x_i| \rightarrow +\infty$  e  $|f_i|$  integrabile in  $(0, +\infty)$ , i suoi integrali sono stabili ( $|x_i| e |\dot{x}_i|$  sono limitate); 2. Se in  $\ddot{x}_i + r_i(\dot{X}) + \omega^2 x_i = f_i(t)$  è  $\omega$  costante,  $\sum_i r_i \dot{x}_i \geq 0$  per ogni  $\dot{X}$  e  $|f_i|$  integrabile in  $(0, +\infty)$  allora i suoi integrali sono stabili; 3. Se in  $\ddot{x}_i + 2\varepsilon x_i + r_i(\dot{X}) + \omega^2 x_i = f_i(t)$   $\varepsilon > 0$  ed  $\omega$  sono costanti ed  $r_i$  uniformemente lipschitziane di ordine  $\alpha < 1$  rispetto ad ogni  $\dot{x}_i$ , allora ove un integrale sia stabile tutti sono stabili.

*G. Sestini.*

**Grobman, D. M.:** Asymptotic behavior of the solutions of nonlinear systems close to linear ones. Doklady Akad. Nauk SSSR **108**, 571–574 (1956) [Russisch].

Let (1):  $\dot{x} = A x + f(t, x)$  and (2):  $\dot{y} = A y$ , where  $A$  is a constant matrix,  $f$  continuous for  $t \geq t_0$ ,  $x \in G \subset R^n$ ,  $f(t, 0) = 0$ ,  $\|f(t, x') - f(t, x'')\| \leq g \cdot \|x' - x''\|$ ,



$g$  a certain function; let  $\omega_1 < \dots < \omega_s$  be the different real parts of the characteristic roots of  $A$ ; let  $E_k(x)$ ,  $E_k(y)$  be the sets of solutions of (1), (2) having the exponent  $\omega_k$ ;  $E_k^l(x)$ ,  $E_k^l(y)$  the subsets for which  $\|x\|$ ,  $\|y\| = O(e^{\omega_k l} t^l)$ ;  $E_k^l[x(t^*)]$ ,  $E_k^l[y(t^*)]$  the sets of values of the above mentioned solutions for  $t = t^* \geq t_0$ . Two solutions  $x \in E_k(x)$ ,  $y \in E_k(y)$  are said to be geometrically similar if  $\|x\|/\|y\| \rightarrow 1$ , the angle between  $x(t)$  and  $y(t)$  tends to 0 and  $\|x(t) - y(t)\| = o(e^{\omega_k t})$ ; the equations (1) and (2) are geometrically similar ( $\omega_k, l$ ) if for any  $t^* \geq t_0$  a homeomorphism between  $E_k^l[x(t^*)]$  and  $E_k^l[y(t^*)]$  may be established such that corresponding solu-

tions are geometrically similar. Theorems: 1. If  $G = R^n$ ,  $g = g(t)$ ,  $\int_{t_0}^{\infty} t^{m_k + l + \beta} g(t) dt < +\infty$  for some  $\beta > 0$ ,  $m_k + 1$  being the maximum degree of the elementary divisors of  $A$  corresponding to roots with real part  $\omega_k$ , then (1) and (2) are geometrically similar ( $\omega_k, l$ ) and  $\Delta = \|x(t) - y(t)\|/\|y(t)\| = o(t^{-(l+\beta)})$  for any  $x \in E_k^l(x)$ ,  $y \in E_k^l(y)$ ; 2. If  $\omega_k < 0$ ,  $r_0 < 1$  and for each  $\|x\| = r \leq r_0$ ,  $g = g(r) \leq L |\log r|^{-(m_k + l + 1 + \varepsilon + \beta)}$ ,  $L, \varepsilon > 0$ ,  $\beta \geq 0$ , then (1) and (2) are locally geometrically similar ( $\omega_k, l$ ) (we omit the precise definition of „locally“ for the sake of brevity) and  $\Delta = o(t^{-(l+\beta)})$ ; 3. If for all  $r \leq r_0$ ,  $g = g(r) < L \cdot r^\alpha$ ,  $L, \alpha > 0$ , (1) and (2) are geometrically similar for all negative exponents and  $\Delta = o(e^{(\alpha\omega_k + \varepsilon)t})$ ,  $\varepsilon > 0$  arbitrarily small, for all  $\omega_k < 0$ ; 4–6. Similar results for  $\omega_k \geq 0$ ,  $G$  being a neighborhood of  $\infty$ ; 7. If  $G = R^n$  and  $\|f(t, x)\| \leq g \cdot \|x\|$ , where  $g$  is sufficiently small, then the exponents  $\lambda$  and „minus-exponents“  $\gamma = \lim_{t \rightarrow -\infty} \{-t^{-1} \log \|x(t)\|\}$  of (1) are near the corresponding ones of (2); for any solution of (1)  $\gamma + \lambda + \varepsilon \geq 0$ , where  $\varepsilon > 0$  diminishes with  $g$  and  $\varepsilon = 0$  if  $g = g(r) \rightarrow 0$  when  $r \rightarrow 0$  and  $r \rightarrow \infty$ ; 8. Assume that  $\dim E_k(x) = \dim E_k(y)$ ,  $\dim \bar{E}_k(x) = \dim \bar{E}_k(y)$  ( $\bar{E}_k$ : sets with  $\gamma = -\omega_k$ ); assume that any  $x \in E_s(x)$  is similar to a  $y \in E_s(y)$  and any  $x \in \bar{E}_1(x)$  is similar to a  $y \in \bar{E}_1(y)$ ; then almost all solutions of (1) (i. e. with exception of a set of dimension  $< n$ ) are normal (i. e. there is a solution  $y$  geometrically similar both for  $t \rightarrow \pm \infty$ ); if moreover any solution of (1) is similar for  $t \rightarrow +\infty$  to a solution  $y^+$  of (2) and for  $t \rightarrow -\infty$  to a solution  $y^-$  and  $\gamma + \lambda \geq 0$ , then only such solutions for which  $\gamma + \lambda = 0$  may be abnormal.

*J. L. Massera.*

### **Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:**

● Aronszajn, N., A. Douglis and C. B. Morrey jr. (editorial committee): **Transactions of the symposium on partial differential equations, held at the University of California, at Berkeley June 20—July 1, 1955.** New York-London: Interscience Publishers, Inc. 1956.

Erschienen als Commun. pure appl. Math. 9, Heft 3 (1956).

Auslander, Louis: **An ideal theory for exterior differential equations.** Ann. of Math., II. Ser. 63, 527–534 (1956).

Soient resp.  $V$ ,  $V^*$ ,  $\mathcal{A}(V)$ ,  $\mathcal{A}(V^*)$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , son dual et les algèbres extérieures correspondantes. L'anneau de  $\mathcal{A}(W)$ , algèbre extérieure de  $W \subset V$ , dans  $\mathcal{A}(V^*)$  coïncide avec l'idéal engendré par l'anneau de  $W$ . Soit  $\mathfrak{A}$  un idéal homogène de  $\mathcal{A}(V^*)$ . Un idéal  $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{A}$  est minimal pour  $\mathfrak{A}$  s'il est engendré par des éléments de  $V^*$  et ne contient aucun idéal de ce type. Soit  $\dim \mathfrak{M}$  la dimension du sous-espace de  $V^*$  engendrant  $\mathfrak{M}$ . Condition impliquant que tous les idéaux minimaux de  $\mathfrak{A}$  possèdent la même dimension; dans ce cas, l'on pose  $\dim \mathfrak{A} = \dim \mathfrak{M}$ . L'espace caractéristique  $S$  de  $\mathfrak{A}$  est l'ensemble des  $X \in V$  tels que leurs produits intérieurs par tout élément de  $\mathfrak{A}$  appartiennent à  $\mathfrak{A}$ .  $S$  est contenu dans l'intersection des anneaux de tous les idéaux minimaux de  $\mathfrak{A}$ . Si  $\mathfrak{A} = \cap \mathfrak{M}$ ,  $S$  coïncide avec cette intersection. Application au genre et au prolongement d'un système d'équations différentielles extérieures au sens d'E. Cartan.

*Th. Lepage.*

**Dolbeault, Pierre:** Formes différentielles méromorphes localement exactes. Trans. Amer. math. Soc. **82**, 494—518 (1956).

L'A. complète des résultats de la dernière partie de sa thèse [Ann. of Math., II. Ser. **64**, 83—130 (1956)] en étudiant l'espace vectoriel,  $E_s^{p+1,0}$  des classes obtenues en considérant les formes méromorphes localement exactes de degré  $(p+1, 0)$  qui admettent  $S$  comme ensemble polaire à la multiplicité 2 au plus, modulo les différentielles méromorphes sur  $V$ , de degré  $p$ , admettant  $S$  comme ensemble polaire à la multiplicité 1 au plus. On notera que  $V$  est une variété analytique complexe, sur laquelle  $S$  est un ensemble analytique principal sans singularité. Le calcul peut être achevé dans le cas où  $V$  est kählerienne compacte et où, de plus, l'espace fibré défini par  $S$  est suffisamment ample au sens de Kodaira (ce Zbl. **53**, 117); on a alors:

$$\dim E_s^{p+1,q} = \dim K^{p,q+1}(V, C) - \dim K^{p-1,q}(S, C).$$

L'homomorphisme  $K^{0,q}(S, C) \rightarrow K^{0,q+2}(V, C)$  qui associe à la classe de cohomologie de toute  $q$  forme fermée  $\omega$  sur  $S$  la classe de cohomologie du courant  $\omega'$  sur  $V$  défini par  $\omega'[\psi] = \int_S \omega \wedge \psi$  est alors un monomorphisme si  $q < m-3$  ou si  $q \geq m$  et est un épimorphisme si  $q = m-1$ .

*P. Lelong.*

**Morrey jr., Charles B.:** A variational method in the theory of harmonic integrals. II. Amer. J. Math. **78**, 137—170 (1956).

Ce mémoire II étend aux variétés riemanniennes à bord les méthodes et les résultats précédemment établis pour les variétés compactes dans le mémoire I (C. B. Morrey et J. Eells, ce Zbl. **70**, 99). Il débute par une étude du comportement, sur la frontière, de potentiels et quasi-potentiels définis dans un hémisphère, selon le procédé exposé dans I, l'outil employé étant toujours les inégalités de Poincaré-Soboleff. La partie 3 est consacrée aux propriétés de différentiabilité à la frontière des solutions des systèmes différentiels elliptiques mis sous forme intégrale. La partie 4 étudie les valeurs frontières des formes différentielles, et étend l'inégalité de Gaffney aux variétés à bord, pour chacun des espaces  $\mathfrak{P}_2^+$  (resp.  $\mathfrak{P}_2^-$ ) des formes „fortement différentiables“ satisfaisant à  $n\omega = 0$  (resp.  $t\omega = 0$ ). Ces résultats sont appliqués à la décomposition des formes différentielles, aux propriétés de différentiabilité des projections, et à l'étude des „+ potentiels“ et des „- potentiels“. Ils permettent de retrouver les résultats de Duff et Spencer (ce Zbl. **49**, 189) et ceux de P. E. Conner (ce Zbl. **57**, 74) sous des conditions de régularité très faibles (variétés de classe  $C^1$ ) analogues à celles imposées par K. O. Friedrichs dans une étude simultanée moins complète (ce Zbl. **66**, 75). Ces résultats sont également valables pour les variétés non orientables.

*J. Lelong.*

**Morrey jr., Charles B.:** A variational method in the theory of harmonic integrals. Commun. pure appl. Math. **9**, 499—508 (1956).

Cet article constitue un résumé extrêmement clair des principes et des principaux résultats qui ont fait l'objet de 2 mémoires détaillés (v. la récession précédente): Majoration de l'intégrale de Dirichlet „complète“ au moyen de l'intégrale de Dirichlet „faible“ d'une forme différentielle sur une variété Riemannienne; semi-continuité de la deuxième pour la convergence faible définie au moyen de la première; principe variationnel, construction du potentiel d'une forme différentielle donnée; résultats concernant la différentiabilité des potentiels et champs harmoniques; extension à une variété à bord.

*J. Lelong.*

**Conner, P. E.:** The Neumann's problem for differential forms on Riemannian manifolds. Mem. Amer. math. Soc. **20**, 58 p. (1956).

Démonstration d'une proposition annoncée dans une note antérieure (v. ce Zbl. **57**, 74) et relative à l'existence, sur une variété riemannienne „finie“, de trois opérateurs  $L_0, M_0, N_0$  complètement continus.

*Th. Lepage.*

**Arżanych, J. S.:** Die universelle Bedeutung der Berührungstransformationen. Uspechi mat. Nauk **11**, Nr. 1 (67), 167—172 (1956) [Russisch].

Verf. betrachtet das allgemeine Pfaffsche System

$$\sum_{\lambda=1}^{m+s} H_{\lambda\mu} (x_1, \dots, x_{m+s}) dx_\lambda = 0 \quad (\mu = 1, \dots, n),$$

das sich als gleichwertig zu

$$(1) \quad dq_\nu = \sum_{\sigma=1}^s \left( \frac{\partial H_\sigma}{\partial p_\nu} + \sum_{i=1}^r F_{i\sigma} \frac{\partial H_{i\sigma}}{\partial p_\nu} \right) dt_\sigma, \quad -dp_\nu = \sum_{\sigma=1}^s \left( \frac{\partial H_\sigma}{\partial q_\nu} + \sum_{i=1}^r F_{i\sigma} \frac{\partial H_{i\sigma}}{\partial q_\nu} \right) dt_\sigma$$

( $\nu = 1, \dots, n$ ) erweist. (1) wird wiederum durch die Berührungstransformation

$$p = \partial w / \partial q + A_k \partial w_k / \partial q, \quad -\eta = \partial w / \partial \xi + A_k \partial w / \partial \xi$$

(abgekürzte Vektor- und Summenschreibweise) in die Gestalt

$$(2) \quad d\xi = \left( \frac{\partial K_\sigma}{\partial \eta} + F_{i\sigma} \frac{\partial K_{i\sigma}}{\partial \eta} \right) dt_\sigma, \quad -d\eta = \left( \frac{\partial K_\sigma}{\partial \xi} + F_{i\sigma} \frac{\partial K_{i\sigma}}{\partial \xi} \right) dt_\sigma$$

übergeführt. Dabei ist  $K_\sigma = H_\sigma + \partial w / \partial t_\sigma + A_k \partial w_k / \partial t_\sigma$ ,  $K_{i\sigma} = H_{i\sigma}$  gesetzt worden, und die Multiplikatoren  $A_k$  bestimmen sich aus den endlichen Gleichungen  $w_\kappa(t_1, \dots, t_s; g, \xi) = 0$  ( $\kappa = 1, \dots, k$ ). Der Zusammenhang zwischen (1) und (2) kann auch durch folgendes System von Berührungstransformationen hergestellt werden:

$$\begin{aligned} q &= u - \partial \Phi / \partial v - M_\lambda \partial \Phi_\lambda / \partial v, & p &= v + \partial \Phi / \partial u + M_\lambda \partial \Phi_\lambda / \partial u; \\ \xi &= u + \partial \Phi / \partial v + M_\lambda \partial \Phi_\lambda / \partial v, & \eta &= v - \partial \Phi / \partial u - M_\lambda^* \partial \Phi_\lambda / \partial u. \end{aligned}$$

Hierbei ist  $\Phi = \Phi(t_1, \dots, t_s; u, v)$ , und die Multiplikatoren  $M_\lambda$  bestimmen sich aus den Gleichungen  $\Phi_\lambda(t_1, \dots, t_s; u, v) = 0$  ( $\lambda = 1, \dots, l$ ). In diesen sehr allgemeinen Zusammenhängen ist z. B. die bekannte Jacobische Behandlung der Differentialgleichungen der Mechanik durch Berührungstransformationen als Sonderfall enthalten.

*W. Burau.*

**Sonner, Hans:** Über die Zurückführung partieller Differentialgleichungen auf gewöhnliche. *Math. Z.* **65**, 483—493 (1956).

Die Idee des Verf. besteht darin, der partiellen Differentialgleichung in  $p+1$  unabhängigen Veränderlichen  $(t_0, \dots, t_p)$  eine gewöhnliche Differentialgleichung zuzuordnen, deren Lösungen Funktionen mit Werten im Raume der Funktionen von  $p$  reellen Variablen  $(t_1, \dots, t_p)$  sind. Damit der Raum dieser Funktionen normierbar sei, werden nur unendlich oft differenzierbare Funktionen, deren sämtliche Ableitungen eine gemeinsame Schranke besitzen, zugelassen. Um die eindeutige Existenz der Lösung des Anfangswertproblems zu sichern, wird von der rechten Seite die lokale Lipschitz-Bedingung in verschärfter Form vorausgesetzt. Auf diese Weise wird die Existenz der „starken“ Lösung des partiellen Gleichungssystems gewonnen. Da von den Anfangswerten die Ableitungsbeschränktheit vorausgesetzt wird, bekommt man nach diesem Verfahren die (Holomorphie-) Ableitungsbeschränktheit bezüglich der Variablen  $t_1, \dots, t_p$ , hinsichtlich der Variablen  $t_0$  jedoch nur die Differenzierbarkeit auf dem Komplement einer abzählbaren Menge. Das Verfahren wird an einigen einfachen Beispielen erläutert.

*K. Maurin.*

**Bochner, S.:** Weak solutions of linear partial differential equations. *J. Math. pur. appl.*, IX. Sér. **35**, 193—202 (1956).

Soient  $T^1, \dots, T^\mu$  des opérateurs différentiels donnés dans un ouvert  $S$  de  $R^n$ ; soient  $f^1, \dots, f^\mu$  des fonctions localement sommables dans  $S$ , solutions faibles (i. e. au sens des distributions) de  $T^1 f^1 + \dots + T^\mu f^\mu = 0$ , dans  $S_0 = S - A$ ,  $A$  compact de  $S$ . Soit  $\tilde{f}^i$  la fonction prolongée de  $f^i$  à  $S$  par 0 hors de  $S_0$ ; si les fonctions  $f^i$  sont convenablement „nulles“ sur  $A$ , alors  $T^1 \tilde{f}^1 + \dots + T^\mu \tilde{f}^\mu = 0$  au sens des distributions sur  $S$ ; la condition précise est

$$\int_{S_0 \cap A_\varepsilon} |f^\lambda(x)| dx = o(\varepsilon^{N\lambda}), \quad \lambda = 1, \dots, \mu, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$A_\varepsilon$  = ensemble des  $x$  à distance  $\leq \varepsilon$  de  $A$ ,  $N_\lambda$  = ordre de  $T^\lambda$ . L'A. utilise ce ré-



sultat pour donner une condition permettant d'affirmer que si  $f$  est solution usuelle dans  $S_0$  d'une équation aux dérivées partielles  $Af = 0$ , à coefficients donnés dans  $S$ , alors  $\tilde{f}$  est solution faible de la même équation dans  $S$ . J. L. Lions.

● **Carathéodory, C.: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Bd. I: Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.** 2. Aufl. Herausgeg. v. E. Hölder. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1956. XI, 171 S. Glm. DM 14,—.

In dieser von E. Hölder herausgegebenen 2. Auflage des in dies. Zbl. 11, 35 besprochenen Lehrbuches erscheint aus praktischen Gründen der um kleine Nachträge bereicherte erste Teil („Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung“) getrennt von dem zweiten („Variationsrechnung“). Im Vorwort zur 2. Auflage kündigt Herausgeber einen von ihm selbst verfaßten dritten Band („Ergänzungen zu Carathéodory's Lehrbuch der Variationsrechnung“) an, der verschiedene Zusätze — rein mathematischer Art, wie er hervorhebt, — enthalten soll.

M. J. De Schwarz.

**Hornich, Hans: Über die nirgends lösbaren linearen partiellen Differentialgleichungen.** J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 58, 103—109 (1956).

Verf. beschäftigt sich wieder mit der Gleichung  $\partial u/\partial x + \varphi(x, y) \partial u/\partial y = f(x, y)$ . Er hat früher (dies. Zbl. 64, 93) eine Funktion  $\varphi(x, y)$  derart konstruiert, daß die Gleichung bei fast beliebigem  $f(x, y)$  nie eine Lösung hat. Während damals die Funktion  $\varphi(x, y)$  die Forderung  $|\varphi(P_1) - \varphi(P_2)| < C \sqrt{P_1 P_2}$  erfüllte, werden jetzt auch solche  $\varphi$  ausfindig gemacht, für die nur  $|\varphi(P_1) - \varphi(P_2)| < \delta(P_1 P_2)$  ist, wo  $\delta(\varrho)^{-1}$  bis  $\varrho = 0$  hin integrierbar ist. O. Perron.

**Hornich, H.: Zur Lösbarkeit der hyperbolischen Differentialgleichungen Österreich.** Ingenieur-Arch. 10, 195—197 (1956).

Gestützt auf frühere Resultate über Differentialgleichungen erster Ordnung (dies. Zbl. 65, 328) wendet sich Verf. jetzt der zweiten Ordnung zu und beweist folgenden Satz: Zu jeder hyperbolischen Gleichung

$$a \partial^2 u / \partial x^2 + 2b \partial^2 u / \partial x \partial y + c \partial^2 u / \partial y^2 + d \partial u / \partial x + e \partial u / \partial y = P$$

mit in einem Gebiet  $G$  stetigen Koeffizienten  $a, b, \dots, P$ , wobei  $ac - b^2 < 0$ ,  $ac \neq 0$ ,  $\inf |a| > 0$ , kann man beliebig eng benachbarte angeben, die in keinem Teilgebiet von  $G$  eine Lösung haben. Unter einer beliebig eng benachbarten Gleichung ist dabei eine von der gleichen Form wie oben verstanden, wobei  $P$  unverändert geblieben ist, während die anderen Koeffizienten  $a, b, \dots$  durch andere stetige Funktionen  $a_1, b_1, \dots$  ersetzt werden, für die bei beliebig klein vorgegebenem  $\varepsilon$  überall  $|a - a_1| < \varepsilon$ ,  $|b - b_1| < \varepsilon$  usw. ist. O. Perron.

**Plis, A.: On the uniqueness of the non-negative solution of the homogeneous Cauchy problem for a system of partial differential equations.** Ann. Polon. math. 2, 314—318 (1956).

Verf. beweist den folgenden nicht-lokalen Eindeigkeitssatz für die Lösungen  $u_i(x, y_\lambda)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $\lambda = 1, 2, \dots, n$ ) des Systems

$$(*) \quad \frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^n \sum_{\mu=1}^m a_{ij\mu}(x, y_\lambda) \frac{\partial u_j}{\partial y_\mu} + \sum_{j=1}^m b_{ij}(x, y_\lambda) u_j.$$

Voraussetz.: (1) Die  $a_{ij\mu}, b_{ij}$  seien in  $\mathfrak{B}[0 < x \leq \alpha, |y_\lambda| \leq \beta]$  meßbar bez. der  $y_\lambda$  und es gebe Konstante  $A, B, L$  derart, daß in  $\mathfrak{B}$  die Ungleichungen  $|a_{ij\mu}| \leq A$ ,  $|b_{ij}| \leq B$ ,  $|a_{ij\mu}(\dots, y_{\lambda-1}, y_\lambda^{**}, y_{\lambda+1}, \dots) - a_{ij\mu}(\dots, y_{\lambda-1}, y_\lambda^*, y_{\lambda+1}, \dots)| \leq L \cdot |y_\lambda^{**} - y_\lambda^*|$  gelten. (2) Die Funktionen  $u_i(x, y_\lambda)$  seien stetig differenzierbar und Lösungen von (\*) in  $\mathfrak{B}[0 < x \leq \min(\alpha, \beta/mA), |y_\lambda| \leq \beta - mA]$ , und sie seien stetig in  $\mathfrak{B}$ . (3) In  $\mathfrak{B}$  gelte  $u_i(x, y_\lambda) \geq 0$ . (4)  $u_i(0, y_\lambda) = 0$  für  $|y_\lambda| \leq \beta$ . Beh.  $u_i(x, y_\lambda) = 0$  in  $\mathfrak{B}$ . Die Voraussetzung (3) kann ersetzt werden durch die Voraussetzung (3'), daß in  $\mathfrak{B}$  ein Teil der  $u_i$  nicht-negativ und der andere Teil nicht-positiv

ist. Die Bedingung der „gleichmäßigen Lipschitz-Stetigkeit“ der Koeffizienten  $a_{ij\mu}$  ist notwendig. Ebenso kann auf die Bedingung (3) bzw. (3') nicht verzichtet werden, wie ein Gegenbeispiel des Verf. (dies. Zbl. 55, 323) zeigt, bei dem  $m = 2$ ,  $n = 1$  ist und die  $a_{ij\mu}$ ,  $b_{ij}$  sogar zu  $C^\infty$  gehören. — Mit Hilfe des angegebenen Satzes wird ein entsprechender Satz für nicht-lineare Differentialgleichungssysteme bewiesen.

Johannes Nitsche.

**Levitan, B. M.:** Über die Lösung des Cauchyschen Problems für die Gleichung  $\Delta u - q(x_1, x_2, \dots, x_n)u = \partial^2 u / \partial t^2$  nach der Methode von Sobolev. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 20, 337—376 (1956) [Russisch].

Let  $u$  be a solution of the wave equation  $u_{tt} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + q u = 0$  satisfying  $u = 0$ ,  $u_t = f$  when  $t = 0$ . In his work on the asymptotic behaviour of spectral functions connected with Laplace's operator in three variables (this Zbl. 66, 84) the author has used certain estimates of  $u$  for  $t \rightarrow 0$ . These are now given for  $n > 3$ . When  $n = 2k + 1$  one has e. g.  $\int_0^t (t - \tau)^{k-1} u \, d\tau = \int_0^t (t - \tau)^{k-1} u_0 \, d\tau + z_t$  where  $u_0$  is the solution corresponding to  $q = 0$  and  $z_t = O(t^{k+2})$ . *L. Gårding.*

**Diaz, J. B.:** On singular and regular Cauchy problems. I. Singular Cauchy problem for the Euler-Poisson-Darboux equation. Commun. pure appl. Math. 9, 383—390 (1956).

Verf. gibt eine Zusammenfassung der bisher erzielten Ergebnisse und der benutzten Methoden, um das singuläre Cauchy-Problem für die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung  $\Delta u = u_{tt} + (k/t)u_t$  mit  $u(x_1, \dots, x_m, t = 0) = g(x_1, \dots, x_m)$ ,  $u_t(x_1, \dots, x_m, 0) = 0$  mit beliebigen Konstanten  $k$  und das verallgemeinerte Problem  $u_{xx} + u_{yy} - (k/t)u_t - h(x, y, t)u = 0$ ,  $t > 0$ ,  $k > 0$  mit obigen Anfangsdaten zu lösen.

G. Hellwig.

**Hellwig, Günter:** Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen mit Singularitäten. J. rat. Mech. Analysis 5, 395—418 (1956).

In the rectangle  $R$ :  $0 < x \leq r \leq 1$ ,  $s_0 \leq y \leq s$ , the equation  $L(u) = (A u_x)_x + (B u_x)_y + (B u_y)_x - (C u_y)_y + (P u)_x + (Q u)_y - Du = F$  is considered and assumed to be of the hyperbolic type. But in the closure of  $R$ , namely on the  $y$ -axis, the coefficients are allowed to have singularities and the equation may not be any longer of the hyperbolic type. The author, in particular, studies the case of its being parabolic, the  $y$ -axis being either a locus of cusps of the characteristics, or an ordinary envelope of the same. In such conditions a great many initial conditions may be thought of. The author, in an attempt to classify all the problems connected with the given equation, when the  $y$ -axis contains singular points of the coefficients, gives as very important the following initial conditions.  $(A_1)$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) = u_0(y)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} u_x(x, y) = u_1(y)$ ;  $(A_2)$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) = u_0(y)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} u_x(x, y) = 0$ ;  $(A_3)$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) = u_0(y)$ ;  $(A_4)$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} u_x(x, y) = u_1(y)$ ;  $(A_5)$ :  $(A_1)$  and  $f(u_0, u_1) = 0$ . Each one of them may not

define a well set problem unless the singularities on  $Oy$  be of a certain type. The greatest part of the paper is devoted to an enumeration of interesting cases and gives references to the work done by the author and others. The extreme complication of the notations and the elaborate enumeration of various cases makes it an impossible task to summarize the results, more than half of the paper being itself a summary. Suffice it to say that one of the most important concepts brought about to restrict the generality of the problems under consideration is that of weak solution. Putting  $U(x, y)$  for: (1)  $u(x, y) - x u_1(y) - u_0(y)$  in the cases  $(A_1)$  and  $(A_5)$ , (2)  $u(x, y) -$

$-u_0(y)$  in the cases  $(A_2)$  and  $(A_3)$ , (3)  $u(x, y) - x u_1(y)$  in the case  $(A_4)$  and denoting by  $R'$  the rectangle:  $0 \leq x \leq r' \leq r$ ,  $s_0 \leq s'_0 \leq y \leq s'_1 \leq s_1$ , a weak solution is defined by the following conditions: (a) in the cases  $(A_i)$ ,  $i = 1, 2, 4, 5, U$ ,  $U_{x_0} U_{y_0}$  are continuous in  $R'$ ; if  $i = 3$ ,  $U$  and  $U_{y_0}$  are continuous in  $R'$  and  $U_{x_0}$  is continuous in  $R'$  open on  $Oy$ ; (b) in every domain bounded by two characteristics passing through a point  $x_0, y_0$  of  $R$  and  $Oy$ :

$$\iint L(U) dx dy \equiv \oint (AU_x + BU_y) dy + (CU_y - BU_x) dx + \\ + \iint [(PU)_x + (QU)_y - DU] dx dy = \iint G dx dy$$

where  $G$  stands for  $F - L(x u_1)$ ,  $F - L(u_0)$  or  $F - L(x u_1)$ , with  $F = (A u_x)_x - (C u_y)_y - Du$ , according as one treats the cases  $(A_1)$ ,  $(A_5)$ , or  $(A_2)$ ,  $(A_3)$ , or  $(A_4)$ ; (c) inequalities  $|U| \leq H x_0^{h-k}$ ,  $|U_{x_0}| \leq K x_0^{h-k-1}$ ,  $|U_{y_0}| \leq L x_0^{h-k}$ , where  $H, K, L$  are constants and  $h, k$  suitable exponents, hold; (d)  $U$  is uniform and zero on  $Oy$ , in the sense of two-dimensional convergence. — Under certain restrictions, expressed by complicated inequalities, an existence theorem is proved for the case of a weak solution. The method of proof is a skilful application of the classical method of iterations. A last paragraph studies conditions under which the solution is twice continuously differentiable.

C. Racine.

Chen, Y. W.: Discontinuity of solutions of quasilinear differential equations in two variables. Commun. pure appl. Math. 9, 373—381 (1956).

Verf. behandelt das charakteristische Anfangswertproblem der linearen Differentialgleichung  $-a^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_y/y = 0$ ,  $a = \text{const.}$  Längs der vom Punkte  $x = y = 0$  aus links laufenden Charakteristik  $C^-(\lambda = 0)$  soll  $u = \varphi_x = 0$ ,  $v = \varphi_y = 0$  sein. Ist auf der rechtslaufenden  $C^+(\mu = 0)$ :  $\varphi_x = \varphi_y = 1/\lambda$ , so ergibt sich, indem man in üblicher Weise die Differentialgleichungen für  $u$  und  $v$  aufstellt, daß sich die Ableitungen von  $u$  und  $v$  bei Annäherung an  $x = y = 0$  in dem Bereich zwischen den beiden Charakteristiken wie  $1/\sqrt{y}$  verhalten. Dieses Verhalten ist in gewissem Sinne typisch. Setzt man links von der  $C^-$ :  $u = v = 0$ , so kann man das Ergebnis dahin interpretieren, daß die in diesem Falle vorliegenden Unstetigkeiten der 2. Ableitungen von  $\varphi$  am Punkt  $x = y = 0$  reflektiert werden. Ist dagegen  $a = a(\varphi_x, \varphi_y)$ , so zeigt Verf., daß auf der  $C^+$  die zweiten Ableitungen i. a. stetig bleiben, wenigstens dann, wenn die Funktionaldeterminante der Abbildung von  $x, y$  nach  $\lambda, \mu$  in dem Zwickel zwischen den beiden Charakteristiken nicht verschwindet. Die Ergebnisse lassen sich auf die Gleichung  $A \varphi_{xx} + B \varphi_{xy} + C \varphi_{yy} + k \varphi_y/y = 0$ ,  $A, B, C, k = \text{Funktionen von } \varphi_x, \varphi_y$ , übertragen. (Vgl. auch dies. Zbl. 49, 259 und 53, 146.) — Speziell für die Differentialgleichung der Minimalfläche gilt folgendes: Gegeben in der  $(x, y)$ -Ebene eine geschlossene konvexe Kurve  $C$  mit höchstens endlich vielen vorspringenden Ecken und eine positive Konstante  $\beta$ . Dann gibt es im Außenbereich von  $C$  stets eine Minimalfläche  $z = z(x, y)$ , so daß außer an den Ecken auf  $C$ :  $\partial z / \partial n = 0$  und im Unendlichen  $z = \beta x + O(r^{-1})$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$  ist. Ferner: Gegeben in der  $(x, y)$ -Ebene ein Polygon  $C_p$  (die übrigen Bezeichnungen wie oben). Dann gibt es keine Minimalfläche, so daß  $z = 0$  auf  $C_p$  und im Unendlichen  $z = \beta x + O(r^{-1})$ . Zwei hieran anschließende offene Probleme werden formuliert.

C. Heinz

Morawetz, Cathleen S.: Note on a maximum principle and a uniqueness theorem for an elliptic-hyperbolic equation. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 236, 141—144 (1956).

Se in un campo  $D$  aperto di contorno  $B$  la funzione  $u(x, y)$  è soluzione dell'equazione di tipo misto

(1)  $K(y) u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  $K(0) = 0$ ,  $y K(y) > 0$  per  $y \neq 0$ ,  
si definisce la funzione

$$\varphi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} [-2 u_x u_y dx + (K(y) u_x^2 - u_y^2) dy],$$



dove  $(x_0, y_0)$  è un punto di  $D$ . Si dimostra che nel campo chiuso  $D + B$  la funzione  $\psi(x, y)$  assume il suo massimo valore sul contorno  $B$ ; questo risultato viene utilizzato per dimostrare l'unicità della soluzione del problema di Frankl, relativo alla (1).

*M. Cinquini-Cibrario.*

**Guderley, Gottfried:** On the development of solutions of Tricomi's differential equation in the vicinity of the origin. *J. rat. Mech. Analysis* **5**, 747—790 (1956).

Verf. untersucht die Darstellbarkeit der Lösungen der Tricomi-Gleichung  $(*) \psi_{yy} - y \psi_{xx} = 0$  durch gewisse Systeme von partikulären Lösungen. Als ein solches System bietet sich das der durch Separation gewonnenen Lösungen  $\psi = \varrho^{n/3} G(\xi)$ ,  $\varrho = -y^3 + (\frac{3}{2}x)^2$ ,  $\xi = y(\frac{3}{2}x)^{-2/3}$  an. Stellt man die physikalisch plausible zusätzliche Forderung, daß diese Lösungen für  $\xi = 1$ , d. h. längs der Charakteristik  $x = \frac{2}{3} y^{3/2}$  mitsamt ihren Ableitungen stetig bleiben, so erhält man eine erste Schar von Partikularlösungen. Eine zweite Schar ergibt sich aus der Forderung  $G = 0$  für  $\xi = 1$ . Dies führt zu einem Eigenwertproblem, dessen zugehörige Eigenwerte alle reell sind. Aus bekannten allgemeinen Sätzen schließt man hieraus auf die Vollständigkeit dieses zweiten Systems von Partikularlösungen. [Vgl. Guderley, AF. Techn. Report Nr. **6343** (1951).] Eine in gewissen Grenzen willkürliche Funktion von  $\xi$  kann also nach diesen Eigenfunktionen in eine Fourier-Reihe entwickelt werden, und ein Grenzprozeß führt von da aus zu einem Fourier-Integral. Das zweite System von Lösungen scheint jedoch zunächst insofern etwas künstlich, als diese Lösungen für  $\varrho = 0$  singulär sind und für  $\xi = 0$  die Ableitungen von  $\psi$  nicht stetig bleiben. Verf. benutzt diese Eigenschaft zu folgendem Kunstgriff: Die Lösungen von  $(*)$  sind durch Vorgabe von  $\psi$  oder einer seiner Ableitungen längs gewisser Kurven der  $(x, y)$ -Ebene gegeben (Tricomi-Problem, Frankl-Problem). Man denke sich nun in der  $(\varrho, \xi)$ -Ebene eine (etwa dem Tricomi-Problem entsprechende) Kurve  $C: \varrho = \tilde{\varrho}(\xi)$  für  $-\infty < \xi < 1$ , gegeben;  $\varrho < \tilde{\varrho}$  ist der Innen- und  $\varrho > \tilde{\varrho}$  der Außenbereich. Auf  $C$  werden zwei Funktionen  $\varphi_1(\xi)$  und  $\varphi_2(\xi)$  willkürlich vorgegeben. Im allgemeinen existiert jetzt im Innenbereich keine Lösung von  $(*)$ , so daß bei Annäherung an  $C$   $\psi = \varphi_1$  und  $\psi_0 = \varphi_2$  ist. Es gibt jedoch, wie Verf. zeigt, eine (eindeutige) Lösung  $\psi$  von  $(*)$  in der ganzen Ebene, ausgenommen die Kurve  $C$ , mit den Randbedingungen, daß  $\psi$  im Unendlichen verschwindet und auf  $C$   $\psi$  und  $\psi_0$  die Sprünge  $\varphi_1(\xi)$  und  $\varphi_2(\xi)$  aufweisen (inhomogenes Randwertproblem). „Passen“  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  zusammen [so daß  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  die Randwerte von  $\psi$  und  $\psi_0$  einer Lösung von  $(*)$  sind], so muß die Lösung dieses letzteren inhomogenen Randwertproblems im Außenbereich identisch verschwinden. (Man denke zum Vergleich an die entsprechenden Verhältnisse z. B. bei der Laplace-Gleichung.) Es zeigt sich nun auf funktionentheoretischem Wege, daß man die Entwicklungen der Lösungen dieses inhomogenen Randwertproblems nach den Lösungen der zweiten Schar so transformieren kann, daß nur noch Funktionen der ersten Schar auftreten. Damit ist gezeigt, daß auch die Funktionen der ersten Schar ein vollständiges System bilden und gleichzeitig ergibt sich ein Weg, eine Lösung der Tricomi-Gleichung nach den Funktionen der ersten Schar zu entwickeln.

*C. Heinz.*

**Blondel, Jean-Marie:** Sur le comportement à l'infini des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **243**, 833—835 (1956).

L'A. studia il comportamento per  $x \rightarrow +\infty$  e  $y$  fisso della soluzione  $z(x, y)$  del problema  $\partial^2 z / \partial x \partial y + A(x, y)z = 0$ ,  $z(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $z(0, y) = \psi(y)$  dove  $A(x, y)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(y)$  sono funzioni assegnate soddisfacenti a certe condizioni. I risultati sono tutti enunciati senza dimostrazione.

*R. Conti.*

**Rutman, M. A.:** On the stability of solutions of certain systems of linear differential equations with variable coefficients. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **108**, 770—773 (1956) [Russisch].

En appliquant plus loin les méthodes exposées dans les notes antérieures (ce

Zbl. 64, 119, 65, 106) l'A. démontre le théorème suivant: Soit  $y$  la solution du problème

$$\partial^n y / \partial t_1 \dots \partial t_n - A(t_1, \dots, t_n) y = x_0(t_1, \dots, t_n)$$

$$y(0, t_2, \dots, t_n) = x_1(t_2, \dots, t_n), \dots, y(t_1, \dots, t_{n-1}, 0) = x_n(t_1, \dots, t_{n-1}); 0 \leq t_1, \dots, t_n < \infty.$$

On suppose les opérateurs  $A$  compacts et on note

$$\alpha(t_1, \dots, t_n) = \max_{\lambda \in \sigma_A} \operatorname{Re} \sqrt[n]{\lambda}, \quad \alpha_\omega = \lim_{\Sigma t_j \rightarrow \infty} \bar{\alpha}.$$

On suppose aussi que pour  $\Sigma t_j'$  et  $\Sigma t_j''$  assez grands et  $\Sigma |t' - t''| \leq 1$  on a  $\|A(t_1', \dots, t_n') - A(t_1'', \dots, t_n'')\| < \varepsilon$ , avec un certain  $\varepsilon$ , dont le choix résulte de la démonstration. Alors, si  $\lim e^{-\alpha \Sigma t_j} \|x_0(t_1, \dots, t_n)\| < \infty$  et

$$\lim e^{-\alpha \Sigma t_j} \|x_k(t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n)\| < \infty \quad (k = 1, \dots, n),$$

on a aussi  $\lim e^{-\alpha \Sigma t_j} \|y(t_1, \dots, t_n)\| < \infty$ . On énonce encore deux théorèmes analogues où intervient aussi les dérivées de  $y$  d'ordre  $< n$ . G. Marinescu.

**Chalilov, Z. I.:** Über die Untersuchung der asymptotischen Stabilität der Lösungen von Randwertaufgaben für partielle Differentialgleichungen. Akad. Nauk Azerbajdz. SSR, Doklady 12, 375—378 (1956) [Russisch].

Consider the parabolic quasilinear equation  $u_t = Lu + F(t, x, u)$  where  $L$  is a uniformly elliptic differential operator of order 2 defined in a bounded region of real  $n$ -space,  $F$  is continuous and  $|F| \leq q|u|$  when  $|u| = \sup |u(x)|$  is small enough, then  $\lim u(t, x) = 0$ ,  $(t \rightarrow \infty)$  uniformly in  $x$ . A complete proof which uses functional analysis will be published later. L. Gårding.

**Éjdelman, S. D.:** Das Verhalten der Lösungen der Wärmeleitungsgleichung in der Umgebung einer isolierten Singularität. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 3 (69), 207—210 (1956) [Russisch].

L'A. étend aux solutions de l'équation de la chaleur (1)  $\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$  le théorème sur le comportement au voisinage d'un point singulier isolé. Soit  $u(x_1, x_2, x_3, t) = u(x, t)$  une solution de (1) ayant un point singulier isolé à l'origine. On a

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{m_1+m_2+m_3=m} a_{m_1 m_2 m_3} \frac{\partial^m U(x, t)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \partial x_3^{m_3}} + u_0(x, t) \quad \text{pour } t > 0,$$

avec  $U(x, t) = U(x, t; 0, 0)$ , la fonction

$$U(x, t; \xi, \tau) = (2\sqrt{\pi(t-\tau)})^{-3} \exp \left[ -\frac{1}{4(t-\tau)} \sum_{k=1}^3 (x_k - \xi_k)^2 \right]$$

étant la solution fondamentale de (1). La fonction  $u_0(x, t)$  est une solution de (1) régulière à l'origine. Le nombre  $N$  dépend de l'ordre de singularité de la fonction  $u(x, t)$ . Le théorème s'étend à un nombre quelconque de variables indépendantes. On en déduit un théorème sur la singularité écartable. L'A. annonce qu'il a démontré le théorème analogue relatif aux systèmes paraboliques (au sens de Petrovsky) d'ordre quelconque sous la forme générale. M. Krzyżański.

**McKean jr., Henry P.:** Elementary solutions for certain parabolic partial differential equations. Trans. Amer. math. Soc. 82, 519—548 (1956).

Soit  $S$  un intervalle  $(s_1, s_2)$  de l'axe des  $x$  et  $m(dx)$  la mesure de Borel, positive pour les sous-ensembles ouverts de  $S$ . Dans le présent travail intervient la dérivée seconde généralisée  $u^+(dx)/m(dx) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [m(x, x+\varepsilon)]^{-1} [u^+(x+\varepsilon) - u^+(x)]$  et l'opérateur  $\mathcal{B}u = u^+(dx)/m(dx) + c(x)u(x)$ , étudié par W. Feller. L'A. effectue la représentation spectrale de  $\mathcal{B}u$  et détermine la fonction de Green pour l'équation  $u_t = \mathcal{B}u$ , correspondant à certaines conditions aux limites classiques. Dans le procédé de la recherche de cette fonction l'A. applique les résultats de W. Feller et E. Hille. M. Krzyżański.

**Zagorskij, T. Ja.:** Einige Randwertaufgaben für parabolische Systeme im Halbraum. Doklady Akad. Nauk SSSR **106**, 11—14 (1956) [Russisch].

The author considers the parabolic system (1)  $\partial u / \partial t = L(\partial / \partial x) u$  where

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left( \sum_{k_1 + \dots + k_n = s} a_{l_j}^{(k_1 \dots k_n)} \frac{\partial^s}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right); \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix};$$

and where  $a_{l_j}^{(k_1 \dots k_n)}$  are constants. The problem is to find a solution of (1) in the region defined by  $x_n > 0$ ,  $t > 0$ ,  $|x_j| < \infty$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ) and satisfying the conditions (2)  $\lim_{x_n \rightarrow 0} B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = f(x', t)$  with  $u|_{t=0} = 0$ , where

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left( \sum_{k_1 + \dots + k_n = s_l} b_{l_j}^{(k_1 \dots k_n)} \frac{\partial^{s_l}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right); \quad f(x', t) = \begin{pmatrix} f_1(x', t) \\ \vdots \\ f_{s_{N/2}}(x', t) \end{pmatrix}$$

where the  $b_{l_j}^{(k_1 \dots k_n)}$  are constants ( $l = 1, 2, \dots, s_{N/2}$ ;  $j = 1, \dots, N$ ),  $s_l < s$ , and where  $x' = x'(x_1, \dots, x_{n-1})$  are such that

$$|f_j(x', t)| < A(x') e^{\sigma_0 t}, \quad \sigma_0 > 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} A(x') dx' < \infty.$$

The author shows that the parabolic system (1) has a solution in  $x_n > 0$  satisfying the condition (2) which can be expressed in terms of the resolvent (or Green's) matrix as follows:

$$u = \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi', t, \tau) f(\xi', \tau) d\xi'.$$

A. J. Lohwater.

**Bergman, Stefan:** New methods for solving boundary value problems. Z. angew. Math. Mech. **36**, 182—191 (1956).

Die Arbeit bringt einen weitgehenden und mit zahlreichen Literaturhinweisen versehenen Überblick über die von Bergman entwickelte Theorie zur Lösung partieller Differentialgleichungen und ihre Anwendung auf Randwertprobleme. — Die im Nullpunkt regulären Lösungen von (1)  $\Delta \psi + a \psi_x + b \psi_y + c \psi \equiv 4 \psi_{z^*} + A \psi_z + B \psi_{z^*} + C \psi = 0$  ( $z = x + i y$ ,  $z^* = x - i y$ ,  $A, B, C$  analytisch) lassen sich mit Hilfe von Bergman-Operatoren in der Form

$$\psi(z, z^*) = P(f) \equiv \int_{-1}^1 E(z, z^*, t) f(z(1-t^2)/2) (1-t^2)^{-1/2} dt$$

darstellen; diese Operatoren transformieren beliebige im Nullpunkt reguläre Funktionen  $f(z)$  einer komplexen Veränderlichen in Lösungen von (1); die „Erzeugende“  $E$  hängt von  $A, B, C$ , aber nicht von der Wahl von  $f$  ab. Ist  $E(z, 0, t) = 1$ , so heißt  $P$  „Operator 1. Art“. Für  $f(z) = z^n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  erhält man eine vollständige Menge unabhängiger Partikulärlösungen von (1). Es wird gezeigt, wie sich das 1. und 2. Randwertproblem für einfach-zusammenhängende Gebiete mit Hilfe dieser Lösungen behandeln läßt. Die Theorie der Bergmanschen Kernfunktion ermöglicht die Herleitung expliziter Formeln für die Stromfunktion kompressibler Flüssigkeiten. Weiterhin werden andersartige Operatoren untersucht, auch solche, mit deren Hilfe sich Lösungen von partiellen Differentialgleichungen in drei Veränderlichen erzeugen lassen.

E. Kreyszig.

**Kreyszig, Erwin:** On certain partial differential equations and their singularities. J. rat. Mech. Analysis **5**, 805—820 (1956).

Es wird die partielle Differentialgleichung

$$\Delta \psi + \alpha(x, y) \partial \psi / \partial x + \beta(x, y) \partial \psi / \partial y + \gamma(x, y) \psi = 0$$

untersucht, wobei  $\alpha, \beta, \gamma$  reell analytische Funktionen der reellen Veränderlichen  $x$  und  $y$  sind. Nach Fortsetzung der Koeffizienten zu komplexen Argumenten und



nach einer Transformation geht die Gleichung in  $L(u) = u_{z^*} + B(z, z^*) u_{z^*} + C(z, z^*) u = 0$  über, wobei  $z, z^*$  komplexe Veränderliche sind und  $B$  und  $C$  holomorphe Funktionen. Der „Bergmannsche Operator“

$$P(f) = \int_{-1}^{+1} E(z, z^*, t) f\left(\frac{z}{2}(1-t^2)\right) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

transformiert für geeignete „erzeugende Funktionen“  $E(z, z^*, t)$  holomorphe Funktionen  $f$  einer komplexen Veränderlichen in partikuläre Lösungen von  $L(u) = 0$ . Der Autor gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für  $B$  und  $C$  an, so daß die

Funktionen der Form  $E = e^{Q(z, z^*, t)}$ ,  $Q(z, z^*, t) = \sum_{\mu=1}^m q_{\mu}(z, z^*) t^{\mu}$  erzeugende

Funktionen sind. Erzeugt man mit solchem  $E$  und  $f = z^n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  Lösungen von  $L(u) = 0$ , so genügen diese auch einer Differentialgleichung der Form

$$\sum_{\kappa=1}^k b_{\kappa}(z, z^*) \frac{\partial^{\kappa} u}{\partial z_1^{\kappa}} = 0, \quad (z_1 = \tfrac{1}{2}(z + z^*))$$

deren Koeffizienten  $b_{\kappa}$  sich aus den  $q_{\mu}$  rekursiv berechnen lassen. Sind die  $q_{\mu}$  holomorph in einer Umgebung des Nullpunktes, so auch  $B$  und  $C$ , während die Koeffizienten  $b_{\kappa}$  Pole haben. Schließlich werden für den Fall, wo  $B$  und  $C$  Singularitäten haben, detaillierte Relationen über den Zusammenhang mit den Singularitäten der  $q_{\mu}$  und  $b_{\kappa}$  bewiesen.

H. J. Bremermann.

**Finn, Robert:** Growth properties of solutions of non-linear elliptic equations. Commun. pure appl. Math. 9, 415—423 (1956).

Beitrag des Verf. zu dem Symposium über partielle Differentialgleichungen, welches im Juni 1955 in Berkeley, USA stattgefunden hat. Gegenstand der Arbeit sind quasilineare elliptische Differentialgleichungen (\*)  $a \varphi_{xx} + 2b \varphi_{xy} + c \varphi_{yy} = D$ , bei denen die Koeffizienten  $a, b, c, D$  von  $x, y, \varphi, \varphi_x = p, \varphi_y = q$  abhängen und wo  $a c - b^2 = 1$ ,  $a > 0$  gelten soll, aber i. a. nicht gleichförmige Elliptizität (das hieße  $a + c < \text{const}$ ) angenommen ist. Beispiele sind die Differentialgleichungen der ebenen Strömung eines polytropen Gases und die der Flächen  $z = \varphi(x, y)$  konstanter mittlerer Krümmung (1)  $\alpha \varphi_{xx} + 2\beta \varphi_{xy} + \gamma \varphi_{yy} = 2HW$ . Hierbei ist  $\alpha = (1 + q^2) W^{-1}$ ,  $\beta = -p q \cdot W^{-1}$ ,  $\gamma = (1 + p^2) \cdot W^{-1}$ ,  $W = (1 + p^2 + q^2)^{1/2}$  gesetzt. In manchen Fällen läßt sich (\*) in der Form einer Divergenzgleichung schreiben: (\*)  $\partial A(x, y, \varphi, p, q) / \partial x + \partial B(x, y, \varphi, p, q) / \partial y = 0$ . Durch die Anwendungen und insbesondere seit den klassischen Arbeiten von S. Bernstein haben Untersuchungen über die Struktur der Lösungen von (\*) Wichtigkeit erlangt. Der Verf. gibt — ohne Beweise aber mit ausführlichen Literaturangaben — eine Zusammenstellung von Resultaten, welche teilweise den in den letzten Jahren erschienenen Veröffentlichungen insbes. des Verf. selbst, von L. Bers u. a. entstammen und teilweise unveröffentlicht sind. Es handelt sich um Sätze über a priori-Abschätzungen für den Gradienten und über das Anwachsen der Lösungen, über Lösbarkeit des Dirichletschen Problems für konvexe Gebiete (die Dreipunktebedingung ist unter Umständen überflüssig), über Nicht-Existenz ganzer nicht-linearer Lösungen und über Hebbarkeit isolierter Singularitäten. Neu ist z. B. der Satz, daß eine einwertige Lösung  $\varphi(x, y)$  von  $\partial A(p, q) / \partial x + \partial B(p, q) / \partial y = 2H(\varphi)$  keine isolierten Singularitäten haben kann. Dabei ist vorausgesetzt, daß das Elliptizitätsgebiet in der  $(p, q)$ -Ebene konvex ist und alle Punkte  $(\varphi_x, \varphi_y)$  enthält. Es kommt dem Verf. darauf an zu betonen, daß unter den verschiedenen notwendigen Voraussetzungen die Quasikonformität gewisser mit den Differentialgleichungen (\*) verknüpfter Metriken die verantwortliche Rolle für die Gemeinsamkeit im strukturellen Verhalten der Lösungen spielt. (Bedingungen für diese Quasikonformität kann man i. a. den Koeffizienten von (\*) auferlegen.) Zwei Metriken  $R: ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$  und  $\bar{R}: d\bar{s}^2 = \bar{E} dx^2 + 2\bar{F} dx dy + \bar{G} dy^2$  mit  $EG - F^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = 1$  heißen quasikonform aufeinander bezogen (in Zeichen:  $R \sim \bar{R}$ ), wenn es eine Kon-

stante  $k > 0$  gibt, mit welcher  $1/k \leq d\bar{s}/ds \leq k$  gilt, oder, anders ausgedrückt, wenn es eine Konstante  $K \geq 1$  gibt, für die  $E\bar{G} - 2F\bar{F} + G\bar{E} \leq 2K$  ausfällt. Neben der euklidischen Metrik  $R_0: ds_0^2 = dx^2 + dy^2$  sind mit einer Lösung  $\varphi(x, y)$  von (\*) die Metriken  $R_1: ds_1^2 = c dx^2 - 2b dx dy + a dy^2$  und  $R_2: ds_2^2 = \gamma dx^2 - 2\beta dx dy + \alpha dy^2 = \lambda(dx^2 + dy^2 + d\varphi^2)$  gegeben, wobei die  $\alpha, \beta, \gamma$  der Gleichung (1) entnommen sind. Im Falle (\*) existiert eine Funktion  $\psi(x, y)$  mit  $\psi_x = -B$ ,  $\psi_y = A$ . Dann kann man die Metriken  $R_3: ds_3^2 = \mu \cdot (d\varphi^2 + d\psi^2)$  und  $R_5: ds_5^2 = \nu(dx^2 + dy^2 + d\psi^2)$ ,  $\nu = (1 + A^2 + B^2)^{-1/2}$  einführen. Die Bedingung  $R_0 \sim R_4$  bedeutet einfach  $A^2 + B^2 < \text{const.}$  Die Bedingung  $R_1 \sim R_2$  charakterisiert im wesentlichen eine Klasse von Differentialgleichungen (\*), welche der Verf. „Gleichungen vom Typ der Minimalflächengleichung“ nennt. *Johannes Nitsche.*

**Nirenberg, Louis:** Estimates and existence of solutions of elliptic equations. Commun. pure appl. Math. 9, 509—529 (1956).

The paper is a survey of some a priori estimates for solutions of linear elliptic partial differential equations, in connection with the Dirichlet problem. The author restricts himself to the Dirichlet (or a generalized Dirichlet) problem with vanishing boundary values. Mentioning a certain number of results, he proves only one lemma whose proof, he says, is not easily available. The paper considers separately equations of the second order and equations of higher order or systems of equations. It ends with a very good bibliography containing 37 references. In the case of an equation of the second order, the estimates are obtained either from the maximum principle, or from the more complicated methods developed by Schauder; these are pointwise estimates. There are also the square integral estimates found, for instance, in Courant and Hilbert's Methods of Mathematical Physics. More refined estimates, in the case of two independent variables, and due to Bers, are also mentioned. Passing to equations of higher order and to systems, the author remarks that, to obtain well posed problems, it is imperative to restrict oneself to strongly elliptic systems in the sense of Vishik. Considering the case of a unique equation of the form

$$(1) \quad Lu \equiv \sum_{\sigma, \tau}^{1 \dots s} (-1)^\sigma D^\sigma a^{\sigma, \tau} D^\tau u = f$$

and introducing a function  $\zeta \in C^\infty$  which vanishes near the boundary, the Dirichlet problem may be reduced, first to finding a solution  $u$  of the equation, in integral form and with complex coefficients:

$$(2) \quad B[\zeta, u] \equiv \sum_{\sigma, \tau \leq s} \int D^\sigma \zeta \cdot \overline{a^{\sigma, \tau}} D^\tau u dx = (\zeta, f)$$

where  $(\zeta, f)$  denotes the scalar product in the appropriate Hilbert space, and then to prove, under certain conditions, that  $u$  is  $2s$  times continuously differentiable. The reduction of the given equation in differential form to its integral form is made by application of a method due to Gårding, utilizing an important inequality. The second part of the problem calls for applications of methods due to Friedrichs and Browder. They depend on estimates of the Schauder type  $\|u\|_{2s} \leq \text{const} (\|Lu\|_0 + \|u\|_0)$  found recently by Miranda, Morrey, Douglis and the author. A number of more refined estimates, and of methods to obtain them, are also mentioned. In an appendix is developed the proof of a lemma which gives an upper bound of the norm of a solution of an equation of the above mentioned type by means of integrals whose integrands are simple expressions in the absolute values of the derivatives and of the function itself. *C. Racine.*

**Serrin, James:** On the Harnack inequality for linear elliptic equations. J. Analyse math. 4, 292—308 (1956).

Sia  $u(P)$ ,  $P = (x_1, \dots, x_n)$  una soluzione positiva di classe  $C^2$  dell'equazione (\*)  $Lu = \sum_{i,j} a_{ij}(P) \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j + \sum_i b_i(P) \partial u / \partial x_i + c(P) u = 0$ , essendo l'opera-

tore  $L'$  uniformemente ellittico, tale cioè che esiste una costante  $\lambda > 0$  per cui si abbia  $\lambda^{-1} (\sum \xi_i^2) \leq \sum a_{ij}(P) \xi_i \xi_j \leq \lambda (\sum \xi_i^2)$  per ogni  $P$  e per ogni  $n$ -upla reale  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Nel caso  $n = 2$  una disuguaglianza del tipo di quella classica di Harnack per le funzioni armoniche è stata trovata per la  $u(P)$  di recente da L. Bers e L. Nirenberg (questo Zbl. **65**, 328) sotto ipotesi assai generali sui coefficienti della (\*), i quali sono supposti soltanto misurabili e limitati, con  $c \leq 0$ . L'A. trova anch'egli una disuguaglianza del tipo di Harnack sotto le stesse ipotesi, ma con dimostrazione del tutto elementare: precisamente, supposta la  $u(P)$ , soluzione di (\*) definita e positiva in un cerchio di centro 0 e raggio  $a \leq 1$ , esistono due funzioni  $f(t)$ ,  $g(t)$  definite e continue per  $0 \leq t \leq 1$ , la prima decrescente da  $f(0) = 1$  a  $f(1) = 0$ , la seconda crescente da  $g(0) = 1$ , entrambe dipendenti solo da  $\lambda$  e dai massimi moduli dei coefficienti di (\*), per cui si ha  $f(\varrho/a) \leq u(P)/u(0) \leq g(\varrho/a)$ , con  $\varrho = |0 - P|$ . Aggiungendo sui coefficienti a ipotesi di continuità del tipo delle condizioni del Dini, l'A. riesce poi ad ottenere una disuguaglianza del tipo di Harnack anche nel caso  $n > 2$ . Conclude il lavoro la discussione della equazione non omogenea  $Lu = f(P)$ . R. Conti.

**Landis, E. M.: On the Phragmén-Lindelöf principle for elliptic equations.** Doklady Akad. Nauk SSSR **107**, 508—511 (1956) [Russisch].

Let  $u$  be a solution of the elliptic equation  $Lu = \sum A_{jk} \partial^2 u / \partial x_j \partial x_k + Cu = 0$  ( $C \leq 0$ ) in an unbounded region  $G$  of real  $n$ -space which is  $\leq 1$  on the boundary of  $G$ . Further, let  $q > 1$ , let  $Q_m$  be the cube  $|x_k| < q^m$ , put  $P_m = Q_{m+1} - Q_m$  and let  $\eta$  be a number such that  $\text{mes } G \cap P_m / \text{mes } P_m < \eta^{n-1}$  for sufficiently large  $m$ . Then under certain conditions on the coefficients of  $L$ , the following generalization of the Phragmén-Lindelöf principle is proved: Either  $u \leq 1$  in  $G$  or else it grows at least as  $|x|^{\beta/\eta}$  when  $|x| \rightarrow \infty$ , where  $\beta > 0$  depends on  $L$  and  $q$ . It is further required that  $\eta$  is less than a number depending on  $L$  and  $q$ . The conditions on  $L$  say roughly that the coefficients  $A_{jk}$  are bounded with continuous derivatives of order  $\leq 2$  tending to 0 with  $|x|^{-1}$ . When  $C$  keeps away from 0, they can be relaxed somewhat. L. Gårding.

**Hartman, Philip: On the local behavior of solutions of  $\Delta u = g(x, u, \nabla u)$ .** Commun. pure appl. Math. **9**, 435—445 (1956).

Résumé einer Arbeit von P. Hartman und A. Wintner (dies. Zbl. **66**, 80). Johannes Nitsche.

**Kudrjavcev (Kudrjajtsev), L. D.: On the solution by the variation method of elliptical equations that degenerate at the domain boundary.** Doklady Akad. Nauk SSSR **108**, 16—19 (1956) [Russisch].

Der Verf. gibt zwölf interessante Sätze über die Lösung der ersten Randwert-aufgabe und Annahme der Randwerte für die am Rande ausartende Gleichung:

$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sigma \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0$ . Unter gewissen Voraussetzungen konvergiert die Minimalfolge  $(u_m)_1^\infty: K[u_m; \sigma] \xrightarrow{m \rightarrow \infty} k_\sigma$  gegen die Lösung der entsprechenden Variationsaufgabe, wobei durch die Abgrenzung der zu der Konkurrenz zugelassenen Funktionen die Lösung eindeutig ist. Dabei ist

$$K[u; \sigma] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_n} \sigma(x) \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx;$$

von  $\sigma$  wird vorausgesetzt, daß in gewisser Umgebung des Randes  $\partial\Omega_n$  zwei solche Konstante  $c_1, c_2 > 0$  existieren, daß  $c_1 r^\alpha(x) \leq \sigma(x) \leq c_2 r^\alpha(x)$ ,  $\alpha \geq 0$ ; wobei  $r(x)$  die normale Entfernung des Punktes  $x$  von  $\partial\Omega_n$  bedeutet. Als  $\Omega_n$  werden sowohl endliche als auch unendliche Gebiete (z. B.: Halbräume und unendliche Streifen) zugelassen. K. Maurin.



**Bass, Jean:** Sur les solutions des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible en écoulement non permanent. C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 229—230 (1956).

Eine zähe unzusammendrückbare Flüssigkeit, die ein von der festen Oberfläche  $S$  begrenztes beschränktes konvexes Gebiet  $D$  erfüllt, sei Kräften unterworfen, die von einem Potential herrühren. Es gelten dann die Gleichungen: (1)  $\partial u_i / \partial t + u_k \partial u_i / \partial x_k + \partial p / \partial x_i = \mu \Delta u_i$ ,  $\Delta p = -(\partial u_i / \partial x_k)(\partial u_k / \partial x_i)$ . Die Bewegung sei nicht permanent. Verf. untersucht die Existenz der Lösungen  $u_i$ ,  $p$  von (1) unter den Bedingungen (C):  $u_i(x, 0)$  sei in  $D$ ,  $u_i(\xi, t)$  und  $p(\xi, t)$  seien für  $\xi \in S$  und  $t \geq 0$  gegeben, indem er dem System (1) das erweiterte System (2)  $\partial u_i / \partial t + \lambda(u_k \partial u_i / \partial x_k + \partial p / \partial x_i) = \mu \Delta u_i$ ,  $\Delta p = -(\partial u_i / \partial x_k)(\partial u_k / \partial x_i)$  zuordnet und die Lösungen von (2) als

Potenzreihen in  $\lambda$  ansetzt:  $u_i = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^v u_i^v$ ,  $p = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^v p^v$ ;  $u_i^n$ ,  $p^n$  ( $n \geq 1$ ) verschwinden in  $D$  für  $t = 0$  und auf  $S$  für  $t \geq 0$ .  $u_i^0$  ist die Lösung der Wärmeleitungsgleichung, die in  $D$  für  $t = 0$  und auf  $S$  für  $t = 0$  gegeben ist. — 1. Besitzen die gemäß (C) gegebenen Größen eine gemeinsame obere Schranke  $M$ , so besitzen  $|u_i^0|$ ,  $|p^0|$ ,  $|\partial p^0 / \partial x_i|$  die Schranke  $KM$ , wobei  $K$  nur von  $D$  abhängt. — 2. Die Ergebnisse lassen sich auf  $\partial u_i^0 / \partial x_k$  anwenden, wenn  $u_i(x, 0)$  in  $D$  eine Lipschitzbedingung erfüllt. Sie lassen sich auf  $\partial^2 u_i^0 / \partial x_k^2$  und  $\partial u_i^0 / \partial t$  anwenden, wenn die  $u_i(x, 0)$  beschränkte zweite Ableitungen besitzen. — 3. Der Konvergenzradius von (3) wird sicher  $> 1$ , wenn die Anfangsgeschwindigkeit in  $D$ , die Geschwindigkeit auf  $S$  für  $t = 0$  und der Druck auf  $S$  für  $t = 0$  hinreichend klein bleiben. V. Garten.

**Wolska, J.:** Sur une solution de l'équation du mouvement permanent du fluide visqueux. Ann. Polon. math. **3**, 13—18 (1956).

Die Stromfunktion  $\psi(x, y)$  der ebenen stationären Strömung einer viskosen Flüssigkeit genügt bekanntlich der partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung von elliptischem Typ

(1)  $(\partial \psi / \partial y) \cdot (\partial \Delta \psi / \partial x) - (\partial \psi / \partial x) \cdot (\partial \Delta \psi / \partial y) = \nu \Delta \Delta \psi$   
( $\nu$  kinematische Zähigkeit). Mit  $z = x + i y$ ,  $\bar{z} = x - i y$  geht ein in  $x, y$  analytisches  $\psi(x, y)$  über in  $\varphi(z, \bar{z}) = \psi[(z + \bar{z})/2, (z - \bar{z})/2i]$  und (1) in

$$\frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} \left\{ \varphi(z, \bar{z}) - \frac{i}{4\nu} \int_{z_0}^{\bar{z}} (z - t) \left[ \frac{\partial \varphi(t, \bar{z})}{\partial t} \right]^2 dt + \frac{i}{4\nu} \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} (\bar{z} - \tau) \left[ \frac{\partial \varphi(z, \tau)}{\partial \tau} \right]^2 d\tau \right\} = 0$$

wo  $z_0$  und  $\bar{z}_0$  feste Punkte der komplexen Ebene sind. Damit ergibt sich  $\varphi(z, \bar{z})$  als Lösung der nichtlinearen Integralgleichung

$$(2) \quad \varphi(z, \bar{z}) - \frac{i}{4\nu} \int_{z_0}^{\bar{z}} (z - t) \left[ \frac{\partial \varphi(t, \bar{z})}{\partial t} \right]^2 dt + \frac{i}{4\nu} \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} (\bar{z} - \tau) \left[ \frac{\partial \varphi(z, \tau)}{\partial \tau} \right]^2 d\tau = \\ = z \Phi_1(\bar{z}) + \bar{z} \Phi_2(z) + \Phi_3(\bar{z}) + \Phi_4(z),$$

wo die  $\Phi_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) willkürliche, in einer Umgebung von  $z_0, \bar{z}_0$  holomorphe Funktionen ihrer Argumente sind. Die Lösung von (2) und der Beweis ihrer Eindeutigkeit wird durch die Methode der sukzessiven Approximation erbracht. Strömungsphysikalische Anwendungen werden nicht gegeben. H. Behrbohm.

**Maurin, K.:** Über gemischte Rand- und Anfangswertprobleme im Großen für gewisse Systeme von Differentialgleichungen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. (Eine Begründung der Fourierschen Methode.) Studia math. **5**, 314—327 (1956).

Étude de problèmes mixtes pour les opérateurs  $A_x + D_t^2$ ,  $A_x$  étant un opérateur différentiel (ou un système) uniformément elliptique dans un ouvert de  $R^n$ , à coefficients dépendants de  $x$  mais indépendants de  $t$ . Étude de la régularité des solutions. Même chose pour les opérateurs de Schrödinger. Les méthodes sont les mêmes que dans Yosida, ce Zbl. **48**, 334: on définit un prolongement auto-adjoint de  $A$  et on utilise la décomposition spectrale de cet opérateur. J. L. Lions.

Avakumović, Vojislav G.: Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. *Math. Z.* **65**, 327—344 (1956).

Verf. gibt eine Verschärfung der Resultate von Minakshisundaram und Pleijel (vgl. dies. Zbl. **41**, 427) über die Asymptotik der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Laplace-Operators auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit. Es werden folgende drei Sätze bewiesen: Es sei  $\{(\varphi_k, \lambda_k)\}_0^\infty$  das vollständige orthonormierte System der Eigenfunktionen des Laplaceschen Operators  $(\Delta + \lambda_k) \varphi_k = 0$  auf der kompakten 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $R_3$ , dann gilt:

$$1. \quad \theta(x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_k \leq \lambda} \varphi_k(x) = \frac{1}{6\pi^2} \lambda^{3/2} + O(\lambda). \quad 2. \quad \sum_{\lambda_k \leq \lambda} 1 = \frac{|R_3|}{6\pi^2} \lambda^{3/2} + O(\lambda),$$

$|R_3| = 1/\varphi_0^2(x)$  ist der Rauminhalt der Mannigfaltigkeit  $R_3$ . 3. Am Beispiel der 3-dimensionalen Kugelfläche wird gezeigt, daß die in 1. und 2. gewonnenen Ergebnisse bestmöglich sind. [Bem. des Ref.: Die bisher allgemeinsten Resultate über die asymptotischen Eigenschaften der Spektralfunktion einer beliebigen selbstadjungierten halbbeschränkten Fortsetzung eines elliptischen Operators (beliebiger Ordnung!) wurden in einer grundlegenden Abhandlung von L. Gårding (vgl. dies. Zbl. **58**, 88) erzielt. Die Gårdingschen Ergebnisse gelten für beliebige Spektra.] *K. Maurin.*

Éjdus (Eidus), D. M.: Some inequalities for characteristic functions. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **107**, 796—798 (1956) [Russisch].

Let  $\{u_n\}_1^\infty$  be the normalized eigenfunctions and  $(\lambda_n)_1^\infty$  the corresponding eigenvalues of the equation  $\Delta u + \lambda u = 0$  with Dirichlet boundary conditions in a bounded region in real  $m$ -space with a smooth boundary. It is shown that  $|D^k u_n(x)| \leq c_k \lambda_n^{(m-1)/4} (\log \lambda_n)$ , ( $D^k$  a derivative of order  $k$ ,  $c_k$  a constant independent of  $x$ ,  $\lambda_n > 1$ ). This improves inequalities by Smolickij (this Zbl. **41**, 220) and Ladyženskaja (this Zbl. **41**, 218). *L. Gårding.*

Pólya, Georges: Sur les fréquences propres des membranes vibrantes. *C. r. Acad. Sci., Paris* **242**, 708—709 (1956).

In einem beschränkten, ebenen Gebiet  $D$  mit Flächeninhalt  $A$  und Rand  $C$  werden die zwei Eigenwertprobleme

$$(*) \quad \Delta u + \lambda u = 0, \quad u = 0 \text{ auf } C, \\ (**) \quad \Delta u + \mu u = 0, \quad \partial u / \partial n = 0 \text{ auf } C$$

betrachtet. Die Eigenwerte seien  $\lambda_k$  bzw.  $\mu_k$ . Die Weyl-Courantsche Formel gestattet bekanntlich,  $\lambda_k$  bzw.  $\mu_k$  für großes  $k$  asymptotisch zu berechnen. Verf. setzt zusätzlich voraus, daß  $D$  so beschaffen ist, daß die gesamte Ebene mit zu  $D$  kongruenten Gebieten lückenlos und ohne Überschneidungen überdeckt werden kann (Pflaster-eigenschaft). Dann gelten für jedes  $k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  die Ungleichungen  $A \lambda_k \geq 4\pi k$ ,  $A \mu_k \leq 4\pi(k-1)$ , wobei die letzte Ungleichung nur für den Fall, daß  $D$  ein Trapez ist, bewiesen wird. *G. Hellwig.*

Pleijel, Åke: Remarks on Courant's nodal line theorem. *Commun. pure appl. Math.* **9**, 543—550 (1956).

The main point of the present paper is the observation that R. Courant's nodal line theorem (Methoden der mathematischen Physik, Vol. I, 392) can be sharpened by means of a theorem due to G. Faber (*S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* **1923**, 169—172) and E. Krahn [*Math. Ann.* **94**, 97—100 (1924)]. It is proved that for certain membrane problems, in particular for all membranes with fixed boundaries, the maximal division by nodal lines occurs only for a finite number of eigenfunctions. This obviously gives a stronger emphasis to the difference between string problems and similar problems in two or more dimensions. *R. Gran Olsson.*

Heins, Albert E.: The scope and limitations of the method of Wiener and Hopf. *Commun. pure appl. Math.* **9**, 447—466 (1956).

Der Verf. behandelt eine Klasse von Randwertaufgaben für die Gleichung  $\partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2 + k \varphi = 0$  in unendlichen Gebieten durch Zurückführung auf eine Wiener-Hopfsche Gleichung  $\lambda f(x) + \int_0^\infty f(y) K(x-y) dy = g(x)$ . Die Methode wird an wichtigen Beispielen aus der Theorie der Wasserwellen, der Diffraktionsprobleme in der Akustik und Elektromagnetik erläutert. Die Hauptmittel sind: 1. Kenntnis der entsprechenden Greenschen Funktion, 2. Fourier-Transformationen, 3. analytische Fortsetzung.

K. Maurin.

**Pini, Bruno:** Una generalizzazione del problema biarmonico fondamentale. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 25, 196—213 (1956).

Sei  $D$  ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet der  $(x, y)$ -Ebene, berandet von einer stetig gekrümmten Kurve  $C(x = \bar{x}(s), y = \bar{y}(s); 0 \leq s \leq l, s = \text{Bogenlänge})$ . Es bezeichne  $C_t$  die innere Parallelkurve von  $C$  im Abstand  $t(x = \bar{x}(s) - t\bar{y}'(s), y = \bar{y}(s) + t\bar{x}'(s))$ . Ferner seien drei summierbare Funktionen  $f(s), f_1(s)$  und  $f_2(s)$  vorgegeben ( $0 \leq s \leq l$ ). Problem: Gesucht eine Funktion  $u(x, y)$  mit folgenden Eigenschaften: (1)  $u$  ist definiert und biharmonisch in  $D$ ; (2) es ist  $\lim_{t \rightarrow +0} \int_{C_t} \left( |u - f| + \left| \frac{\partial u}{\partial s_t} - f_1 \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial t} - f_2 \right| \right) ds_t = 0$ , wobei  $s_t$  die Bogenlänge auf  $C_t$  bezeichnet. Verf. beweist die Existenz einer eindeutigen Lösung für den Fall, daß  $f$  und  $f_1$  eine gewisse (notwendige) Verträglichkeitsbedingung erfüllen.

A. Huber.

**Epstein, Bernard and Anne Scheerer:** The existence of a generalized Green's function in the plane. J. Analyse math. 4, 222—235 (1956).

Die Konstruktion von Kac (dies. Zbl. 48, 340) der Greenschen Funktion eines Gebietes im  $R_3$  mit Hilfe von wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen wird hier entsprechend modifiziert auf Gebiete der Ebene übertragen. H. Hornich.

**Bergman, Stefan:** Multivalued harmonic functions in three variables. Commun. pure appl. Math. 9, 327—338 (1956).

Für Lösungen  $H(x, Z, Z^*) \equiv \tilde{H}(x, y, z)$ ,  $Z = \frac{1}{2}(iy + z)$ ,  $Z^* = \frac{1}{2}(iy - z)$  von (1)  $\Delta \tilde{H} = H_{xx} - H_{ZZ^*} = 0$  gilt die modifizierte Whittaker-Darstellung  $H = B_3(f) = (2\pi i)^{-1} \int_L f(u, \zeta) \zeta^{-1} d\zeta$  mit

$$f(u, \zeta) = 2 \int_0^1 \sqrt{u} \frac{d}{du} [\sqrt{u} \times (u \zeta^{-1} T^2, u \zeta [1 - T^2])] dT,$$

wobei  $u = x + Z\zeta + Z^*\zeta^{-1}$ ,  $X(\tau, \tau^*) = 2\sqrt{\tau\tau^*} X_1(\tau, \tau^*) + X_2(\tau, \tau^*)$  ist und  $X_1, X_2$  analytische Funktionen der komplexen Variablen  $\tau, \tau^*$  sind. Ist  $L$  speziell der Einheitskreis  $|\zeta| = 1$ , so gilt für jede im Nullpunkt reguläre Lösung von (1) die Beziehung  $X(Z, Z^*) = H(2\sqrt{ZZ^*}, Z, Z^*)$ . Hieraus folgt: Jede rationale Lösung von (1) besitzt eine algebro-logarithmische „Zugeordnete“  $f(u, \zeta)$ . — Die Weierstraßsche Theorie der algebraischen Funktionen läßt sich zur Charakterisierung von Lösungen von (1) heranziehen, deren Zugeordnete algebraische Funktionen sind. Auf diese Weise erhält man Aufschluß über die Verteilung der Singularitäten mehrwertiger Lösungen von (1). Für Lösungen von  $\Delta \Phi + C(r^2) \Phi = 0$  existieren ähnliche Integraldarstellungen; hierbei ist  $C(r^2)$  eine ganze Funktion von  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

E. Kreyszig.

**Shapiro, Victor L.:** Generalized  $L_2$ -laplacians. Proc. Amer. math. Soc. 7, 630—635 (1956).

Let  $D_n(x_0, r)$  denote the sphere  $|x - x_0| < r$  in  $E^n$ , let  $A(F, x_0, r)$  be the average of  $F(x)$  over  $D_n(x_0, r)$ , and let  $V(F, x_0, r) = A(F, x_0, r) - F(x_0)$ . Then  $F(x)$  is said to have  $f(x)$  as a generalized  $L_2$ -Laplacian if and only if

$$\lim_{r=0} \|(2(n+2)V(F, x, r)/r^2 - f(x))\|_{L_2} = 0.$$



Further,  $F(x)$  is said to be a local  $L_2$ -potential of  $f(x)$  if for every  $r > 0$  there is a function  $h_r(x)$ , harmonic in  $D_n(0, r)$ , such that

$$F(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{D_n(0, r)} \Phi_n(x-y) f(y) dy + h_r(x)$$

for almost all  $x$  in  $D_n(0, r)$ , where  $\Phi_n(x) = |x|^{-(n-2)} (n-2)^{-1}$  if  $n \geq 3$ ,  $\Phi_2(x) = \log(1/|x|)$ ,  $\omega_n$  is the  $(n-1)$ -dimensional volume of the surface of the unit sphere, and where  $f(x)$  is in  $L_2$  on  $E^n$ . Then the author's main result is the following one. Theorem: A necessary and sufficient condition that  $F(x)$  in  $L_2$  on  $E^n$  has  $f(x)$  as a generalized  $L_2$ -Laplacien is that  $F(x)$  be a local  $L_2$ -potential of  $f(x)$ . The author's proof depends upon the following Lemma: Let  $F(x)$  and  $f(x)$  be in  $L_2$  on  $E^n$  and suppose that  $G(u)$  and  $g(u)$  are their respective Fourier transforms. Then if for almost all  $u$ ,  $g(u) = -u^2 G(u)$ ,  $F(x)$  is a local  $L_2$ -potential of  $f(x)$ . *M. O. Rade.*

**Shapiro, Victor L.: The symmetric derivative on the  $(k-1)$ -dimensional hypersphere.** Trans. Amer. math. Soc. **81**, 514–524 (1956).

Sia  $k \geq 3$  e si ponga  $\lambda = \frac{1}{2}(k-2)$ . Siano  $P_n^\lambda$  i polinomi ultrasferici di Gegenbauer definiti dall'equazione  $(1-2r \cos \theta + r^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n^\lambda(\cos \theta)$  e  $Y_n(x)$  la successione delle superficie armoniche definite dall'equazione  $Y_n(x) = \frac{\Gamma(\lambda)(n+\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int_{\Omega} P_n^\lambda(\cos \gamma) d\mu(y)$ , in cui  $\gamma$  è l'angolo per cui  $\cos \gamma = \sum_{i=1}^k x_i y_i$ , dove  $x = (x_1, \dots, x_k)$  e  $y = (y_1, \dots, y_k)$  sono due punti dello spazio  $S$  reale euclideo  $k$ -dimensionale e  $\mu(x)$  è una funzione di insieme completamente additiva definita in tutti gli insiemi di Borel dell'ipersfera  $\Omega$  unità  $(k-1)$ -dimensionale di  $S$  e a variazione limitata. Sia  $S(x, d\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x)$  e indichi  $D(x, h)$  la calotta sferica su  $\Omega$  che si ottiene intersecando  $\Omega$  con la sfera di raggio 2 sen  $(\frac{1}{2}h)$  e centro  $x$  e  $|D(x, h)|$  ne sia il suo volume  $(k-1)$ -dimensionale. Il limite,  $\mu_s(x)$ , se esiste, di  $|D(x, h)|^{-1} \cdot \mu[D(x, h)]$ , quando  $h \rightarrow 0$ , si definisce derivata simmetrica di  $\mu$  in  $x$ . Infine,  $|\mu|(E)$  rappresenti la variazione totale di  $\mu$  su  $E$ . L'A. dimostra:  $i_1$ ) Se  $\mu_s(x_0)$  esiste finito, allora  $S(x_0, d\mu)$  è sommabile  $(C, \eta)$ ,  $\eta > \max(\frac{3}{2}, k-2)$ , a  $\mu_s(x_0)$ ;  $i_2$ ) se è  $|\mu|[D(x'_0, \varepsilon)] = 0$  per un certo  $\varepsilon > 0$ , in cui  $x'_0$  è il punto diametralmente opposto a  $x_0$ , allora  $S(x_0, d\mu)$  è sommabile  $(C, \delta)$ ,  $\delta > \lambda + 1$ , a  $\mu_s(x_0)$ ;  $i_3$ ) la conclusione di  $i_1$ ) è falsa se  $\eta = k-2$ ;  $i_4$ ) la condizione  $|\mu|[D(x'_0, \varepsilon)] = 0$  in  $i_2$ ) può essere sostituita dalla condizione che in  $D(x'_0, \varepsilon)$ ,  $\mu$  sia assolutamente continua, con  $\mu(E) = \int_E f(x) d\Omega(y)$  e che  $\int_{D(x'_0, \varepsilon)} [1 - \cos \gamma]^{-\lambda/2} d\Omega(y) < \infty$ , dove è  $\cos \gamma = \sum_{i=1}^k x'_0 y_i$ ;  $i_5$ ) sia  $\mu(E) = \int_E f(y) d\Omega(y)$  e  $Y_n(x_0) = O(n^{-1})$ ; allora, la condizione necessaria e sufficiente perchè sia  $S(x_0, d\mu) = \beta$  (reale) è che  $\mu_s(x_0) = \beta$ . — Il risultato  $i_1$ ) costituisce una generalizzazione di un noto teorema per le serie di Fourier-Stieltjes che è stato provato da Koschmieder (questo Zbl. **7**, 59) per  $\mu$  assolutamente continua rispetto a  $\Omega$  dove è continua  $d\mu/d\Omega$ . Inoltre  $i_4$ ) costituisce una generalizzazione di un risultato di Chen [Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ. **17**, 1073–1089 (1928)] a sua volta generalizzato da Koschmieder (v. sopra) e che ora viene ancora generalizzato da  $i_4$ ).

*L. Giuliano.*

### Integralgleichungen. Integraltransformationen:

**Fridman, V. M.: Die Methode der sukzessiven Approximationen für eine Fredholm'sche Integralgleichung erster Art.** Uspechi mat. Nauk **11**, Nr. 1 (67), 233–234 (1956) [Russisch].

L'A. démontre le théorème suivant: Soit  $K(x, s)$  un noyau de carré sommable et soit l'équation  $(1) \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$ ,  $f(x) \in L_2(a, b)$ . La suite  $\{\varphi_n(x)\}$

définie par la formule de récurrence (2)  $\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) + \lambda[f(x) - f_{n-1}(x)]$ ,  $\varphi_0 \in L_2(a, b)$ , (3)  $f_{n-1}(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi_{n-1}(s) ds$ , (4)  $0 < \lambda < 2\lambda_1$ , où  $\lambda_1$ , est la plus petite valeur propre du noyau  $K(x, s)$ , converge en moyenne quadratique vers la solution  $\varphi(x)$  de (1).

*S. Vasilache.*

**Latta, G. E.:** The solution of a class of integral equations. J. rat. Mech. Analysis 5, 821—834 (1956).

The aim of this paper is to develop a method for obtaining the solution of a certain class of integral equations. This method depends on showing that the required solution satisfies an ordinary differential equation, and setting up the suitable boundary value problem for the solution of the differential equation. The author makes use of some known examples to show that if  $\Gamma f = r(x)$ ,  $\Gamma f \equiv \int_a^b K(x-t)f(t) dt$  where  $K(u)$  satisfies  $u L K(u) + M K(u) = 0$ , ( $L, M$  are ordinary differential operators with constant coefficients), then  $\Gamma x f = - \int_a^b (x-t) K(x-t) f dt + x \Gamma f$  and  $L(\Gamma x f) = M \Gamma f + x L(\Gamma f)$ . If uniqueness exists, then, the solution of  $\Gamma f = r(x)$  for elementary  $r(x)$ , can be expressed in terms of  $\Gamma g = S_i(x)$ , where  $L(S_i(x)) = 0$ . The author announces a paper concerning higher dimensional cases.

*T. Eweida.*

**Lévy, Paul:** Intégration d'une équation intégrale non linéaire. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 1252—1255 (1956).

Behandelt wird die Integralgleichung

$$\Gamma(t_1, t_2) = \int_0^t F(t_1, u) F(t_2, u) du \quad [t = \min(t_1, t_2) \geq 0]$$

für die unbekannte Funktion  $F(t, u)$ , wo  $\Gamma$  gewissen Bedingungen genügen muß. Verf. kam auf diese Gleichung, die auf eine Fredholmsche und eine Volterrasche lineare Integralgleichung zurückgeführt wird, im Zusammenhang mit seiner Theorie linearer Gaußscher Prozesse. Eine ausführliche Darstellung erfolgt in [Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. 73, 121—156 (1956)].

*D. Morgenstern.*

**Gel'fond, A. O.:** Über die Abschätzungen gewisser Determinanten und die Anwendung dieser Abschätzungen auf die Verteilung der Eigenwerte. Mat. Sbornik, n. Ser. 39(81), 3—22 (1956). [Russisch].

Nach Ergebnissen von A. O. Gel'fond, Hille und Tamarkin ist die Fredholmsche Determinante  $D(\lambda)$  zur Integralgleichung  $f(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$  von der Ordnung von  $\exp(\theta \lg |\lambda|)$ , wenn  $K(x, y)$  analytisch in  $y$  auf der abgeschlossenen Strecke  $[0, 1]$  ist. Dies bleibt nicht mehr richtig, wie der Verf. zeigt, wenn auf die Analytizität in den Endpunkten verzichtet wird, da für  $K(x, y) = (1-x)^m(1-y)^m/(1-xy)$  die Relation gilt:  $D(-r) > \exp(\pi^{-1} m^{-1} \lg^3 r)$  ( $r > r_0(m)$ ) (Satz 6). Unter gewissen speziellen Voraussetzungen liefert aber  $\exp(\theta \lg^3 |\lambda|)$  eine Abschätzung für  $|D(\lambda)|$ , wie der Verf. in seinem Satz 9 beweist. Er setzt dabei im wesentlichen voraus, daß  $K(x, y) = O((xy(1-x)(1-y))^{\delta-1/2})$  ist für ein  $\delta, 0 < \delta \leq \frac{1}{2}$  und  $0 < x < 1, 0 < y < 1$ , sowie daß  $K(x, y)$  analytisch in  $y$  in einem gewissen möndchenförmigen Bereich ist. Der Beweis dieser Sätze beruht auf verschiedenen sehr subtilen Abschätzungen der verallgemeinerten Vandermondeschen

Determinanten  $A_{n+1} \begin{pmatrix} x_0, \dots, x_n \\ \alpha_0, \dots, \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_0^{\alpha_0} \dots x_0^{\alpha_n} \\ \dots \dots \dots \\ x_n^{\alpha_0} \dots x_n^{\alpha_n} \end{vmatrix}$  sowie der Integrale über solche.

Zur Charakterisierung dieser Resultate sei der Satz 5 des Verf. angegeben: Für ein

natürliches  $m$  sei allgemein  $\alpha_k = e^{\pi\sqrt{k}} + \varphi(k)$ , wo  $\varphi(k) \geq 0$ ,  $\varphi(k) = o(k^{-4} e^{\pi\sqrt{k}})$  und  $\alpha_k - \alpha_{k-1} \geq m + 1$  ist. Dann gilt für ein konstantes  $\gamma$

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{s=0}^n (1 - x_s)^{2m} \Delta_{n+1}^2 \left( \begin{smallmatrix} x_0, \dots, x_n \\ \alpha_0, \dots, \alpha_n \end{smallmatrix} \right) dx_0 \cdots dx_n \\ > \exp \left( -\frac{2}{3} (3m + 2) \pi n^{3/2} - \gamma n \lg n \right). \quad A. Ostrowski.$$

● Krasnosel'skij, M. A.: *Topologische Methoden in der Theorie der nicht-linearen Integralgleichungen.* (Moderne Probleme der Mathematik.) Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 392 S. R. 11,35 [Russisch].

L'A. rassemble dans ce livre la plupart des recherches d'analyse non-linéaire dans les espaces de Banach, recherches liées surtout à la méthode de Leray-Schauder. Le livre contient six chapitres. Dans le premier chapitre on étudie les opérateurs intégraux auxquels on applique les méthodes abstraites dans les chapitres suivants. Le deuxième chapitre contient les notions et les théorèmes fondamentaux: la rotation des champs vectoriels (notion due à l'A., équivalente au degré topologique de Leray-Schauder), les théorèmes de Brouwer, Hopf, Leray-Schauder, Lusternik-Schnirelman-Borsuk. — Les notions et les théorèmes de topologie combinatoire utilisées dans cette théorie ne sont que partiellement édifiées. Ensuite (chapitres III et IV) on applique ces méthodes aux problèmes plus concrets: l'existence des solutions et des valeurs propres, points de ramification, analyse spectrale non-linéaire (l'A. définit une résolvante pour les opérateurs non-linéaires), opérateurs asymptotiquement linéaires, théorèmes de Liapounoff. Dans le chapitre V on examine les méthodes de M. G. Krein et M. A. Rutman dans les espaces de Banach ordonnés et le chapitre VI contient les méthodes variationnelles, développées surtout par M. M. Vainberg.

G. Marinescu.

Schmeidler, Werner: *Über symmetrische algebraische Integralgleichungen.* Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. 220, 18 S. (1956).

L'A. studia gli autovalori  $\mu$  e le autosoluzioni reali  $y(x)$  delle equazioni integrali del tipo

$$(1) \quad \mu^n y^n(s) - \sum_{\beta=0}^{n-1} \mu^\beta y^\beta(s) \mathfrak{K}_\beta(y) = 0 \quad \text{ove}$$

$$\mathfrak{K}_\beta(y) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_\nu = n - \beta} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_{\beta\alpha_1 \dots \alpha_\nu}(s, t_1, \dots, t_\nu) y^{\alpha_1}(t_1) \cdots y^{\alpha_\nu}(t_\nu) dt_1 \cdots dt_\nu$$

e cerca di collegare tale ricerca alla soluzione del seguente problema variazionale: determinare la massima radice reale dell'equazione algebrica, nella incognita  $z$

$$(2) \quad z^n - \sum_{\beta=0}^{n-1} a_\beta[y] z^\beta = 0 \quad \text{ove } a_\beta[y] \text{ è il funzionale seguente:}$$

$$\sum_{\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_\nu = n+1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_\nu, \beta}(s, t_1, \dots, t_\nu) y^{\alpha-1}(s) y^{\alpha_1}(t_1) \cdots y^{\alpha_\nu}(t_\nu) ds dt_1 \cdots dt_\nu$$

ed  $n$  è un numero naturale dispari. Dimostra che le equazioni del tipo (1), che possono collegarsi a tale problema variazionale, sono del tipo

$$(3) \quad \mu^n y^n(s) = \sum_{\beta=0}^{n-1} \mu^\beta y^\beta(s) \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_\beta(s, t_1, \dots, t_\nu) y^{\beta+1}(t_1) \cdots y^{\beta+1}(t_\nu) dt_1 \cdots dt_\nu$$

essendo  $(\beta + 1)(\nu + 1) = n + 1$ , ed essendo i nuclei  $K_\beta$  simmetrici rispetto a tutte le variabili. L'A. dà quindi un teorema di esistenza per gli autovalori e le autosoluzioni dell'equazione (3) ed un teorema di numerabilità per tali autovalori. Sarebbero, in qualche punto, desiderabili maggiori chiarimenti. E. De Giorgi.

Mikusiński, J.: *Sur quelques équations intégral-différentielles.* Studia math. 15, 182—187 (1956).

L'A., in prosecuzione di una sua ricerca fatta in collaborazione con altri Autori



(questo Zbl. 45, 54), dimostra il seguente teorema: Siano  $p(t)$ ,  $q(t)$  sommabili nell'intervallo  $[0, T]$  e nel rettangolo  $R$  del piano  $\lambda, t$ ,  $R: 0 \leq \lambda \leq A, 0 \leq t \leq T$ , sia definita una funzione  $x(\lambda, t)$  continua insieme alla sua derivata  $x_\lambda(\lambda, t)$ , e risulti  $x(0, t) = 0$ . Allora I. Se  $x(\lambda, t)$  soddisfa in  $R$  l'equazione

$$x_\lambda(\lambda, t) = \int_0^t q(t - \tau) x(\lambda, \tau) d\tau$$

si ha  $x(\lambda, t) \equiv 0$  in  $R$ ; II. Se  $p(t) \leq 0$  e se  $x(\lambda, t)$  soddisfa in  $R$  l'equazione

$$(1) \quad \int_0^t p(t - \tau) x_\lambda(\lambda, \tau) d\tau = x(\lambda, \tau)$$

si ha  $x(\lambda, t) \equiv 0$  in  $R$ ; III. Se  $p(t) \geq 0$ ,  $\int_0^t p(\tau) d\tau \geq K t^\alpha$ , ( $K > 0, 0 < \alpha < 1$ ), e se  $x(\lambda, t)$  soddisfa in  $R$  l'equazione

$$(2) \quad \int_0^t p(t - \tau) x_\lambda(\lambda, \tau) d\tau = \int_0^t q(t - \tau) x(\lambda, \tau) d\tau,$$

oppure l'equazione (1), si ha  $x(\lambda, t) \equiv 0$  in  $R$ ; IV. Se le funzioni  $p(t)$ ,  $q(t)$  sono assolutamente continue in  $[0, T]$ ,  $p(0) \neq 0$ , e se  $x(\lambda, t)$  soddisfa in  $R$  l'equazione (2), si ha  $x(\lambda, t) \equiv 0$  in  $R$ . R. Sansone.

**Elliot, Joanne:** On an integro-differential operator of the Cauchy type. Proc. Amer. math. Soc. 7, 616—626 (1956).

Die mit dem Cauchyschen Prozeß im nahen Zusammenhang stehende Integro-differentialgleichung  $u_t = \frac{1}{\pi} \text{HW} \int_{-a}^{+a} \frac{u_\xi}{\xi - x} d\xi$  mit Anfangsbedingungen für  $t = 0$  und Randbedingungen bei  $x = \pm a$ , wird durch die Laplace-Transformation auf die Gleichung  $\lambda F(x) - \frac{1}{\pi} \text{HW} \int_{-a}^{+a} \frac{F'(\xi) d\xi}{\xi - x} = f(x)$  zurückgeführt. Die für stetige  $f$  früher (s. dies. Zbl. 58, 106) gegebene Auflösungstheorie dieser Gleichung bzw. der darin vorkommenden Integraltransformation wird für solche  $f$  mit  $f(x) (a^2 - x^2) \in C$  und die Funktionen mit  $f(x) (a^2 - x^2)^{1/4} \in L_2$  erweitert. D. Morgenstern.

● **Doetsch, Gustav:** Handbuch der Laplace-Transformation. Band III. Anwendungen der Laplace-Transformation. 2. Abteilung. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe. Band 19.) Basel und Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1956. 300 S.

(Band II, dies. Zbl. 65, 340.) Dieser Band III enthält die Anwendungen der Laplace-Transformation, 2. Abteilung und gliedert sich in die folgenden Kapitel: IV. Teil: Partielle Differentialgleichungen. Allgemeines über partielle Differentialgleichungen und ihre Integration mittels Laplace-Transformation; Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten; Partielle Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten; Eindeigkeitssätze und Kompatibilitätsbedingungen für die Rand- und Anfangswerte; Huygenssches und Eulersches Prinzip. V. Teil: Differenzengleichungen. Gewöhnliche Differenzengleichungen im Originalraum; Gewöhnliche Differenzengleichungen im Bildraum; Partielle Differenzengleichungen. VI. Teil: Integralgleichungen und Integralrelationen. Integralgleichungen vom reellen Faltungstypus im endlichen Intervall; Integralgleichungen vom reellen Faltungstypus im unendlichen Intervall; Funktionalrelationen mit reellen Faltungsintegralen, insbesondere transzendente Additionstheoreme; Integralgleichungen vom komplexen Faltungstypus; Korrespondenz zwischen komplexen Faltungsintegralen von Bildfunktionen und Produkten ihrer Originalfunktionen; Verschiedene mit Laplace-Transformation lösbare Typen von Integralgleichungen. — VII. Teil: Ganze Funktionen vom

Exponentialtypus und endliche Laplace-Transformation. Die endliche Laplace-Transformation; Ganze Funktionen vom Exponentialtypus; Nachträge zu Band I; Literaturverzeichnis. — Gegenüber der Monographie des Verf. vom Jahre 1937 (Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, dies. Zbl. 18, 129) hat der Stoff stark zugenommen. Neu sind die Kap. über partielle Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten, Kompatibilitätsbedingungen für Randwertprobleme, Differenzengleichungen, Integralgleichungen im  $\infty$  Intervall, verschiedene mit der  $L$ -Transformation lösbare Integralgleichungen, ganze Funktionen vom Exponentialtypus. Der Verf. hat die Absicht, die  $L$ -Transformation und die Differentialgleichungen vom Standpunkte der Distributionstheorie aus in einem besonderen Band darzustellen. Mit diesem dreibändigen Werk dürfte sowohl dem Mathematiker als auch dem sich für die Anwendungen der  $L$ -Transformation interessierenden „Praktiker“ eine auf längere Sicht vollständige Orientierung über den Stand der  $L$ -Transformation geboten werden.

W. Saxer.

• Doetsch, Gustav: **Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation.** Mit einem Tabellenanhang von Rudolf Herschel. München: R. Oldenbourg 1956. 198 S. mit 12 Fig. Hln. DM 22,—.

Knappe und sehr zweckmäßige Zusammenstellung jener Resultate über die Laplace-Transformation ohne Beweise, die Ingenieure, Physiker etc. kennen müssen, wenn sie sie bei der Lösung jener Probleme anwenden, die in ihren Arbeitsgebieten auftreten, wie gewöhnliche Differentialgleichungen, Systeme von Differentialgleichungen, partielle Differentialgleichungen, Integralgleichungen. Im Anhang des Buches befindet sich eine für die Anwendung der  $L$ -Transformation sehr nützliche Formeln- und Korrespondenztabelle.

W. Saxer.

Doetsch, Gustav: **Stabilitätsuntersuchung von Regelungsvorgängen vermittels Laplace-Transformation.** Österreich. Ingenieur-Arch. 10, 140—148 (1956).

Zur Untersuchung der Stabilität von Regelungssystemen mit Hilfe der Laplace-Transformation geht man meist so vor, daß die Lage der Pole der Übertragungsfunktion in der komplexen  $s$ -Ebene bestimmt wird. Dieses für gebrochen rationale Übertragungsfunktionen brauchbare Verfahren kann bei der Anwendung auf Systeme mit transzendenten Übertragungsfunktionen zu falschen Ergebnissen führen. Jedemfalls kommt man nicht — wie bei einfachen Systemen — mit einer Partialbruchzerlegung der Bildfunktion  $x(s)$  und deren gliedweiser Übersetzung in den Oberbereich zum Ziel. Man muß vielmehr dazu übergehen, das asymptotische Verhalten der Lösungsfunktion  $X(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  aus den Singularitäten von  $x(s)$  in der ganzen  $s$ -Ebene zu erschließen, wobei das Verhalten für  $s \rightarrow \infty$  von entscheidender Bedeutung ist.

K. Magnus.

• Cypkin, Ja. Z. (Zypkin, J. S.): **Differenzengleichungen der Impuls- und Regeltechnik und ihre Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation.** Berlin: Verlag Technik 1956. 207 S. DM 22,—.

Das Buch befaßt sich mit der vom Verf. so genannten „diskreten Laplace-Transformation“  $D^*$ , die einer Folge  $f[n]$  durch  $F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n] =: D\{f[n]\}$  eine in einer komplexen  $q$ -Halbebene definierte Funktion  $F^*(q)$  zuordnet. Diese Potenzreihentransformation ist diskontinuierlichen Vorgängen besonders angepaßt und leistet hier dasselbe wie die klassische Laplace-Transformation bei kontinuierlichen Vorgängen. Im 1. Kap. wird der Kalkül dieser Transformation entwickelt, indem die Analoga zu den Rechenregeln der Laplace-Transformation aufgestellt werden (Abbild von Verschiebung, Dämpfung, Differenz, Summe, Faltung). Am wichtigsten ist analog zur Differentiationsregel der Laplace-Transformation die Formel  $D\{f[n+k]\} = e^k \left\{ F^*(q) - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-cn} f[n] \right\}$ , die es gestattet, mit der  $D$ -Transformation das Anfangswertproblem der Differenzengleichung  $k$ -ter

Ordnung ( $f[0], \dots, f[k-1]$  gegeben) genau so zu algebraisieren, wie es die Laplace-Transformation mit dem Anfangswertproblem der Differentialgleichung macht. Technische Beispiele aus dem Bereich der Kettenleiter, Verstärker, usw. illustrieren die Methode. Das 2. Kap. behandelt den heute in der Technik besonders wichtigen Impulsleiter, d. i. ein Vierpol, der als linear angesehen wird (daher „linearer Zweig“ genannt) und über ein Impulselement mit einer Stromquelle verbunden ist. Das Impulselement hat die Eigenschaft, die stetig veränderliche Eingangsspannung in eine Folge von Rechteckimpulsen zu verwandeln, d. h. es tastet die stetige Funktion  $f(t)$  in den Punkten  $t = 0, 1, 2, \dots$  ab und macht aus ihr eine Treppenfunktion, die in den Intervallen  $(n, n + \gamma)$  gleich  $f(n)$ , in  $(n + \gamma, n + 1)$  gleich 0 ist ( $0 < \gamma \leq 1$ ). Die Ausgangsfunktion  $u(t)$  ist allerdings eine stetige Funktion; deshalb wird sie in eine Schar von Folgen  $u(n + \varepsilon)$  aufgelöst ( $0 \leq \varepsilon < 1$ ), die von dem Parameter  $\varepsilon$  abhängen und in ihrer Gesamtheit wieder die Funktion  $u(t)$  erschöpfen. Es stellt sich heraus, daß bei Anwendung der  $D$ -Transformation die Ausgangsbildfunktion sich aus der Eingangsbildfunktion durch Multiplikation mit einem Faktor ergibt, der in Analogie zu der entsprechenden Größe bei der Laplace-Transformation Übertragungsfaktor genannt wird. Entscheidend ist nun, daß sich dieser aus der Übergangsfunktion des linearen Zweiges berechnen läßt in dem Fall, daß der Übertragungsfaktor des linearen Zweiges eine rationale Funktion ist. Ähnlich wie bei kontinuierlichen Systemen wird nun auch hier der Begriff der Übergangsfunktion und des Frequenzganges gebildet (hier Zeit- und Frequenzcharakteristik genannt), die die Antwort auf eine konstante bzw. harmonisch schwingende Erregung darstellen. Dies wird praktisch an zahlreichen Beispielen aus der modernen Technik erläutert. Im 3. Kap. wird auf Übertragungssysteme mit Impulsrückkopplung die  $D$ -Transformation angewendet, die zu derselben übersichtlichen Darstellung führt, wie die Laplace-Transformation bei stetiger Rückkopplung. Analog zum Nyquist-Kriterium wird auch hier die Stabilität an Hand der Ortskurve der Frequenzcharakteristik untersucht. Als technische Anwendung wird die selbsttätige intermittierende Temperaturregung ausführlich behandelt. Das 4. Kap. ist den Systemen mit Relaisrückkopplung gewidmet, die nichtlineare Systeme darstellen. Hier wird insbesondere die Stabilität und Selbsterregung in der Weise untersucht, daß das System am Eingang des Relaiselements geöffnet wird, wonach es als Impulsleiter betrachtet werden kann. — Das Buch, dessen Verf. eines der bedeutendsten Mitglieder des Instituts für Automatik und Telemechanik der Akademie der UdSSR ist, ist zwar auf die Mentalität des Ingenieurs zugeschnitten, vermittelt aber auch dem Mathematiker wertvolle Anregungen, da die  $D$ -Transformation, die seinerzeit für Laplace der Ausgangspunkt seiner Integrationstheorie der Differenzen- und Differentialgleichungen war, seither in der Mathematik wenig beachtet worden ist. Es sei noch ergänzend darauf hingewiesen, daß ihre Asymptotik durch die bekannte Darboux'sche Methode geliefert wird, was sich insbesondere für Stabilitätsuntersuchungen fruchtbar machen ließe.

G. Doetsch.

**Wuyts, P.: Über die Nullstellen eines Laplaceschen Integrals.** Simon Stevin 31, 37—46 (1956) [Holländisch].

Im Gegensatz zu Dirichletschen Reihen kann ein Laplace-Integral  $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$  in einem die reelle Achse enthaltenden Gebiet unendlich viele Nullstellen haben. Verf. gibt Fälle an, wo dies nicht zutrifft. Satz: In  $0 \leq t \leq a$  sei  $F'(t)$  reell. In diesem Intervall wechsele für ein gewisses ganzes  $n$  das  $n$ -fach iterierte Integral  $F_n(t) = F * 1^{*n}$  nicht das Vorzeichen und sei dort keine Nullfunktion. Dann kann man zu jedem beliebig großen  $Y > 0$  ein  $X > 0$  angeben derart, daß  $f(s) = f(x + iy)$  in dem Streifen  $x \geq X$ ,  $|y| \leq Y$  keine Nullstelle besitzt. Dies wird auf komplexwertiges  $F(t)$  verallgemeinert. Außerdem werden durch Kombi-



nation dieses Resultats mit bekannten Sätzen über die Laplace-Transformation weitere Gebiete bestimmt, in denen  $f(s)$  den Wert 0 oder einen anderen Wert nur endlich oft annehmen kann. *G. Doetsch.*

**Lukacs, Eugene:** On certain periodic characteristic functions. *Compositio math.* **13**, 76—80 (1956).

$F(x)$  sei eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (monoton,  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(+\infty) = 1$ ) und  $f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} dF(x)$  ihre charakteristische Funktion. Die Funktion  $F(x)$  heißt eine Gitterverteilung, wenn sie stückweise konstant ist und ihre Unstetigkeitspunkte eine Teilmenge einer Folge von äquidistanten Punkten bilden.  $f(z)$  heißt eine analytische charakteristische Funktion, wenn sie in einer Umgebung des Nullpunkts mit einer analytischen Funktion zusammenfällt. Satz 1: Eine eindeutige und periodische analytische charakteristische Funktion hat entweder eine reelle oder eine rein imaginäre Periode. Die Periode ist dann und nur dann reell, wenn die charakteristische Funktion zu einer Gitterverteilung gehört, die  $x = 0$  enthält. Satz 2: Eine charakteristische Funktion ist nur dann eine ganze periodische Funktion, wenn sie zu einer Gitterverteilung gehört, die  $x = 0$  enthält. *G. Doetsch.*

**Fox, Charles:** A classification of kernels which possess integral transforms. *Proc. Amer. math. Soc.* **7**, 401—412 (1956).

Bekanntlich führt die Mellin-Transformation  $F(s) = \int_0^{\infty} f(u) u^{s-1} du$  die Integralgleichung  $f(x) = \int_0^{\infty} k(ux) g(u) du$  formal in die algebraische Gleichung  $F(s) = K(s) G(1-s)$  über  $(F, K, G)$  die Mellin-Transformierten von  $f, k, g$ , die auch in der Form  $G(s) = K(s) F(1-s) / [K(s) K(1-s)]$  geschrieben werden kann. Erfüllt z. B.  $K(s)$  die Gleichung  $K(s) K(1-s) = [a + b s(1-s)]^{-1}$ , so ist  $G(s) = a K(s) F(1-s) + b s(1-s) K(s) F(1-s)$ , woraus folgt:  $g(x) = a \int_0^{\infty} k(ux) f(u) du + b \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} x k(ux) \frac{d}{du} [u f(u)] du$ . Damit hat man eine Umkehrformel für die Transformation  $f(x) = \int_0^{\infty} k(ux) g(u) du$ . An Stelle der obigen Bedingung für  $K(s)$  wird nun eine Serie von immer allgemeineren Bedingungen aufgestellt, unter denen sich die Umkehrung auf ähnlichem Weg bewerkstelligen läßt. *G. Doetsch.*

## **Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:**

**Köthe, Gottfried:** Bericht über neuere Entwicklungen in der Theorie der topologischen Vektorräume. *J. Ber. Deutsch. Math.-Verein.* **59**, 19—36 (1956).

Article d'exposition couvrant sensiblement les mêmes questions que le rapport du Réf. de 1953 (ce Zbl. **53**, 257). Il y a davantage de détails concernant l'évolution historique de la théorie, ainsi que sur quelques résultats récents de A. Grothendieck sur les espaces  $L^p$ . Il y a aussi une intéressante description de la définition d'un espace de distributions sur un intervalle compact comme limite inductive d'espaces de Banach, d'après E. König et J. Sebastião e Silva. *J. Dieudonné.*

**Harrop, R. and J. D. Weston:** An intersection property in locally convex spaces. *Proc. Amer. math. Soc.* **7**, 535—538 (1956).

Les  $EA$ . démontrent la propriété suivante: dans un espace localement convexe séparé  $E$ , soit  $B$  un ensemble borné dont l'enveloppe convexe fermée symétrique est semi-complète. Supposons que l'ensemble des parties  $x_\lambda + \varrho_\lambda B$  ( $x_\lambda \in E$ ,  $\varrho_\lambda \geq 0$ )

forme une base de filtre. Alors l'intersection de ces ensembles est de la forme  $x + \varrho B$ , où  $x = \lim x_\lambda$  et  $\varrho = \inf \varrho_\lambda = \lim \varrho_\lambda$ .  
*J. Dieudonné.*

**Pettis, B. J. : Separation theorems for convex sets.** Math. Mag. 29, 233—247 (1956).

Article d'exposition sur le théorème de Hahn-Banach, le théorème de Krein-Milman, leurs corollaires et variantes diverses. Comme application, l'A. donne une démonstration d'une extension du théorème fondamental de von Neumann sur la théorie des jeux.  
*J. Dieudonné.*

**Silverman, Robert J. : Invariant linear functions.** Trans. Amer. math. Soc. 81, 411—424 (1956).

There are proved certain theorems unifying various tendencies of generalizing the Hahn-Banach extension theorem. The principal theorem is based on the following definitions. Let: (1)  $Y$  be a linear space with a subspace  $X$ , (2)  $V$  be a semi-ordered linear space such that  $x \geq y \geq x$  implies  $x = y$ , and such that every bounded set in  $V$  has a supremum, (3)  $G$  be a semigroup of operators on  $Y$ , (4)  $p$  be a subadditive, positive homogeneous operation from  $Y$  to  $V$  such that  $p(gy) \leq p(y)$  for  $y \in Y$ ,  $g \in G$ , (5)  $f$  be a subadditive operation from  $X$  to  $V$  such that  $f(x) \leq p(x)$  and  $f(gx) = f(x)$ . The system  $[Y, X, V, G, p, f]$  is said to have the Hahn-Banach extension property (HBEP) if there exists a distributive operation  $F$  from  $Y$  to  $V$  such that  $F(x) = f(x)$  for  $x \in X$  and  $F(y) \leq p(y)$ ,  $F(gy) = F(y)$  for all  $y \in Y$ ,  $g \in G$ . An abstract semigroup  $\mathfrak{G}$  is said to have the HBEP if every system  $[Y, X, V, G, p, f]$  has the HBEP,  $G$  being a representation of  $\mathfrak{G}$  (i.e. a homomorphism or antihomomorphism of  $\mathfrak{G}$  into the space of distributive operators on a vector space — in this case on  $Y$ ). Let: (i)  $Y$  be a semiordered linear space with cone  $C = \{y: y \geq 0\}$ , (ii)  $X$  be a subspace of  $Y$  (with induced ordering) and such that  $(y + X) \cap C \neq 0$  for every  $y \in Y$ , (iii)  $G$  be a semigroup of operators on  $Y$  such that  $x \in X$ ,  $z \in C$ ,  $g \in G$  imply  $gx \in X$ ,  $gz \in C$ , (iv)  $V$  be as in (2), (v)  $f$  be a monotone distributive operation from  $X$  to  $V$  such that  $f(gx) = f(x)$  for every  $g \in G$ . The system  $[Y, X, V, f, G]$  is said to have the monotone extension property (MEP) if there exists a monotone distributive operation  $F$  from  $Y$  to  $V$  such that  $F(x) = f(x)$  for  $x \in X$  and  $F(gy) = F(y)$  for every  $y \in Y$ ,  $g \in G$ . An abstract semigroup  $\mathfrak{G}$  is said to have the MEP if every collection  $[Y, X, V, f, G]$  has the MEP,  $G$  being any representation of  $\mathfrak{G}$ . Theorem: a semigroup has the HBEP if and only if it has the MEP. For a subsemigroup  $\mathfrak{H}$  of a semigroup  $\mathfrak{G}$  the left cosets of  $\mathfrak{H}$  are defined as  $\mathfrak{H}g = \{g\} \cup \{hg: h \in \mathfrak{H}\}$ , the right cosets are  $g\mathfrak{H} = \{g\} \cup \{gh: h \in \mathfrak{H}\}$ ;  $\mathfrak{H}$  is called the commutator subsemigroup if for arbitrary  $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$  the elements  $g_1 g_2$  and  $g_2 g_1$  belong to the same left and the same right coset of  $\mathfrak{H}$ . A deal of theorems is proved. Every abstract semigroup containing a commutator subsemigroup with the MEP, has the MEP. Every abstract commutative semigroup has the MEP. Every finite group has the MEP (false for semigroups). Let  $\mathfrak{G}$  be a semigroup with a collection  $\{\mathfrak{H}_\alpha: \alpha \in A\}$  of subsemigroups such that  $\cup \{\mathfrak{H}_\alpha: \alpha \in A\} = \mathfrak{G}$  and such that  $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$  form a directed system under set inclusion; if each  $\mathfrak{H}_\alpha$  has the MEP, then  $\mathfrak{G}$  has the MEP. If  $\mathfrak{G}$  is an abstract group with a normal subgroup  $\mathfrak{H}$  such that both  $\mathfrak{H}$  and  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  have the MEP, then  $\mathfrak{G}$  has the MEP too. Every subgroup of a group with MEP has the MEP. There are also proved theorems on existence of projections and extensions of identity-operation. The paper ends with discussion of the relationship between the MEP and existence of invariant means. A mean on a semigroup  $G$  is a distributive non-negative functional  $m$  defined on  $M(G)$ , the space of all real-valued bounded functions on  $G$ , such that  $m(e) = 1$  ( $e$  = the unit element of  $M(G)$ ). The mean is called invariant if  $m(x) = m(x_g) = m({}_g x)$  for every  $x \in M(G)$ ,  $g \in G$  ( $x_g$  and  ${}_g x$  denoting the functions defined by  $x_g(h) = x(hg)$ ,  ${}_g x(h) = x(g h)$ ). It is proved that every semigroup with the HBEP has an invariant mean. *A. Alexiewicz.*

**Erdős, J.:** On the structure of ordered real vector spaces. Publ. math., Debrecen 4, 334—343 (1956).

$T$  étant un ensemble ordonné, appelons „espace discret de fonctions sur  $T$  lexicographiquement ordonné“ l'espace vectoriel ordonné des fonctions sur  $T$  qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs non nulles, avec la relation  $f < g$  équivalente à:  $f(t_0) < g(t_0)$ , pour  $t_0$  tel que  $f(t) = g(t)$  si  $t < t_0$  et  $f(t_0) \neq g(t_0)$ . L'A. démontre que tout espace  $V$  vectoriel, réel, ordonné, de dimension dénombrable est isomorphe à l'espace discret de fonctions sur  $T$  lexicographiquement ordonné, où  $T$  est une certaine base de  $V$ , convenablement ordonnée. Il en résulte que, si  $R$  est l'ensemble ordonné des nombres rationnels, un tel espace  $V$  peut toujours être immergé dans l'espace discret de fonctions sur  $R$  lexicographiquement ordonné. En outre, il existe une correspondance biunivoque (à un isomorphisme près) entre les espaces  $V$  et les types d'ordre dénombrables. Un exemple montre que ce théorème de structure (qui généralise un résultat concernant les réticulés vectoriels de dimension finie) ne subsiste plus pour des espaces vectoriels ordonnés de dimension non dénombrable. Pour un espace vectoriel ordonné de dimension quelconque, un procédé est indiqué qui permet de définir univoquement l'ensemble de ses éléments positifs. L'hypothèse que les espaces vectoriels soient réels est essentielle pour la validité de ces résultats. A. Pereira Gomes.

**Blackett, D. W.:** The near-ring of affine transformations. Proc. Amer. math. Soc. 7, 517—519 (1956).

The group of non-singular affine transformations of a vector space  $V$  over a field  $F$  (as defined e. g. in Birkhoff-MacLane, A survey of modern algebra, this Zbl. 52, 254) is embedded in the near-ring of all affine transformations of  $V$  in itself, addition of two transformations being defined as usual. The constant transformations form a unique maximal two-sided ideal whose quotient near-ring is isomorphic to the ring of all linear transformations of  $V$  in itself. An isomorphic representation of the near-ring by means of matrices is given when  $V$  is finite dimensional; it needs however the „adjunction“ of a special element to the elements of the field  $F$  of scalars.

Hanna Neumann.

**Braunschweiger, Chris C.:** A geometric construction of  $L$ -spaces. Duke math. J. 23, 271—280 (1956).

The author describes a method of constructing norms for certain vector lattices, and obtains necessary and sufficient conditions for a Banach space to have an equivalent norm which is that of an abstract  $L$ -space. He also shows, using Kakutani's representation theory, that the positive cone of an abstract  $L$ -space has no interior points. J. D. Weston.

**Ellis, H. W. and Israel Halperin:** Haar functions and the basis problem for Banach spaces. J. London math. Soc. 31, 28—39 (1956).

Les AA. montrent que la construction classique du système orthonormal de Haar sur la droite peut s'étendre à un espace mesuré quelconque  $S$ , et que les propriétés classiques de ce système orthonormal sont encore valables dans le cas général, tout au moins lorsque l'espace  $L^1$  construit sur  $S$  est séparable; ils prouvent à l'aide de ces systèmes de Haar généralisés que les espaces  $L^p$  construits sur l'espace mesuré  $S$  admettent une base, et montrent que cette propriété s'applique aussi aux espaces  $L^1$  qui généralisent les  $L^p$  et qui sont relatifs à une fonction „longueur“  $\lambda$  (espaces définis et étudiés antérieurement par les AA. ce Zbl. 52, 113; 51, 87). J. Dieudonné.

**Ganapathy Iyer, V.:** On the space of integral functions. IV. Proc. Amer. math. Soc. 7, 644—649 (1956).

(Part III voir ce Zbl. 49, 83). L'A. considère l'espace des fonctions entières muni de la topologie de la convergence compacte, ainsi qu'une distance sur cet espace qui n'a aucune signification intrinsèque, mais pour laquelle il croit devoir déterminer les transformations isométriques. Il considère sur l'espace en question la multi-



plication ordinaire et la convolution de Hadamard, qui toutes deux font de l'espace une algèbre topologique; il détermine les groupes d'automorphismes de ces deux algèbres.

*S. Dieudonné.*

**Zygmund, A.: On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations.** J. Math. pur. appl., IX. Sér. 35, 223—248 (1956).

Let  $a, b, a_1, b_1, \dots$  denote numbers in the closed interval  $1 \leq t \leq \infty$  and let the corresponding small greek letters denote their reciprocals. Let  $(R, \mu)$  and  $(S, \nu)$  be two measure spaces with measures  $\mu$  and  $\nu$  respectively. As usual, let  $L_\mu^a(R)$  denote the space of all measurable functions  $f$  for which  $\|f\|_{a, \mu} = \left( \int_R |f|^a d\mu \right)^{1/a}$

is finite so that  $\|f\|_{a, \mu}$  defines a norm on  $L_\mu^a(R)$  which makes it a Banach space.

A bounded linear transformation  $h = Tf$  of  $L_\mu^a(R)$  into  $L_\nu^b(S)$  is said to be of strong type  $(a, b)$  and the norm of  $T$  is called the (strong)  $(a, b)$  norm of  $T$ . A theorem due to Riesz as generalized by Thorin states that if  $T$  is simultaneously of types  $(1/\alpha_1, 1/\beta_1)$  and  $(1/\alpha_2, 1/\beta_2)$  and  $\alpha = (1-t)\alpha_1 + t\alpha_2$ ,  $\beta = (1-t)\beta_1 + t\beta_2$ ,  $0 \leq t \leq 1$  then  $T$  can be extended uniquely so as to be of type  $(1/\alpha, 1/\beta)$  and the logarithm of the norm of  $T$  is a convex function of  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . This result has several applications. The author shows by examples that in several interesting situations, the transformation  $T$  is of type  $(1/\alpha, 1/\beta)$  for  $0 < t < 1$  but not when  $t = 0$  or  $1$  so that the above convexity property of the norm of  $T$  cannot be used. To cover such cases, Marcinkiewicz has stated a theorem without proof in 1939 (this Zbl. 21, 16). The main object of the paper under review is to formulate and prove this theorem in a general form. The result is proved for more general transformations than linear transformations. A transformation  $h = Tf$  of  $L_\mu^a(R)$  into  $L_\nu^b(S)$  is called quasi-linear if  $\|T(f_1 + f_2)\| < k(\|Tf_1\| + \|Tf_2\|)$ , where  $k$  is a constant independent of  $f_1$  and  $f_2$ . Let for  $y > 0$ ,  $E_y(h)$  denote the subset of  $S$  where  $|h| > y$ .

If  $\nu\{E_y(h)\} \leq \left\{ \frac{M}{y} \|f\|_{a, \mu} \right\}^b$  where  $M$  is independent of  $f$  and  $y$ , the transformation

$T$  is said to be of weak type  $(a, b)$  and the least value of  $M$  in the above inequality is called the weak norm of  $T$ . With these definitions 'Marcinkiewicz' theorem can be stated as follows. Let  $(\alpha_1, \beta_1)$  and  $(\alpha_2, \beta_2)$  be two points of the triangle  $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$  such that  $\beta_1 \neq \beta_2$ . Let the quasi-linear transformation  $h = Tf$  be simultaneously of weak types  $(1/\alpha_1, 1/\beta_1)$  and  $(1/\alpha_2, 1/\beta_2)$  with norms  $M_1$  and  $M_2$  respectively. Then for any point  $(1/\alpha, 1/\beta)$  of the open segment  $\alpha = (1-t)\alpha_1 + t\alpha_2$ ,  $\beta = (1-t)\beta_1 + t\beta_2$ ,  $0 < t < 1$  the transformation  $T$  is of strong type  $(1/\alpha, 1/\beta)$  and the corresponding norm of  $T$  does not exceed  $K M_1^{1-t} M_2^t$  where  $K$  depends on  $k, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  and  $t$ . For fixed  $k, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ , the number  $K$  is bounded in any closed interval for  $t$  lying in the open interval  $(0, 1)$ . — Some generalizations of the above result and interesting applications are also given. For instance, it is shown that the notion of weak type transformations arises naturally in the theory of fractional integration.

*V. Ganapathy Iyer.*

**Rogosinski, W. W.: Continuous linear functionals on subspaces of  $\mathfrak{L}^p$  and  $\mathfrak{C}$ .** Proc. London math. Soc., III. Ser. 6, 175—190 (1956).

Die Resultate des Verf. beziehen sich auf Unterräume  $\mathfrak{G}$  von  $\mathfrak{L}^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) oder  $\mathfrak{C}$ . Ein über  $\mathfrak{G}$  definiertes beschränktes lineares Funktional  $\underline{B}$  gestattet nach dem Hahn-Banachschen Satz stets eine Fortsetzung gleicher Norm in den Oberraum, der darstellende Kern  $\underline{\mu}$  wird minimal genannt. Wegen der strengen Konvexität des konjugierten Raumes  $\mathfrak{L}^{p'}$  ist im Falle  $1 < p < \infty$  der minimale Kern (f. ü.) eindeutig bestimmt.  $G$  heißt eine Maximalfunktion zu  $\underline{B}$ , wenn  $\underline{B}(G) = \|\underline{B}\|$ ,  $\|G\| = 1$ . Für  $1 < p < \infty$  existiert eine (f. ü.) eindeutig bestimmte Maximalfunktion  $G$ . Für  $\mathfrak{L}^1$  bzw.  $\mathfrak{C}$  kennzeichnet Verf. alle  $B$ , für die ein minimaler Kern existiert: Die Menge  $\{P: \mu(P) = \|\mu\|_\infty\}$  ( $\mu$  Kern von  $B$ ) muß positives Maß haben,

bzw. (für  $\mathfrak{G}$ )  $\mu$  muß stetig gerichtet sein. Es werden auch Bedingungen dafür angegeben, daß ein  $G \in \mathfrak{G}$  maximal sei für ein  $\underline{B}$ . — Als Anwendungen werden minimale Kerne als Lösungen des allgemeinen Momentenproblems explizit bestimmt. Bei manchen Extremalaufgaben kann man auf diese Weise genauere Auskunft über die Natur der Lösung erhalten.

*D. Laugwitz.*

**Musiak, J. and W. Orlicz:** Linear functionals over the space of functions continuous in an open interval. *Studia math.* 15, 216—224 (1956).

Soit  $C(a, b)$  l'ensemble des fonctions numériques continues et bornées sur l'intervalle ouvert  $]a, b[$ . Une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $C(a, b)$  est dite  $(l)$ -convergente vers  $x \in C(a, b)$  si les nombres  $\sup |x_n|$  sont majorés et si  $x_n$  converge vers  $x$  uniformément sur toute partie compacte de  $]a, b[$ . Théorème 1: les formes linéaires  $\xi$  sur  $C(a, b)$  continues pour la  $(l)$ -convergence sont données par la formule  $\xi(x) =$

$\int_{a+}^{b-} x(t) dy(t)$  où  $y$  est une fonction à variation bornée dans  $]a, b[$ , continue à gauche, et nulle en un point arbitrairement fixé de  $]a, b[$ ; la fonction  $y$  est bien déterminée par  $\xi$ . (Ceci résulte de la théorie de l'intégration: cf. par exemple N. Bourbaki, Intégration, chap. III, § 2, déf. 4, et chap. IV, § 4, prop. I, 3). Soient  $\xi_n$  une suite de formes linéaires du type précédent, correspondant à des fonctions  $y_n$ . Les AA. donnent les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier les  $y_n$  pour que la suite  $\xi_n$  converge faiblement.

*J. Dixmier.*

**Darbo, Gabriele:** Sulla permanenza di certe proprietà in una trasformazione dipendente da un parametro — un criterio di invertibilità completa. *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* 25, 357—370 (1956).

Ist  $\zeta(\lambda)$  eine im Intervall  $I$  differenzierbare Funktion im Banach-Raum  $\Sigma$  mit  $\|\dot{\zeta}(\lambda)\| \leq A(\lambda) k(\|\zeta\|)$ , wobei  $A(\lambda)$  positiv und summierbar in  $I$  und  $k(\xi)$  stetig, monoton wachsend und nicht negativ für  $\xi \geq 0$  sind, so gilt für jedes  $\varepsilon > 0$ ,  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  aus  $I$  und  $\zeta_0$  aus  $\Sigma$  die Ungleichung

$$\left| \frac{\|\zeta_0\| + \|\zeta_2 - \zeta_0\|}{\|\zeta_0\| + \|\zeta_1 - \zeta_0\|} \cdot \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\xi}{k(\xi) + \varepsilon} \right| \leq \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A(\lambda) d\lambda \right| (\zeta_1 = \zeta(\lambda_1), \zeta_2 = \zeta(\lambda_2)).$$

Als Lückenradius  $\rho$  von  $\Phi$  wird die obere Grenze der Radien aller Kugeln bezeichnet, die ganz in  $\Sigma - \Phi(\Sigma)$  liegen, wenn  $\Phi(\Sigma)$  durch die Transformation  $\Phi$  aus einer beliebigen Menge  $\Sigma$  hervorgeht. Ist nun  $\Phi$  von einem reellen Parameter  $\lambda$  abhängig und für jedes  $x \in \Sigma$  eine nach  $\lambda$  differenzierbare Funktion, die für  $x_1$  und  $x_2$  aus  $\Sigma$  für fast jedes  $\lambda$   $\|\dot{\Phi}_\lambda(x_1) - \dot{\Phi}_\lambda(x_2)\| \leq A(\lambda) k(\|\Phi_\lambda(x_1) - \Phi_\lambda(x_2)\|)$  erfüllt, so folgt mit obigen Voraussetzungen über  $A(\lambda)$  und  $k(\xi)$ , wenn außerdem für  $\xi > 0$   $k(\xi)/\xi$  positiv und fallend und das Integral von  $1/k(\xi)$  im Nullpunkt divergiert, daß  $\rho$  von  $\Phi_\lambda$  entweder identisch Null oder endlich und positiv oder unendlich für jedes  $\lambda \in I$ . Es besteht dann immer eine ein-eindeutige Zuordnung  $T$  zwischen  $\Phi_{\lambda_1}(\Sigma)$  und  $\Phi_{\lambda_2}(\Sigma)$ : ist  $\Sigma$  linear und vollständig, dann ist  $T$  ein Autohomöomorphismus. Aus diesen Sätzen folgen also Permanenzeigenschaften in dem Sinne, daß  $\Phi_\lambda$  eine Eigenschaft für alle  $\lambda \in I$  aufweist, wenn sie für ein spezielles  $\lambda \in I$  vorhanden ist [Umkehrbarkeit, Existenz einer Lösung von  $\Phi_\lambda(x) = z$ ]. Als spezielles Beispiel wird  $\Phi(x) = x + K(x)$  betrachtet, wo  $K(x)$  eine Kontraktion ist.

*F. Selig.*

**Horváth, J.:** Singular integral operations and spherical harmonics. *Trans. Amer. math. Soc.* 82, 52—63 (1956).

Es sei  $x = (x_1, \dots, x_n)$  das Element des Euklidischen  $R^n$  ( $n \geq 2$ ),  $r = |x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ ,  $S_{n-1}$  die Einheitskugelfläche  $|x| = 1$ ,  $\sigma$  deren Element. Wenn  $k(\sigma)$  auf  $S_{n-1}$  integrierbar und  $\int_{S_{n-1}} k(\sigma) d\sigma = 0$  ist, so wird die Distribution  $K =$

V. P.  $\left[ \frac{k(\sigma)}{r^n} \right] \left( r = |x|, \sigma = \frac{x}{|x|} \right)$  definiert durch  $K(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r \geq \varepsilon} \frac{k(\sigma)}{r^n} \varphi(x) dx$ , wo

$\varphi \in (\mathcal{D})$ . [Bezeichnungen so, wie in der Schwartzschen Distributionstheorie üblich.] Wenn  $\int_{S_{n-1}} |k(\sigma)|^s d\sigma < \infty$  für ein  $s$  mit  $1 < s < \infty$ , so ist  $K \in (\mathcal{D}'_{L^p})$

für alle  $p$  mit  $1 < p < \infty$ . Wird für  $T \in (\mathcal{D}'_{L^p})$  die (verallgemeinerte) Hilbert-Transformierte von  $T$  durch  $\mathfrak{H}[T] = K * T$  definiert, so stellt  $T \rightarrow K * T$  eine stetige Abbildung von  $(\mathcal{D}'_{L^p})$  auf  $(\mathcal{D}'_{L^p})$  für alle  $1 < p < \infty$  dar. — Als spezielles Beispiel wird die Distribution  $H_j = \Gamma(\frac{1}{2}(n+j)) \pi^{-n/2} \Gamma^{-1}(\frac{1}{2}j) \cdot \text{V. P. } x^j/|x|^{n+j}$  betrachtet. Sie hat die Komponenten  $\text{const} \cdot \text{V. P. } Y_j(\sigma)/r^n$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), wo die  $Y_j$  homogene harmonische Polynome vom Grad  $j$  sind, die zusammen mit der Konstanten 1 ein vollständiges Orthogonalsystem auf  $S_{n-1}$  bilden. (Dies wird bewiesen mit Hilfe der Grassmannschen „Algebra mit komplexer Multiplikation“.) Als Fourier-Transformierte von  $H_j$  ergibt sich  $\mathfrak{F}(H_j) = (-i)^j u^j/|u|^j$ , also

$$\mathfrak{F}(\text{V. P. } Y_j(\sigma)/|x|^n) = \pi^{n/2} \Gamma(\frac{1}{2}j) i^{-j} \Gamma^{-1}(\frac{1}{2}(n+j)) Y_j(\sigma u),$$

wo nun  $Y_j$  jedes homogene harmonische Polynom vom Grad  $j$  bedeuten kann. Die entsprechenden speziellen Hilbert-Transformierten  $\mathfrak{H}_j(T) = H_j * T$  bilden eine einparametrische Halbgruppe, da  $\mathfrak{F}(H_j) \mathfrak{F}(H_i) = \mathfrak{F}(H_{j+i})$ , also nach dem Faltungssatz  $H_j * H_i = H_{j+i}$  und infolgedessen  $\mathfrak{H}_j \mathfrak{H}_i [T] = H_j * H_i * T = H_{j+i} * T = \mathfrak{H}_{j+i} [T]$  ist. G. Doetsch.

**Ehrenpreis, Leon:** On the theory of kernels of Schwartz. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 713—718 (1956).

Soient  $D(R)$ ,  $D'(R)$  les espaces bien connus de L. Schwartz et  $L_c(D, D')$  l'espace des opérations linéaires et continues  $D \rightarrow D'$ , avec la topologie de la convergence compacte. L'A. démontre d'une manière directe, constructive, l'isomorphisme entre  $L_c(D, D')$  et  ${}_2D' = D'(R \times R)$ . Ensuite il démontre l'isomorphisme entre  $L_c(D', D)$  et  $D(R \times R)$ , muni d'une topologie strictement plus faible que la topologie de L. Schwartz. G. Marinescu.

**Shirotu, Taira:** On solutions of a partially differential equation with a parameter. Proc. Japan Acad. **32**, 401—405 (1956).

Es sei  $P(\partial/\partial x, \lambda) = \sum a_p(\lambda) \partial^p/\partial x^p$  ein Polynom von Derivierten im  $R^n$ , wobei die  $a_p(\lambda)$  komplexwertige stetige Funktionen auf einem separablen und lokal kompakten Raum  $\Lambda$  sind. Dann gelten Sätze wie der folgende: Für jede stetige Funktion  $T_x(\lambda)$  auf  $\Lambda$  nach  $\mathcal{D}'_x$  gibt es eine Distributionslösung  $S_x(\lambda)$  der partiellen Differentialgleichung  $P(\partial/\partial x, \lambda) S_x(\lambda) = T_x(\lambda)$ , wo  $S_x(\lambda)$  eine stetige Funktion auf  $\Lambda$  nach  $\mathcal{D}'_x$  und  $S_x(\lambda) = 0$  für  $T_x(\lambda) = 0$  ist ( $\mathcal{D}'_x$  = Distributionsraum). G. Doetsch.

**Rudin, Walter:** The automorphisms and the endomorphisms of the group algebra of the unit circle. Acta math. **95**, 39—55 (1956).

$J$  est le groupe additif des entiers,  $t$  une application de  $N \subset J$  dans  $J$ .  $f$  est un élément de  $L(C)$  (algèbre du groupe  $C$  des complexes de module 1),  $\sum_{n \in J} a(n) e^{ni\theta}$  sa série de Fourier, le problème est de savoir si  $\sum_{n \in N} a(t(n)) e^{ni\theta}$  est la série de

Fourier d'un élément  $T(f)$  de  $L(C)$ . L'A. montre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que: A.  $N$  soit de la forme  $(P \cup F_1) - F_2$ , où  $P$  est une partie périodique de  $J$ ,  $F_1$  et  $F_2$  des parties finies de  $J$ . B. Il existe une application  $s$  de  $J$  dans  $J$  et un entier positif  $q$  tels que:  $B_1$ :  $t(n) = s(n)$ ,  $\forall n \in N$  sauf peut-être pour une partie finie de  $N$ .  $B_2$ :  $\forall n \in S$ ,  $s(n+q) + s(n-q) = 2s(n)$ .  $B_3$ :  $\forall n \in S$ ,  $s(n+q) \neq s(n)$ . — L'application  $f \rightarrow T(f)$  correspondant à  $t$  est un endomorphisme continu de  $L(C)$ . Réciproquement, tout tel endomorphisme peut être obtenu de cette manière. Si  $M(C)$  est l'algèbre des mesures de Borel complexes sur  $C$ , on obtient les homomorphismes de  $L(C)$  dans  $M(C)$  au moyen de l'application  $T$  définie à partir d'un ensemble  $N$  satisfaisant A et de  $t$  satisfaisant  $B_1$  et  $B_2$ . Tout homomorphisme de  $L(C)$  dans  $M(C)$  est prolongeable dans un endomorphisme de  $M(C)$ . Le prolongement est unique si et seulement si  $N = J$ . Les automorphismes



de  $L(C)$  (et de  $M(C)$ ) sont tous obtenus en prenant  $N = J$ ,  $t$  satisfaisant aux conditions B. A. Revuz.

**Heider, L. J.:** Directed limits on rings of continuous functions. Duke math. J. 23, 293—296 (1956).

Es sei  $X$  ein vollständig regulärer  $T_1$ -Raum,  $C(X)$  der Ring aller stetigen, reellen (nicht notwendig beschränkten) Funktionen auf  $X$  und  $\beta X$  die Stone-Čechsche Erweiterung von  $X$ . Dagegen bezeichne  $\beta X^D$  die Stone-Čechsche Erweiterung desjenigen Raumes  $X^D$ , den man erhält, indem man die Menge  $X$  mit der diskreten Topologie versieht. Die Punkte von  $\beta X^D$  sind dann die Ultrafilter in  $X$ . Aus Arbeiten von I. Gelfand und A. N. Kolmogoroff sowie L. Gillmann, H. Henriksen und M. Jerison (dies. Zbl. 21, 411 und 56, 108) ist bekannt, daß die maximalen Ideale von  $C(X)$  den Punkten von  $\beta X$  in einfacher Weise eindeutig entsprechen. Verf. zeigt, daß eine stetige,  $X$  punktweise festlassende Abbildung  $\varphi$  von  $\beta X^D$  auf  $\beta X$  existiert. Diese gestattet es ihm, die maximalen Ideale von  $C(X)$  mit Hilfe der Punkte von  $\beta X^D$  zu kennzeichnen und zu untersuchen. [Bemerkung des Ref.: Die Existenz von  $\varphi$  folgt unmittelbar aus Satz 6 (einschließlich seines Korollars) der in dies. Zbl. 65, 346 referierten Arbeit von G. Nöbeling und Ref.] H. Bauer.

**Heider, L. J.:** A characterization of function-lattices. Duke math. J. 23, 297—301 (1956).

Im folgenden behalten wir die im voranstehenden Referat eingeführten Bezeichnungen bei. Die Menge  $C(X)$  kann nicht nur als Ring, sondern auch als Verband aufgefaßt werden. Verf. zeigt, daß jeder reelle Ring-Homomorphismus von  $C(X)$  ein reeller Verbands-Homomorphismus ist und umgekehrt, daß ferner jeder solche Homomorphismus eine einfache Darstellung mit Hilfe der Punkte von  $\beta X^D$  besitzt. „Reell“ heißt hierbei, daß es sich um einen Homomorphismus auf den Ring bzw. Verband der reellen Zahlen handelt, welcher jede konstante Funktion  $f(x) = \alpha$  ( $x \in X$ ) in  $\alpha$  überführt. Ref. vermißt den Hinweis auf ein Resultat von T. Shirota (dies. Zbl. 47, 417), welches sich mit dem des Verf. zum Teil überschneidet. Shirota betrachtet im Gegensatz zu Verf.  $C(X)$  als Verbandsgruppe und benutzt zur Darstellung der Homomorphismen die Punkte der Hewittschen  $Q$ -Erweiterung  $v X$  und nicht wie Verf. deren Urbilder in  $\beta X^D$  bei der Abbildung  $\varphi$ . Als Anwendung seines Resultats formuliert Verf. eine komplizierte und nach der Meinung des Ref. wenig befriedigende Kennzeichnung derjenigen Verbände  $L$ , welche isomorph zum Verband  $C(X)$  aller stetigen, reellen Funktionen auf einem geeigneten kompakten Raum  $X$  sind. H. Bauer.

**Segal, I. E.:** Tensor algebras over Hilbert spaces. I. Trans. Amer. math. Soc. 81, 106—134 (1956).

Untersucht wird die wie folgt definierte Algebra  $K$  aller covarianten Tensoren über einem Hilbert-Raum  $\mathfrak{H}$  beliebiger Dimension über dem Körper  $C$  der komplexen Zahlen. Für jedes  $n = 1, 2, \dots$  wird das  $n$ -fache Tensorprodukt  $\mathfrak{H}_n$  von  $\mathfrak{H}$  mit sich selbst gebildet, welches wiederum ein Hilbert-Raum ist.  $\mathfrak{H}_1$  wird mit  $\mathfrak{H}$  identifiziert und  $\mathfrak{H}_0 = C$  gesetzt, wobei  $C$  als Hilbert-Raum aufgefaßt wird. Dann ist  $K = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n$  die direkte hilbertsche Summe aller Räume  $\mathfrak{H}_n$ . Die direkte algebraische Summe  $K_0$  aller  $\mathfrak{H}_n$  ist ein linearer Unterraum von  $K$  und bezüglich der Tensormultiplikation eine (nicht kommutative) Algebra. Die Tensormultiplikation kann auf geeignete, nicht notwendig zu  $K_0$  gehörige Paare von Vektoren  $x = \sum x_n$  und  $y = \sum y_n$  aus  $K$  ausgedehnt werden: man setzt  $z_n = \sum_{r=0}^n x_r \otimes y_{n-r}$  und  $x \otimes y = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ , falls  $\sum z_n$  ein Element von  $K$ , d. h.  $\sum |z_n|^2 < +\infty$  ist.  $K$  wird hierdurch zu einer graduerten Algebra. Die genaue Definition dieser Algebren kann hier übergangen werden. — In  $K$  spielen drei Typen von Operatoren eine ausgezeichnete Rolle. Für jedes Element (d. h. jede Permutation)  $\sigma$  der symmetrischen Gruppe  $\Sigma_n$  vom Grade  $n$

existiert in  $\mathfrak{K}_n$  genau ein unitärer Operator  $V^{(n)}(\sigma)$ , der  $y_1 \otimes \dots \otimes y_n$  in  $y_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes y_{\sigma(n)}$  überführt.  $S_n = (n!)^{-1} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} V^{(n)}(\sigma)$  und  $A_n = (n!)^{-1} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \text{sign}(\sigma) V^{(n)}(\sigma)$  sind dann Projektionen von  $\mathfrak{K}_n$  in sich. Für  $n = 0$  wählt man für  $S_0$  und  $A_0$  die identische Abbildung von  $\mathfrak{K}_0$  auf sich. Dann ergeben sich für  $K$  die Symmetrisation bzw. Alternation genannten Operatoren  $S = \sum S_n$  und  $A = \sum A_n$ . Durch die Quantenfeldstatistik, durch welche Verf. zu dieser Arbeit angeregt wurde, erhalten die folgenden „creation operators“  $C(x, A)$  besondere Bedeutung: Es bezeichne  $x$  ein Element von  $\mathfrak{K}$  und  $A(n)$  eine natürliche Zahl mit  $1 \leq A(n) \leq n + 1$ . Der Operator  $C(x, A)$  führt einen Vektor  $u = \sum u_n$  aus  $K$  in den Vektor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} V^{(n+1)}(\pi(A(n))) (x \otimes u_n)$$

über; hierbei bezeichnet  $\pi(r)$  diejenige Transposition aus  $\Sigma_{n+1}$ , welche 1 mit  $r$  vertauscht. Der Definitionsbereich von  $C(x, A)$  besteht aus allen  $u \in K$ , für welche die Bildung dieser Summe sinnvoll ist. — Im ersten Teil der Arbeit werden die charakteristischen und vollständig charakteristischen Unterräume von  $K$  untersucht; letztere werden explizit bestimmt. Ein linearer Unterraum  $M$  von  $K$  heißt dabei charakteristisch, wenn er abgeschlossen ist und durch jeden Automorphismus der graduerten Algebra  $K$  in sich übergeführt wird.  $M$  heißt vollständig charakteristisch, wenn sogar alle stetigen linearen Operatoren, welche mit den Automorphismen vertauschbar sind,  $M$  invariant lassen. Jeder charakteristische Unterraum  $M$  von  $K$  erweist sich als graduert, d. h.  $M$  ist direkte hilbertsche Summe gewisser abgeschlossener Unterräume  $\mathfrak{M}_n$  von  $\mathfrak{K}_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). U. a. wird gezeigt: Es sei  $M$  ein charakteristischer Unterraum von  $K$ , welcher bei Anwendung der Operatoren  $C(x, A)$  in sich übergeht und unter allen derartigen Unterräumen maximal ist bezüglich der Eigenschaft, nicht alle Tensoren von einem bestimmten Rang aufwärts als Elemente zu enthalten. Dann ist  $M$  entweder das symmetrische oder das schiefsymmetrische Ideal von  $K$ , d. h. gleich dem Null-Raum von  $S$  oder von  $A$ . — Im zweiten Teil der Arbeit wird die Struktur der symmetrischen Tensoralgebra  $S$  über  $\mathfrak{K}$  untersucht, d. h. der Quotienten-Algebra von  $K$  nach dem symmetrischen Ideal. Das diesbezügliche Hauptresultat besagt, daß  $S$  kanonisch isomorph zum Raum  $L^2(\mathfrak{K}', N)$  der „quadratisch integrierbaren Funktionale“ über einem reellen Hilbert-Raum  $\mathfrak{K}'$  ist, aus dem sich  $\mathfrak{K}$  durch Komplexifikation ergibt. Hierzu entwickelt der Verf. eine Integrationstheorie in Hilbert-Räumen, die auf den von ihm in einer früheren Arbeit eingeführten Begriffen der „schwachen Verteilung“ und der „Wahrscheinlichkeitsalgebra“ beruht (vgl. dies. Zbl. 56, 123). Die dieser Integrationstheorie zugrunde liegende schwache Verteilung  $N$  auf  $\mathfrak{K}'$  hängt ab von einem Parameter  $c$  und ist durch folgende Eigenschaften eindeutig bestimmt:  $N$  ist eine lineare Abbildung von  $\mathfrak{K}'$  in den Vektorraum aller Zufallsvariablen auf der reellen Zahlengeraden;  $N$  führt orthogonale Vektoren in voneinander unabhängige Zufallsvariable über; für jedes  $u \in \mathfrak{K}'$  ist  $N(u)$  normal verteilt mit dem Mittel Null und der Varianz  $c|u|^2$ . Der Beweis der kanonischen Isomorphie von  $S$  und  $L^2(\mathfrak{K}', N)$  beruht auf der Verallgemeinerung des Satzes von Plancherel vom Fall endlich-dimensionaler euklidischer Räume auf den Fall beliebig dimensionaler Hilbert-Räume  $\mathfrak{K}'$ . — Den Schluß der inhaltsreichen und daher hier nur gedrängt referierten Arbeit bilden Bemerkungen über Darstellungen der additiven Gruppe eines Hilbert-Raumes und über die harmonische Analyse solcher Gruppen.

H. Bauer.

Warner, Seth: Inductive limits of normed algebras. Trans. Amer. math. Soc. 82, 190—216 (1956).

Dans une algèbre (sur le corps réel ou le corps complexe) un ensemble  $A$  est dit idempotent si  $A^2 \subset A$ . Une algèbre localement multiplicativement convexe (en abrégé localement m-convexe) est une algèbre munie d'une topologie localement convexe ayant un système fondamental de voisinages idempotents. Etant donnés

une algèbre  $E$ , une famille  $(E_\alpha)$  d'algèbres localement  $m$ -convexes, et pour tout  $\alpha$  un homomorphisme  $g_\alpha$  de  $E_\alpha$  dans  $E$ , l'A. définit sur  $E$  la topologie (localement  $m$ -convexe) limite inductive de celles des  $E_\alpha$  pour les homomorphismes  $g_\alpha$ , comme la plus fine des topologies localement  $m$ -convexes rendant continues les  $g_\alpha$  (le plus souvent, on a  $E_\alpha \subset E$  et  $g_\alpha$  est l'injection de  $E_\alpha$  dans  $E$ ). Il peut se faire que la topologie ainsi définie sur  $E$  soit strictement moins fine que la plus fine des topologies localement convexes rendant continues les  $g_\alpha$ , comme l'A. le montre par un exemple. Toutefois il montre que les deux topologies coïncident lorsque  $E_\alpha \subset E$  est un idéal pour tout  $\alpha$ , ou lorsque les  $E_\alpha$  forment un ensemble totalement ordonné par inclusion, et que (dans les deux cas)  $E$  est réunion des  $E_\alpha$ . L'A. définit ensuite les notions, relatives aux algèbres, qui correspondent aux notions d'ensemble borné et d'espace bornologique: dans une algèbre localement  $m$ -convexe  $E$ , un ensemble  $A$  est  $i$ -borné s'il existe  $\lambda > 0$  tel que  $\lambda A$  soit contenu dans un ensemble borné idempotent; un homomorphisme  $f$  de  $E$  dans une algèbre localement  $m$ -convexe  $F$  est  $i$ -borné si  $f(A)$  est borné pour tout ensemble  $i$ -borné  $A$  de  $E$ ; enfin,  $E$  est  $i$ -bornologique si tout homomorphisme  $i$ -borné de  $E$  dans une algèbre localement  $m$ -convexe est continu. Pour toute topologie localement  $m$ -convexe  $\mathcal{T}$  sur  $E$ , il y a une topologie  $i$ -bornologique plus fine  $\mathcal{T}^*$  dont les voisinages sont les ensembles convexes, équilibrés, absorbants, idempotents, et qui absorbent tous les ensembles  $i$ -bornés pour  $\mathcal{T}$ ; dire que  $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$  signifie que  $\mathcal{T}$  est  $i$ -bornologique; les algèbres  $i$ -bornologiques sont limites inductives d'algèbres normées. Une limite inductive d'algèbres  $i$ -bornologiques est encore  $i$ -bornologique; la propriété analogue pour les produits infinis est équivalente à l'axiome d'Ulam affirmant la non-existence de mesures non nulles sur un ensemble infini, ne prenant que les valeurs 0 et 1, et nulles pour tout ensemble dénombrable. Généralisant un résultat de Nachbin (ce Zbl. 55, 98) l'A. montre que l'algèbre  $C(T)$  des fonctions continues numériques continues sur un espace complètement régulier  $T$  (munie de la topologie de la convergence compacte) est  $i$ -bornologique si et seulement si  $T$  est un  $Q$ -espace de Hewitt [espace complet pour la moins fine des structures uniformes rendant uniformément continues toutes les fonctions de  $C(T)$ ]. Enfin l'A. considère la classe des  $P$ -algèbres, savoir les algèbres localement  $m$ -convexes telles que l'ensemble des  $x$  pour lesquels  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$  soit un voisinage de 0, et il met en rapport cette classe avec celles étudiées précédemment, lorsqu'il s'agit d'algèbres commutatives. Par exemple, si une algèbre localement  $m$ -convexe  $E$  est  $i$ -bornologique et si tout point est  $i$ -borné,  $E$  est une  $P$ -algèbre; inversement, si  $E$  (commutative) est une  $P$ -algèbre métrisable, elle est  $i$ -bornologique et tout point  $i$ -borné; cette dernière propriété cesse d'être valable sans l'hypothèse de métrisabilité, comme l'A. le montre par un exemple.

J. Dieudonné.

Širokov, F. V.: Beweis einer Vermutung von Kaplansky. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 4 (70), 167—168 (1956) [Russisch].

The author proves Kaplansky's conjecture, that if in an associative complete normed ring a commutator  $c = ab - ba$  commutes with  $a$  or  $b$ , then it is quasinilpotent (cf. Putnam, this Zbl. 56, 343; Vidav, this Zbl. 64, 109). The proof is based on the equation (1)  $n! c^n = \sum (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^n a^k$ , which holds for any  $a, b, c = ab - ba$  such that  $ac = ca$ . Equation (1) is obtained by differentiating  $(\lambda c + b)^n = e^{\lambda a} b^n e^{-\lambda a}$   $n$  times with respect to  $\lambda$  and putting  $\lambda = 0$ ; it is used to obtain the estimate  $\|c^n\|^{1/n} = O(1/n)$ , from which the result follows.

P. M. Cohn.

Leeuw, K. de and H. Mirkil: Intrinsic algebras on the torus. Trans. Amer. math. Soc. 81, 320—330 (1956).

Une algèbre homogène intrinsèque  $A$  sur le tore à  $n$  dimensions  $T_n$  est définie par les propriétés suivantes: (H 0)  $A$  est une algèbre de Banach complexe commutative



semi-simple. (H1) Le spectre de  $A$  est  $T_n$ . (H2)  $A$  est invariante vis-à-vis des translations et des automorphismes de  $T_n$ . (H3) Pour tout  $f \in A$ , l'application  $x \rightarrow f_x$  de  $T_n$  dans  $A$  est continue ( $f_x$  désignant le translaté de  $f$  par  $x$ ). Šilov (ce Zbl. 53, 84) supposait seulement dans (H2) l'invariance vis-à-vis des translations et appelait ses algèbres „homogènes“. Les résultats suivants sont spéciaux aux algèbres intrinsèques homogènes. Th. 1: si  $A$  contient deux fonctions distinctes qui coïncident sur un ensemble ouvert,  $A$  est régulière. Th. 3: si  $A$  est de type  $C$  (Šilov, ce Zbl. 35, 195) et contient toutes les fonctions indéfiniment différentiables, alors  $A$  est l'algèbre des fonctions  $m$  fois continûment différentiables pour un certain  $m$ . Le th. 2 (lemme pour le th. 3) est purement algébrique: si  $I$  est un idéal propre dans  $K[[X_1, \dots, X_n]]$  ( $K$ , corps de caractéristique 0) invariant par les substitutions unimodulaires,  $I$  est une puissance de l'idéal maximal. *J. Dixmier.*

**Widom, Harold:** Embedding in algebras of type I. Duke math. J. 23, 309—324 (1956).

Kaplansky a introduit (ce Zbl. 51, 91), comme généralisation des espaces hilbertiens, les  $AW^*$ -modules, pour lesquels le produit scalaire prend ses valeurs dans une  $AW^*$ -algèbre abélienne  $z$ . Soit  $H$  un  $AW^*$ -module, et soit  $B$  l'algèbre des opérateurs bornés sur  $H$ . L'A. généralise, au cas de  $H$  et de  $B$ , les notions classiques de convergence faible ou forte, et certaines de leurs propriétés (en définissant d'abord une topologie dans  $z$ , liée à sa structure de lattice relativement complète); il généralise aussi l'opération de complétion d'un espace préhilbertien. Soient  $\mathfrak{A}$  une  $AW^*$ -algèbre,  $z$  une sous- $AW^*$ -algèbre du centre de  $\mathfrak{A}$ ; un état sur  $\mathfrak{A}$  à valeurs dans  $z$  est un homomorphisme  $r$  du  $z$ -module  $\mathfrak{A}$  dans le  $z$ -module  $z$  tel que  $\|r(A)\| \leq k \|A\|$  pour tout  $A \in \mathfrak{A}$ ,  $|r(A^*B)|^2 \leq r(A^*A) r(B^*B)$ ,  $r(B^*A^*AB) \leq \|A^*A\| r(B^*B)$ ; comme dans le cas classique, un tel état définit une représentation de  $\mathfrak{A}$  sur une sous-algèbre d'une algèbre de type I. Si  $\mathfrak{A}$  possède suffisamment d'états continus en un sens convenable,  $\mathfrak{A}$  peut être „ $AW^*$ -plongée“ dans une  $AW^*$ -algèbre  $B$  de type I et de centre  $z$ . L'A. se demande ensuite si  $\mathfrak{A}$  est égal à son bicommutant dans  $B$ , et démontre de nombreux résultats à ce sujet: par exemple, réponses essentiellement positives quand  $\mathfrak{A}$  est de type I, ou finie; généralisation du théorème de bicommutation de von Neumann quand  $B$  est l'algèbre des opérateurs bornés d'un  $AW^*$ -module. *J. Dixmier.*

**Feldman, Jacob:** Embedding of  $AW^*$  algebras. Duke math. J. 23, 303—307 (1956).

Soit  $A$  une  $AW^*$ -algèbre qui possède une famille séparante d'états complètement additifs sur les projecteurs de  $A$ . Théorème 2:  $A$  peut être „ $AW^*$ -plongée“ dans l'algèbre des opérateurs d'un espace hilbertien. Théorème 1: si  $A$  est finie (hypothèse peut-être inutile),  $A$  est \*-isomorphe à une algèbre de von Neumann („ring of operators“). Pour un résultat voisin, cf. Kadison, Ann. of Math, Ser. II 64, 175—181 (1956). *J. Dixmier.*

**Feldman, Jacob:** Isomorphisms of finite type II rings of operators. Ann. of Math., II. Ser. 63, 565—571 (1956).

Soient  $A$  et  $B$  des algèbres de von Neumann („rings of operators“) de type  $II_1$ ,  $L$  et  $M$  les lattices de leurs projecteurs. Un orthomorphisme de  $L$  sur  $M$  est une bijection de  $L$  sur  $M$  qui préserve la relation d'ordre et les complémentaires orthogonaux. Théorème 3: tout orthomorphisme de  $L$  sur  $M$  est induit par un isomorphisme de  $A$  sur  $B$ . Pour la démonstration, l'A. considère les anneaux  $R$  et  $S$  des opérateurs non bornés affiliés à  $A$  et  $B$ ; ils sont réguliers au sens de von Neumann, et la lattice des idéaux à droite principaux de  $R$  est isomorphe à  $L$  (th. 2); grâce à la théorie des géométries continues, l'isomorphisme de  $L$  sur  $M$  définit un isomorphisme de  $R$  sur  $S$ , et on en déduit le th. 3. Du théorème 3, l'A. déduit le théorème 4: soient  $U$  et  $V$  les groupes d'opérateurs unitaires de  $A$  et  $B$ ,  $u$  un isomorphisme de  $U$  sur  $V$ ; il existe un isomorphisme  $g$  de  $A$  sur  $B$  et une application multiplicative  $u$  de  $U$  dans

le centre de  $V$  tels que  $u(T) = u(T)g(T)$  pour tout  $T \in U$ . Les isomorphismes de  $A$  sur  $B$  dont il est question sont des isomorphismes pour la structure d'anneau à involution. Le théorème 4 a été établi par Dye (ce Zbl. **64**, 110) lorsque  $A$  et  $B$  sont des facteurs non de type  $I_{2n}$ , et le théorème 3 a été établi (loc. cit.) sans restrictions sur  $A$  et  $B$ , par une méthode plus longue.

*J. Dixmier.*

**Pukánszky, L.: Some examples of factors.** Publ. math., Debrecen **4**, 135—156 (1956).

Soit  $M$  une algèbre de von Neumann (= anneau d'opérateurs). L'A. dit que  $M$  possède la propriété  $L$  s'il existe une suite  $(U_k)$  d'opérateurs unitaires de  $M$  tendant faiblement vers 0, et tels que, pour tout  $A \in M$ ,  $U_k A U_k^*$  tende fortement vers  $A$ . Cette propriété est un invariant algébrique de  $M$ . Elle ressemble à la „propriété  $\Gamma$ “ que Murray et von Neumann ont introduite (ce Zbl. **60**, 369) pour prouver l'existence de deux facteurs de type  $II_1$  non algébriquement isomorphes. Reprenant les exemples de facteurs dus à J. von Neumann (ce Zbl. **23**, 133), l'A. obtient des facteurs  $M_1, M_2$  dépendant d'un nombre  $p \in ]0, 1[$ ,  $M_1$  ayant la propriété  $L$  et  $M_2$  ne l'ayant pas. Ceci redémontre, pour  $p = \frac{1}{2}$ , le résultat de Murray et von Neumann. Mais  $M_1$  et  $M_2$  sont de type III pour  $p \neq \frac{1}{2}$ , d'où le théorème 1: il existe deux facteurs de type III non algébriquement isomorphes.

— Soit  $N$  une sous-algèbre de von Neumann abélienne de  $M$ . Soit  $T$  la sous-algèbre de von Neumann de  $M$  engendrée par les opérateurs unitaires  $U \in M$  tels que  $UNU^* \subset N$ . Disons que  $N$  est singulière si  $T = N$ , semi-régulière si  $T$  est un facteur  $\neq M$ . Le rapp. a prouvé (ce Zbl. **55**, 107) qu'il existe dans certains facteurs de type  $II_1$  des sous-algèbres de von Neumann abéliennes maximales singulières et d'autres semi-régulières. Poursuivant l'étude de ses exemples, l'A. prouve le même résultat pour certains facteurs de type III. Les techniques sont nettement plus compliquées que pour les facteurs de type  $II_1$ .

*J. Dixmier.*

**Misonou, Yosinao: On divisors of factors.** Tôhoku math. J., II. Ser. **8**, 63—69 (1956).

Un facteur  $N$  est appelé par l'A. un diviseur du facteur  $M$  si  $M$  est isomorphe à  $N \otimes P$  avec un facteur  $P$ . Th. 1: un facteur qui a un diviseur non normal est non normal. Th. 2: un facteur fini qui a un diviseur possédant la propriété  $\Gamma$  possède la propriété  $\Gamma$ . Conséquence: si  $M$  est approximativement fini,  $M \otimes N$  n'est pas toujours isomorphe à  $N$ . Remarques sur les „produits tensoriels infinis restreints“ de facteurs.

*J. Dixmier.*

**Juan y Hernandez, Enrique: Die unendlichen Determinanten und die Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.** Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. **16**, 15—48 (1956) [Spanisch].

Verf. behandelt Determinanten unendlicher Matrizen, deren Elemente gewissen Konvergenzbedingungen genügen, und ihre Anwendung auf die Auflösung unendlicher linearer Gleichungssysteme. Entsprechende ältere Ergebnisse von Riesz werden präzisiert. — Für die unendliche Matrix  $(a_{ik} + \delta_{ik})$  sei die Doppelreihe  $\sum |a_{ik}|$  konvergent. Dann ist die Folge der endlichen Determinanten  $\Delta_n = |a_{ik} + \delta_{ik}|$  ( $i, k \leq n$ ) konvergent; ihr Grenzwert  $\Delta$  heißt eine normale Determinante. Ersetzt man die  $k$ -te Spalte durch Elemente  $c_i$  mit  $|c_i| < C$ , so konvergiert auch die Folge der bei dieser Ersetzung entstehenden Determinanten  $\Delta_n^{(k)}$  gegen einen Grenzwert  $\Delta^{(k)}$ . Dies führt zur Definition der Minoren  $\binom{i}{k}$  von  $\Delta$ , die durch die spezielle Ersetzung  $c_j = \delta_{ij}$  ent-

stehen. Bei allgemeiner Wahl der  $c_i$  gilt  $\Delta^{(k)} = \sum \binom{i}{k} c_i$ , wobei diese Reihe absolut konvergiert. Als Abschwächungen des Begriffes der normalen Determinante werden weiter absolut konvergente Determinanten und quasinormale Determinanten eingeführt. Für diese Determinanten werden die üblichen Eigenschaften der endlichen Determinanten bewiesen; z. B. auch der Entwicklungssatz. Es folgt die Anwendung

auf die Auflösungstheorie unendlicher linearer Gleichungssysteme. Für Systeme mit normaler Determinante ergeben sich dabei Existenz- und Eindeigkeitssätze, die in weitgehender Analogie zum endlichen Fall stehen. Im letzten Teil der Arbeit werden allgemeinere Gleichungssysteme behandelt, deren Determinante nicht mehr normal ist. Die Verhältnisse werden an mehreren Beispielen eingehend diskutiert.

*H.-J. Kowalsky.*

**Pesonen, Erkki:** Über die Spektraldarstellung quadratischer Formen in linearen Räumen mit indefiniter Metrik. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 227, 30 S. (1956).

Es sei  $\mathfrak{H}_n$  ein  $n$ -dimensionaler komplexer linearer Raum, und  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  seien zwei selbstadjungierte Bilinearformen in  $\mathfrak{H}_n$ . Die Vektoren  $x \in \mathfrak{H}_n$  seien in die Klassen  $\mathfrak{P}^0, \mathfrak{P}^+, \mathfrak{P}^-$  verteilt, je nachdem  $P(x, x)$  gleich, größer, oder kleiner als 0 ausfällt; die Klassen  $\mathfrak{Q}^0, \mathfrak{Q}^+, \mathfrak{Q}^-$  seien analog erklärt in bezug auf die Form  $Q$ . Es wird die einschränkende Bedingung gemacht:  $\mathfrak{P}^0 \cap \mathfrak{Q}^0 = \{0\}$ . Dann kann man (evtl. durch Vertauschung der Rollen von  $P$  und  $Q$ , und durch Ersetzen von  $P$  oder  $Q$  oder von beiden durch  $-P, -Q$ ) immer erreichen, daß  $\mathfrak{Q}^+ \cup \mathfrak{Q}^0 \subset \mathfrak{P}^+ \cup \{0\}$  gilt. Unter dieser Annahme wird gezeigt, daß es mindestens einen, aber höchstens  $n$  verschiedene Eigenwerte  $\lambda$  von  $P$  in bezug auf  $Q$  gibt.  $\lambda$  heißt Eigenwert, wenn es ein  $x \neq 0$  derart gibt, daß  $P(x, y) = \lambda Q(x, y)$  für alle  $y \in \mathfrak{H}_n$  gilt:  $x$  ist ein zu  $\lambda$  gehöriger Eigenvektor. Alle zu  $\lambda$  gehörigen Eigenvektoren zusammen mit dem Nullvektor bilden den zu  $\lambda$  gehörigen Eigenraum. Es wird gezeigt, daß die zu den verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$  gehörigen Eigenräume paarweise sowohl  $P$ - als auch  $Q$ -orthogonal sind, und zusammen den ganzen Raum  $\mathfrak{H}_n$  aufspannen. Dieses Ergebnis läßt sich auch in der Form einer Spektraldarstellung schreiben:  $P(x, y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q(F_i x, y)$ , wobei  $F_i x$  die  $Q$ -Projektion von  $x$  auf den

$i$ -ten Eigenraum bezeichnet (vgl. R. Nevanlinna, dies. Zbl. 47, 108); man kann diese Darstellung natürlich auch in Integralform  $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dQ(E_\lambda x, y)$  umschreiben. —

Diese Ergebnisse werden dann auf den Fall eines unendlichdimensionalen komplexen linearen Raumes  $\mathfrak{H}$  übertragen, und zwar unter den folgenden Voraussetzungen: (A)  $\mathfrak{Q}^+ \cup \mathfrak{Q}^0 \subset \mathfrak{P}^+ \cup \{0\}$ ; (B) die Metrik  $Q(x, y)$  hat mindestens eine vollständige separable positiv definite Metrik  $H(x, y)$  als Minimalmajorante (vgl. R. Nevanlinna, dies. Zbl. 55, 97) so daß  $|P(x, x)| \leq \sigma H(x, x)$  mit festem  $\sigma > 0$  gilt; (C) für jedes  $x \in \mathfrak{Q}^+ \cup \mathfrak{Q}^0$  gilt  $P(x, x) \geq \tau H(x, x)$  mit festem  $\tau > 0$ . — Die Betrachtung erfolgt durch Grenzübergang aus dem Falle endlich-dimensionaler Räume.

*B. Sz. Nagy.*

**Altman, M.:** On linear functional equations in  $(B_0)$ -spaces. Studia math. 15, 131—135 (1956).

Etude des opérateurs  $T$  linéaires continus d'un espace de Fréchet dans lui-même,  $T$  ayant les propriétés: 1.  $T$  est d'ordre fini (i. e. il existe un entier  $\mu \geq 0$  tel que  $T^{\mu+1} x = 0$  entraîne  $T^\mu x = 0$ ); 2. le transposé de  $T$  est d'ordre fini  ${}^t\mu$ ; 3. l'image de  $T^k$  est fermée pour  $k = 1, \dots, {}^t\mu + 1$ . L'A. montre notamment que l'on peut écrire  $T = H + K$ ,  $H$  étant inversible et l'image de  $K$  étant le noyau de  $T$ .

*J. L. Lions.*

**Altman (Al'tman), M.:** Zur Riesz-Schauderschen Theorie der linearen Operatorgleichungen in Räumen vom Typus  $(B_0)$ . Studia math. 15, 136—143 (1956) [Russisch].

Soit un opérateur  $T$  donné dans un espace de Fréchet  $X$  tel que  $T = AB = BA$  où  $A$  et  $B$  sont des opérateurs linéaires continus de  $X$  dans lui-même, et tel que  $1 - T$  soit complètement continu. L'A. montre que la théorie de Riesz-Fredholm est applicable à  $A$  et  $B$ . Comme application: soit  $U$  tel que  $U^n$  soit complètement continu. Alors considérons

$$T = 1 - U^n = (1 - U)(1 + U + \dots + U^{n-1});$$



on est dans les conditions d'applications du théorème. Donc la théorie de Riesz-Fredholm s'applique à  $1 - U$ . J. L. Lions.

**Volpato, Mario:** Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali continue. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **25**, 343—356 (1956).

Sei  $X$  der Raum der in einem abgeschlossenen Intervall  $I$  des  $R_n$  stetigen Funktionen  $z(P)$  mit  $\|z(P)\| = \max_{P \in I} |z(P)|$ . Sei  $v(P) = T[z(P)]$  eine stetige Transformation über der konvexen Menge  $X_0 \subset X$ , wobei  $V_0 = T(X_0)$  ein begrenzter Teil von  $X_0$  ist. Genüge  $v$  der Bedingung

$$\begin{aligned} & |v(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n) - v(x_1, \dots, x''_i, \dots, x_n)| \leq \\ & \leq k_i(X_0) \left\{ \text{Extr. Sup.}_{x_r \in I_r, r \neq i} |z(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n) - z(x_1, \dots, x''_i, \dots, x_n)| \right\} + \\ & + H_i(X_0, |x'_i - x''_i|) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

mit  $0 \leq k_i(X_0) < 1$  und  $H_i(X_0, \zeta)$  gegen Null für  $\zeta$  gegen Null ( $H_i$  reell,  $\zeta$  reell und nicht negativ). Dann ist die Teilmenge  $X_0^*$  von  $X_0$ , die aus allen Funktionen  $z(P)$  mit

$$|z(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n) - z(x_1, \dots, x''_i, \dots, x_n)| \leq H_i(X_0, |x'_i - x''_i|) / (1 - k_i(X_0)),$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ) besteht nicht leer und konvex; das Bild  $V_0^*$  von  $X_0^*$  ist ein begrenzter Teil von  $X_0^*$ ; die Transformation  $T$  ist in  $X_0^*$  vollstetig und besitzt daher in  $X_0^*$  ein Einheitselement. Als Beispiel wird die Transformation  $v(x, \mu) = \mu + \int_a^x f[t, z(t, \mu)] dt$  betrachtet, also die Existenz einer Lösung des Problems  $y' = f(x, y)$

mit  $y(a) = \mu$  im Großen nachgewiesen. Der für stetige Funktionen angegebene Satz kann auf  $L^p$ -summierbare Funktionen verallgemeinert werden. F. Selig.

**Kato, Tosio:** On linear differential equations in Banach spaces. Commun. pure appl. Math. **9**, 479—486 (1956).

Soit  $X$  un espace de Banach,  $A(t)$  une famille d'opérateurs linéaires non continus dans  $X$ ,  $a < t < b$  ( $t$  = temps); on cherche une fonction  $t \rightarrow u(t)$  une fois continûment différentiable de  $]a, b[$  dans  $X$ , continue dans  $[a, b]$ ,  $u(t)$  étant dans l'ensemble de définition de  $A(t)$  pour tout  $t$ , vérifiant  $du(t)/dt = A(t)u(t) + f(t)$ ,  $f$  fonction donnée, et  $u(a)$  étant donné. Si  $X$  est un espace de Hilbert, cf. Višik, ce Zbl. **70**, 122, et le rapporteur, ce Zbl. **64**, 92, et des notes antérieures de Višik (cf. bibliographie dans l'article cité). Dans le cas particulier où  $A$  est un opérateur du deuxième ordre, cf. Yosida, ce Zbl. **57**, 78, méthode valable dans des espaces  $L^p$ ,  $p$  égal à 2 ou non. La méthode de l'A. repose sur une utilisation ingénieuse du théorème de Hille-Yosida. On suppose (I) pour tout  $t$ ,  $A(t)$  est générateur infinitésimal d'un semi groupe, (II) il existe une famille d'opérateurs  $R(t)$  linéaires continus de  $X$  dans lui-même  $R(t)$  étant deux fois continûment différentiable en  $t$ , inversible, tel que les opérateurs  $\bar{A}(t) = R(t)A(t)R^{-1}(t)$  aient un domaine indépendant de  $t$ , et que l'opérateur  $(1 - \bar{A}(t))(1 - \bar{A}(a))^{-1}$  soit une fois continûment différentiable. Dans ces conditions le problème posé admet une solution unique. Les démonstrations consistent à se ramener, en utilisant (II), à un mémoire antérieur de l'A. (ce Zbl. **52**, 126); dans ce travail, le domaine de  $A(t)$  était indépendant de  $t$ . L'inconvénient de ces résultats intéressants réside dans la condition „le domaine de  $A(t)$  est indépendant de  $t$ “.

J. L. Lions.

**Stummel, Friedrich:** Singuläre elliptische Differentialoperatoren in Hilbertschen Räumen. Math. Ann. **132**, 150—176 (1956).

Die in einer Abhandlung von Carleman (dies. Zbl. **9**, 357) entwickelte Idee wird von dem Verf. zur Untersuchung des Operators

$$A u = -\Delta u + 2i \sum_{\nu=1}^n a_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} + i \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\nu} \cdot u + b u \quad (i = \sqrt{-1})$$

wieder aufgenommen. Dabei wird der Operator  $A$  auf der Menge der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompakten Trägern definiert:  $D(A) = C_0^\infty(E^n)$ ;  $a_\nu \in C(E^n)$ ,  $b$  ist lokal quadratisch integrierbar und es gibt eine solche positive Konstante  $\alpha$ , daß das Integral  $I(b)$  existiert. Für  $0 < R < 1$  und für jedes beschränkte Gebiet  $G$  gilt die folgende Ungleichung

$$I(b) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{|x-y| \leq R} |b(y)|^2 |x-y|^{4-n-\alpha} dy \leq M(G) < \infty.$$

Ergebnisse 1. Wenn  $(A^* - \lambda)u = f \in L^2(E^n)$ , dann genügt  $u$  fast überall der verallgemeinerten Weylschen Mittelwertgleichung:

$$u(x) = \int H(R, x, y) u(y) dy + 2i \int \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial K(R, x, y)}{\partial y_\nu} a_\nu(y) u(y) dy \\ + \int K(R, x, y) \left\{ f(y) + \lambda u(y) - b(y) u(y) + i \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial a_\nu}{\partial y_\nu} u(y) \right\} dy$$

für alle  $R > 0$ . Wenn außerdem  $f$  der Ungleichung  $I(f)$  genügt, dann ist  $u$  in  $G$  gleichmäßig beschränkt. 2. Das obige Resultat wird zum Beweis der wesentlichen Selbstadjungiertheit von Schrödingeroperatoren herangezogen. Außer den bekannten von Friedrichs, Carleman und T. Kato (dies. Zbl. 44, 427) behandelten Fällen gelingt es dem Verf., den Fall des Starkeffektes zu erfassen (die beträchtlich einfachere Methode von T. Kato versagt in diesem Falle), d. h. es gilt der folgende Satz: Der Operator

$$A u = -\Delta u + \sum_{j=1}^{n-3s} c_j x_j u + \frac{1}{2} \sum_{j,k=0, j \neq k}^s e_{jk} r_{jk}^{-1} u.$$

( $c_j, e_{jk} = \text{const.}$ ,  $r_{jk}$  ist die Entfernung des  $j$ -ten vom  $k$ -ten Teilchen) ist nach der Abschließung selbstadjungiert:  $A \subset A^* = \tilde{A} = \tilde{A}^*$ . K. Maurin.

**Levitán, B. M.:** Über die Differentiation der Spektralfunktion des Laplaceschen Operators. Mat. Sbornik, n. Ser. 39(81), 37–50 (1956) [Russisch].

Let  $D$  be a smoothly bounded open subset of real  $n$ -space and  $A$  the self-adjoint operator on  $L^2(D)$  determined by Laplace's operator and the Neumann boundary condition. Let  $A = \int \lambda dE_\lambda$  be the spectral resolution of  $A$ ; the projection  $E_\lambda$  is given by a kernel  $e(\lambda, x, y)$  called the spectral function of  $A$ . Let  $e_0(\lambda, x, y) = (2\pi)^{-n} \int_{|\xi|^2 \leq \lambda} e^{i\xi(x-y)} d\xi$ , ( $|\xi|^2 = \sum \xi_k^2$ ), be the spectral function corresponding to the entire space. The author has shown that  $e(\lambda, x, y) = e_0(\lambda, x, y) + O(\lambda^{(n-1)/2})$  uniformly on compact subsets of  $D \times D$ . Now he proves that this estimate can be differentiated with respect to  $x$  and  $y$  any number of times provided that the error term is multiplied by  $\lambda^{k/2}$  where  $k$  is the order of the differentiation. An analogous formula holds for the Riesz means. (Reviewer's remark. A corresponding estimate is probably true when  $D$  is not necessarily bounded and when  $A$  is a semibounded self-adjoint extension of any elliptic differential operator with constant coefficients. See Gårding, this Zbl. 58, 88). L. Gårding.

**Lehner, Joseph and G. Milton Wing:** Solution of the linearized Boltzmann transport equation for the slab geometry. Duke math. J. 23, 125–142 (1956).

Das Anfangswertproblem  $u_t = A u$  mit  $A = -\mu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{c}{2} \int_{-1}^1 d\mu'$  in  $|x| \leq a$ ,  $|\mu'| \leq 1$ ,  $t > 0$  wird unter den Bedingungen  $u(\pm a, \mu, t) = 0$  für  $\mu \leq 0$ ,  $t > 0$  und  $u(x, \mu, 0) = f(x, \mu)$  gelöst. Es liegt jede Lösung im Definitionsbereich  $D(A)$  von  $A$  und kann durch  $u(x, \mu, t) = T(t) f$  für  $f \in D(A)$  dargestellt werden, da  $A$  abgeschlossen,  $D(A)$  im Hilbertraum  $H$  dicht ist und für die Resolvente  $R_\lambda(A) = (\lambda - A)^{-1}$  gilt  $\|R_\lambda\| \leq (\lambda - k)^{-1}$  mit  $\lambda > k$ ,  $k > 0$  (Hille-Yosidasches Theorem);  $T(t) = \exp(tA)$ ,  $t \geq 0$ ,  $T(0) = 1$  bildet eine Halbgruppe. Da das Punktspektrum

$\beta_j$  von  $A$  endlich ist ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) (vgl. J. Lehner und M. Wing, dies. Zbl. 64, 230) und einfache Pole von  $R_\lambda(A)$  liefert, kann das Integral

$$T(t)f = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} e^{\lambda t} R_\lambda f d\lambda, \quad t > 0, \quad \gamma > \beta_1 > \beta_2 \cdots > \beta_m > 0$$

ausgewertet werden und gibt die Lösung des Problems

$$u(x, \mu, t) = \sum_{j=1}^m (f, \psi_j^*) \psi_j e^{\beta_j t} + \zeta(x, \mu, t).$$

$$\zeta(x, \mu, t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} e^{\lambda t} R_\lambda f d\lambda, \quad 0 < \gamma < \beta_m;$$

$\psi_j$  bzw.  $\psi_j^*$  sind die Eigenfunktionen zu den Eigenwerten  $\beta_j$  bzw.  $\beta_j (= \beta_j)$  von  $A$  bzw. des adjungierten Operators  $A^*$ . Erfüllt  $f$  die beiden Bedingungen  $f \in D(A)$ ,  $\|\partial f / \partial x\| < \infty$ ;  $Af \in D(A)$ ,  $\|\partial(Af) / \partial x\| < \infty$ , deren physikalische Bedeutung erklärt wird, so gilt  $\zeta \rightarrow 0$  mit  $t \rightarrow \infty$  für irgend ein festes  $(x, \mu)$ . Ist  $M$  das orthogonale Komplement des von  $\psi_j^*$  aufgespannten Raumes und  $Z_1$  die Einschränkung von  $Z$  auf  $M$  mit  $Z(t)f = \zeta(x, \mu, t)$ , so folgt  $\exp(\varepsilon t)\|Z_1(z)\| \rightarrow \infty$  mit  $t \rightarrow \infty$  für jedes  $\varepsilon > 0$ . F. Selig.

**Berezanskij, Ju. (Yu.) M.:** On eigenfunction expansions for general self-adjointed differential operators. Doklady Akad. Nauk SSSR 108, 379—382 (1956) [Russisch].

Let  $\sigma$  be a measure on the real line and  $N(\lambda)$  a dimension function. The direct integral  $L^2(\sigma, N)$  is by definition a Hilbert space consisting of the vector-valued functions  $F(\lambda) = \{F_k(\lambda)\}_1^{N(\lambda)}$  with the scalar product  $(F, G) = \int F(\lambda) \cdot \bar{G}(\lambda) d\sigma(\lambda)$ ,  $(F(\lambda) \cdot \bar{G}(\lambda) = \sum F_k(\lambda) \bar{G}_k(\lambda))$ . Let  $A$  be a self-adjoint operator on a separable Hilbert space  $H$ . The spectral theorem may be stated in the following form: there exists a direct integral  $H^* = L^2(\sigma, N)$  and a unitary mapping  $U$  from  $H$  to  $H^*$  which diagonalizes  $A$  in the sense that  $UAU^{-1}$  is multiplication by  $\lambda$ . Now let  $H$  be all square integrable functions on an open subset  $S$  of real  $n$ -space. The author shows that for almost all  $\lambda$ , the components of  $F(\lambda) = (Uf)(\lambda)$  are distributions considered as functions of  $f$ . Slightly modified, the proof runs as follows. Let  $b$  be the differential operator  $(-\Delta)^k + 1$ ,  $(2k > n)$ . It has a square integrable solution  $B(x)$  defined in the entire space. Applying Parseval's formula to the identity  $(f, g) = (Bbf, g)$ ,  $((Bf)(x) = \int B(x-y)f(y)dy)$ , we get  $(F, G) = \int (\int C(\lambda, y)f(x)dy) \cdot \bar{G}(\lambda) d\sigma(\lambda)$  where  $f \in C^\infty$  vanishes outside a compact subset of  $S$ ,  $G = Ug$  and  $C(\lambda, y) = U_x B(x-y)$ . Because  $g$  is arbitrary,  $(Uf)(\lambda) = F(\lambda) = \int C(\lambda, y)b f(y)dy$  is a distribution for a. a.  $\lambda$ . When  $S$  is the entire space,  $(1) \int \int |C(\lambda, y)|^2 d\sigma(\lambda) dy / (1 + |y|^{n+\varepsilon}) < \infty$  if  $\varepsilon > 0$ , which means that  $\int |C(\lambda, y)|^2 dy / (1 + |y|^{n+\varepsilon})$  is finite for a. a.  $\lambda$ . (The author gets the exponent  $2n + 1 + \varepsilon$  because of another choice of  $b$ .) The results are specialized to the case when  $A$  is the restriction of a differential operator  $A_0$  (considered as a distribution) with sufficiently differentiable coefficients. When  $A_0$  is elliptic,  $b(D_x)C(\lambda, y)$  exists and is an ordinary eigenfunction of  $A_0$  and (1) can be improved. Finally, explicit formulas are given when  $S$  is the entire space,  $n = 2$  and  $A_0 = \partial^2 / \partial x_1^2 - \partial^2 / \partial x_2^2$ . L. Gårding.

**Bade, William G. and Jacob T. Schwartz:** On Mautner's eigenfunction expansion. Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 519—525 (1956).

Let  $T$  be a self-adjoint operator on the Lebesgue space  $L_2$  of a  $\sigma$ -finite measure space  $S$ . Let  $E(\cdot)$  be the resolution of the identity associated with  $T$ . It is shown that  $T$  has an eigenfunction expansion, in the sense of Mautner (this Zbl. 50, 119) if, for each bounded Borel set  $e$  of real numbers, there is a sequence  $\{S_n\}$  of sets of finite measure covering  $S$  such that, for each  $f \in L_2$ , the function  $E(e)f$  is essentially



bounded on each  $S_n$ . This condition is satisfied if there is a sequence  $\{S_n\}$  such that  $f$  is essentially bounded on each  $S_n$  when  $f$  is in the domain of every  $T^m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ; and if it is satisfied and  $L_2$  is separable, there is a bounded function  $F$  on the real line such that  $\inf_{-n \leq \lambda \leq n} |F(\lambda)| > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$  and  $F(T)$  is an integral operator of Carleman type. Some applications of these results are discussed. *J. D. Weston.*

**Evgrafov, M. A.:** Completeness of the system of characteristic functions of a certain class of operators in a linear topological space with an uncountable basis. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **108**, 13–15 (1956) [Russisch].

Sei  $\sigma(r)$  eine Funktion von  $r > 0$ , so daß  $\lim_{r \rightarrow 0} \sigma(r) \log r^{-1} = +\infty$ , und sei

$\mathfrak{A}(\sigma(r))$  der Raum (aller ?) Funktionen  $f(x)$  ( $x > 0$ ) für welche  $\log \int_0^\infty |f(x)| e^{-xr} dx = o(\sigma(r))$  ( $r \rightarrow 0$ ). Eine Folge  $f_n$  aus  $\mathfrak{A}(\sigma(r))$  konvergiert nach 0, wenn

$$\int_0^\infty |f_N(x)| e^{-xr} dx \leq \varepsilon_N e^{\delta_N \sigma(r)}, \quad \varepsilon_N \rightarrow 0, \quad \delta_N \rightarrow 0.$$

In diesem Raum definiert Verf. gewisse linearen Operatoren und kündigt einige Sätze an über die Vollständigkeit der Eigenfunktionen dieser Operatoren. Keine Beweise werden gegeben. *E. Hewitt.*

**Vito, Luciano de:** Sugli autovalori e sulle autosoluzioni di una classe di trasformazioni hermitiane. *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* **25**, 144–175 (1956).

Der Verf. gibt eine Näherungsmethode für die Berechnung der Eigenwerte eines symmetrischen Operators  $E$  an. Von  $E$  wird folgendes vorausgesetzt: 1.  $D(E)$  ist dicht definiert:  $\overline{D(E)} = \mathfrak{H}$ , 2.  $E(D(E)) \supset D(E)$ , 3.  $E^{-1}$  besitzt eine vollstetige Fortsetzung  $T$ ;  $T \supset E^{-1}$ , 4. die Eigenvektoren von  $T$  liegen in  $D(E)$ . Außer einigen bekannten Spektralsätzen und Theoremen über die Ritzsche Methode beweist der Verf. den folgenden Satz: Es sei  $F_\sigma(v) \stackrel{\text{def}}{=} (Ev, Ev - \sigma v)/(v, Ev - \sigma v)$ ;  $R(u) \stackrel{\text{def}}{=} (u, Tu)/\|Tu\|^2$  ist das Ritzsche Funktional. Wenn  $\mu_k$  ein positiver (negativer) Eigenwert des Operators  $E$  ist,  $\mu_k \leq \sigma < \mu_{k+1}$  ( $\mu_k > \sigma \geq \mu_{k+1}$ ) und wenn  $(z_k^{(n)})$  die Ritzsche Minimal- (Maximal-) Folge ist, und wenn  $t_k^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} T z_k^{(n)}/\|T z_k^{(n)}\|$ , dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_\sigma(t_k^{(n)}) = \mu_k$ , wobei  $F_\sigma(t_k^{(n)}) \leq \mu_k$  ( $F_\sigma(t_k^{(n)}) \geq \mu_k$ ). Dieser Satz wird zur Berechnung der Eigenwerte eingespannter elliptischer Membranen und Platten herangezogen. *K. Maurin.*

**Aczél, J. (Ja. Acel):** Einige allgemeine Methoden in der Theorie der Funktionalgleichungen einer Veränderlichen. Neue Anwendungen der Funktionalgleichungen. *Uspechi mat. Nauk* **11**, Nr. 3 (69), 3–68 (1956) [Russisch].

Die Abhandlung berichtet zusammenfassend über die Untersuchungen des Verf. und anderer Autoren aus der Theorie der Funktionalgleichungen. Als Vorbild dient im ersten Teil der Abhandlung die Cauchysche Funktionalgleichung,  $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ , sowie die analogen Funktionalgleichungen, die vor und nach Cauchy allgemein diskutiert wurden. Die verschiedenen elementaren Lösungsmethoden werden systematisch entwickelt und durchgearbeitet, so daß man insgesamt methodische Hilfsmittel von unerwarteter Tragweite erhält. In vielen Fällen gelingt es, die Auflösung allein unter der Annahme der Stetigkeit der Lösungsfunktion durchzuführen. Im ersten Teil werden insbesondere die Typen behandelt:  $f(x+y) = G(f(x), f(y))$  (§ 1),  $f(x+y)/2 = G(f(x), f(y))$  (§ 2),  $f(F(x, y)) = G(f(x), f(y))$  (§ 3),  $f(x+y) = G(f(x), y)$  (§ 4),  $H(f(x+y), f(x-y), f(x), y) = 0$  (§ 5),  $H(f(x+y), f(x-y), f(x), f(y), x, y) = 0$  (§ 6). — Im zweiten Teil der Arbeit werden nun diese Methoden angewandt, um verschiedene axiomatisch festgelegte Begriffe zu analysieren. Es wird die nicht euklidische Distanz aus einfachen Postulaten hergeleitet, ferner das skalare und vektorielle Produkt durch einfache Forderungen festgelegt, sodann wird in der Theorie der einparametrischen,

stetigen Transformationsgruppen unter bemerkenswert allgemeinen Voraussetzungen die Existenz eines additiven Parameters nachgewiesen, auch mehrparametrische Transformationsgruppen werden sehr weitgehend analysiert, und zum Schluß wird eine Reihe von Systemen von Funktionalgleichungen aufgelöst, die sich in der Theorie der Poisson-Verteilungen ergeben, sowie ein Problem aus der Theorie der inhomogenen Übergangswahrscheinlichkeiten diskutiert. — Die gefällig geschriebene und sehr instruktive Darstellung schließt mit einem Literaturverzeichnis von 64 Nummern.

*A. Ostrowski.*

**Aczél, J.: Über Additions- und Subtraktionstheoreme.** Publ. math., Debrecen 4, 325—332 (1956).

Es handelt sich um Funktionalgleichungen der Gestalt: (1)  $f(x + y) = F[f(x), f(y)]$  und (2)  $f(x - y) = G[f(x), f(y)]$ . [Druckfehler in Formel (2)!]. Was Gl. (1) anbelangt, so hat diese dann und nur dann eine nicht-konstante stetige Lösung, falls es ein offenes Intervall gibt, in welchem die Operation  $F(u, v)$  eine stetige Gruppe bildet. Hat andererseits (1) für jedes  $x, y$  eine stetige Lösung, so ist diese, falls nicht konstant, streng monoton. Hat (1) wenigstens eine nicht-konstante, stetige Lösung, so ist jede Lösung von (1), die auf einer Menge vom positiven Maß eine meßbare Majorante oder Minorante besitzt, auch stetig. — Es wird bewiesen, daß es für die Existenz einer streng monotonen stetigen Lösung von (2) notwendig und hinreichend ist, daß es ein offenes Intervall gibt, in dem  $G(u, v)$  stetig ist und den folgenden Bedingungen genügt: 1.  $G\{G(u, w), G(v, w)\} = G(u, v)$ . 2.  $G(u, u) = e$  mit  $G(u, e) = u$ . Die Existenz einer für alle  $x$  stetigen Lösung von (2) sichert, daß diese, falls nicht konstant, streng monoton ist. Falls (2) wenigstens eine nicht-konstante stetige Lösung hat, so ist jede Lösung dieser Gleichung, die auf einer Menge von positivem Maße eine Majorante oder Minorante besitzt, auch stetig. — Die Arbeit enthält auch die in eine Funktionalklasse gehörende allgemeine Lösung der betrachteten Funktionalgleichungen, welche aus einer partikulären Lösung gebildet wird.

*St. Fenyő.*

## **Praktische Analysis:**

• **Curtiss, John H. (Editor): Proceedings of Symposia in Applied Mathematics.** Vol. VI. Numerical analysis. (Held at the Santa Monica City College August 26—28, 1953). New York-Toronto-London: McGraw-Hill. Book Company, Inc. for the American Mathematical Society 1956. VI, 303 p. 73 s. \$ 9,75.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt.

**Rutishauser, Heinz: Eine Formel von Wronski und ihre Bedeutung für den Quotienten-Differenzen-Algorithmus.** Z. angew. Math. Phys. 7, 164—169 (1956).

Die Arbeit stützt sich auf zwei frühere Abhandlungen des Verf. über den Quotienten-Differenzen-Algorithmus (abgek. Q-D-Algorithmus; dies. Zbl. 55, 347; 56, 350) und bringt eine bedeutsame Vereinfachung der Aufgabe, die Nullstellen eines Polynoms  $N(x)$  vom Grad  $n$  mit Hilfe des Q-D-Algorithmus zu bestimmen. Dazu benötigt man das Q-D-Schema für eine rationale Funktion  $f(x) = N_1(x)/N(x)$  [ $N_1(x)$  irgendein Polynom,  $\neq 0$  und vom Grad  $\leq n - 1$ ]. Dies geschah früher über die S-Kettenbruchentwicklung von  $f(x)$ . Jetzt zeigt Verf., daß man für die spezielle Funktion  $f(x) = x^{n-1}/N(x)$  das Q-D-Schema sehr einfach mittels einer Formel von Wronski bestimmen kann, welche die Potenzreihenentwicklung von  $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^{-1}$  ( $a_0 \neq 0$ ) in der Umgebung von  $x = 0$  explizit unter Verwendung von Hankelschen Determinanten angibt. Für die Einzelheiten muß auf die Arbeit verwiesen werden, wo auch ein Beispiel durchgerechnet ist.

*E. Mohr.*

**Heinrich, H.: Zur Vorbehandlung algebraischer Gleichungen.** Z. angew. Math. Mech. 36, 145—148 (1956).

Es wird ein Rechenschema zur Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers

$g(z)$  eines Polynoms  $n$ -ten Grades  $f(z)$  und seiner Ableitung  $f'(z)$  bzw.  $f_1(z) = n^{-1} f'(z)$  entwickelt, womit sich mehrfache Wurzeln von  $f(z)$  aufdecken und abspalten lassen. Auch Wurzeln gleichen Betrages, doch entgegengesetzten Vorzeichens lassen sich nach Bilden einer ersten Graeffe-Stufe abspalten. Schließlich läßt sich das Schema auch noch zur Bildung einer Sturmschen Kette heranziehen. Das Verfahren wird an Zahlenbeispielen vorgeführt.

*R. Zurmühl.*

**Bauer, F. L.:** Zur numerischen Behandlung von algebraischen Eigenwertproblemen höherer Ordnung. *Z. angew. Math. Mech.* **36**, 244—245 (1956).\*

**Morgenstern, Dietrich:** Begründung des alternierenden Verfahrens durch Orthogonalprojektion. *Z. angew. Math. Mech.* **36**, 255—256 (1956).

**Patzelt, Gerhard:** Über die Gewinnung einer gewissen Klasse von Partikulärlösungen bei bestimmten Typen gewöhnlicher oder partieller Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. *Z. angew. Math. Mech.* **36**, 257—258 (1956).

**Kuntzmann, Jean:** Remarques sur la méthode de Runge-Kutta. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **242**, 2221—2223 (1956).

Die klassische Methode von Runge-Kutta (Rang 4) gehört zu einer Familie von Methoden, deren erste die Tangentenmethode ist. Als normale Methode vom Range  $n$  dieser Gruppe bezeichnet Verf. eine Methode, die folgende Eigentümlichkeiten hat: a) sie benutzt  $n$  Zwischenpunkte des Intervalles, b) der Fehler eines Schrittes von der Länge  $h$  ist von der Ordnung  $h^{n+1}$ , c) alle benutzten Zwischenpunkte haben einen Ordinatenfehler der Größe  $h^n$ . Die verschiedenen Methoden werden daraufhin untersucht, ob sie normal oder anormal sind.

*Fr.-A. Willers.*

**Lemaitre, G.:** Intégration par analyse harmonique. *Ann. Soc. sci. Bruxelles*, I. Sér. **70**, 117—123 (1956).

Methode zur numerischen Auflösung von Differentialgleichungen der Form  $L(y) = z$ , wo  $L(y)$  eine lineare Funktion von  $y(x)$  und deren Ableitungen, und wo  $z = z(y, x)$ . Zwei Sonderfälle werden explizit behandelt: 1.  $L(y) = dy/dx$ , 2.  $L(y) = d^2y/dx^2$ . Ferner sollen  $y$  und  $z$  periodische Funktionen von  $x$  ohne konstantes Glied sein, die sich genähert durch endliche Fouriersche Reihen im Intervall  $\langle 0, 2\pi \rangle$  darstellen lassen. Ein numerisches Beispiel wird für die Auflösung der Gleichung  $d^2y/dx^2 = -4 \sin y$  gegeben. Die Ergebnisse stimmen befriedigend mit der strengen Lösung, einer von Jacobi stammenden Reihenentwicklung von  $y(x)$ , überein.

*K. Stumpf.*

**Knight, B. E.:** Extension of field of application of relaxation methods of computation. *Nature* **178**, 433—434 (1956).

Verf. schlägt vor, Systeme nichtlinearer partieller Differentialgleichungen nach der Relaxationsmethode zu lösen. Er skizziert für ein Beispiel ein einfaches Relaxationsschema, das sich leicht für Rechenautomaten programmieren läßt. — In der nachfolgenden Stellungnahme zu diesem „Brief an die Herausgeber“ bezweifelt D. N. de G. Allen unter Hinweis auf Erfahrungen die Konvergenz und Zweckmäßigkeit eines solchen Verfahrens, das wesentlich ohne persönliche Beurteilung und Intuition arbeitet; er kündigt jedoch einen Bericht über eigene Versuche zur Automatisierung des Relaxationsverfahrens für lineare Probleme an. *F. Wecken.*

**Todd, John:** A direct approach to the problem of stability in the numerical solution of partial differential equations. *Commun. pure appl. Math.* **9**, 597—612 (1956).

Löst man Rand- und Anfangswertprobleme partieller Differentialgleichungen näherungsweise mit Hilfe des Differenzenverfahrens, so tritt das Problem der Stabilität auf; man muß sich fragen, ob sich nicht kleine Fehler bei Beginn der Rechnung schließlich so häufen, daß das Ergebnis unbrauchbar wird. Verf. untersucht diese Frage für Anfangs-Randwertprobleme der Wärmeleitungsgleichung in ein und zwei Dimensionen, der Differentialgleichung der schwingenden Saite und des schwingenden Stabes. Mit Hilfe der Eigenschaften spezieller Matrizen, die bei der Lösung



der den Differentialgleichungen durch das Differenzenverfahren zugeordneten linearen Gleichungssysteme auftreten, läßt sich die Frage nach der Stabilität für die oben genannten Probleme beantworten. Es zeigt sich, daß durch geeignete Wahl des Verhältnisses der Maschenweiten stets Stabilität erreicht werden kann; z. T. stimmen die Forderungen mit denen überein, die für die Konvergenz der Lösung der Differenzengleichung nach der der Differentialgleichung gelten. Benutzt man ein Differenzenverfahren höherer Näherung, so ist die Methode u. U. für jedes Verhältnis der Maschenweiten stabil. Ein umfangreiches Literaturverzeichnis gestattet es dem Leser, sich genauer über dieses praktisch wichtige Gebiet zu informieren.

*A. Weigand.*

**Mitchell, A. R.:** Round-off errors in implicit finite difference methods. Quart. J. Mech. appl. Math. **9**, 111—121 (1956).

Wird zum Zwecke der Bestimmung von Näherungslösungen einer linearen partiellen Differentialgleichung dieselbe durch eine entsprechende Differenzengleichung ersetzt und dabei ein Parameter  $a$  eingeführt, so ergibt sich eine sogenannte implizite Differenzengleichung, z. B. bei dem parabolischen Typus  $z_{,x} = z_t$

$$a[\varphi_{j,k-1} - 2\varphi_{j,k} + \varphi_{j,k+1}] + (1-a)[\varphi_{j-1,k-1} - 2\varphi_{j-1,k} + \varphi_{j-1,k+1}] = [\varphi_{j,k} - \varphi_{j-1,k}](\Delta x)^2/\Delta t.$$
 Bei der Behandlung von Randwertaufgaben mit Differenzengleichungen dieser Art interessiert das Verhalten der Rundungsfehler in Abhängigkeit von  $a$  und  $s = (\Delta x)^2/\Delta t$ . Wird Stabilität für jedes  $s$  gefordert, so werden die Rundungsfehler am kleinsten, wenn  $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ . Entsprechende Untersuchungen über das Verhalten der Rundungsfehler werden bei dem hyperbolischen Typus  $z_{xx} = z_{tt}$  für die asymmetrische implizite Differenzengleichung

$$a[\varphi_{j,k-1} - 2\varphi_{j,k} + \varphi_{j,k+1}] + (1-a)[\varphi_{j-1,k-1} - 2\varphi_{j-1,k} + \varphi_{j-1,k+1}] = [\varphi_{j,k} - 2\varphi_{j-1,k} + \varphi_{j-2,k}](\Delta x/\Delta t)^2$$

und die symmetrische implizite Differenzengleichung

$$a[\varphi_{j,k-1} - 2\varphi_{j,k} + \varphi_{j,k+1}] + (1-2a)[\varphi_{j-1,k-1} - 2\varphi_{j-1,k} + \varphi_{j-1,k+1}] + a[\varphi_{j-2,k-1} - 2\varphi_{j-2,k} + \varphi_{j-2,k+1}] = [\varphi_{j,k} - 2\varphi_{j-1,k} + \varphi_{j-2,k}](\Delta x/\Delta t)^2$$

angestellt.

*W. Quade.*

**Grossman, D. P.:** On the solution of the first boundary problem for elliptical equations by means of nets. Doklady Akad. Nauk SSSR **106**, 770—772 (1956) [Russisch].

Die erste Randwertaufgabe für elliptische Differentialgleichungen reduziert sich bei Verwendung der Netzmethode auf die Lösung eines Systems linearer algebraischer Gleichungen. Verf. untersucht die Schnelligkeit der Konvergenz bei iterativer Lösung dieses Gleichungssystems in Abhängigkeit von der Numerierung der Gitterpunkte und stellt Sätze auf, von denen einige, wie er selbst angibt, bereits von D. Young (dies. Zbl. **55**, 357) bewiesen sind.

*W. Schulz.*

**Weinberger, H.:** Upper and lower bounds for eigenvalues by finite difference methods. Commun. pure appl. Math. **9**, 613—623 (1956).

Es sei  $\lambda_1$  der kleinste Eigenwert von  $\Delta u + \lambda u = 0$  in einem beschränkten Bereich  $R$  der  $(x, y)$ -Ebene mit  $u = 0$  auf dem Rande  $\Gamma$  von  $R$ ; in einem quadratischen Gitter der Seitenlänge  $h$  sei  $R_h$  der (aus Quadraten zusammengesetzte) Gitterbereich, der nicht nur  $R$  enthält, sondern auch noch einen „Streifen“ der linken und unteren Nachbarquadrate. Das gewöhnliche Differenzenverfahren für den Bereich  $R_h$  liefert als kleinsten Näherungswert  $\lambda^{(h)}$ ; dann gilt  $\lambda^{(h)} \leq \lambda^{(h/2)} \leq \lambda_1$ . Wird nur  $\lambda^{(h)}$  berechnet, so kann  $\lambda^{(h/2)}$  aus  $\lambda^{(h)}$  abgeschätzt und so die untere Schranke für  $\lambda_1$  verbessert werden. Polya (dies. Zbl. **47**, 366) gab eine obere Schranke  $\bar{\mu}^{(h)}$  für  $\lambda_1$ , indem er für einen Gitterbereich  $\bar{R}_h$  (der ganz in  $R + \Gamma$  liegt) ein besonderes Differenzenverfahren aufstellte. Ist  $\lambda^{(h)}$  der gewöhnliche (kleinste) Differenzeigenwert für den Bereich  $\bar{R}_h$ , so gilt  $\lambda_1 \leq \lambda^{(h)}/(1 - 3h^2\lambda^{(h)})$  (der Nenner muß  $> 0$

sein). Die Beweise werden erbracht durch Einsetzen passender Vergleichsfunktionen in die Minimalausdrücke für  $\lambda_1$  und für die Differenzeigenwerte. In gewissen Fällen kann man durch Lösung einer einzigen Differenzen-Eigenwertaufgabe zu beliebig engen unteren und oberen Schranken für  $\lambda_1$  kommen. *L. Collatz.*

**Royster, W. C. and S. D. Conte:** Convergence of finite difference solutions to a solution of the equation of the vibrating rod. *Proc. Amer. math. Soc.* **7**, 742–749 (1956).

Die Gleichung für die Transversalschwingungen eines homogenen Stabes  $\partial^4 U / \partial x^4 + \partial^2 U / \partial t^2 = 0$  mit den Randbedingungen  $U(0, t) = U(1, t) = U_{xx}(0, t) = U_{xx}(1, t) = 0$  für  $t \geq 0$  und den Anfangsbedingungen  $U(x, 0) = f(x)$ ,  $U_t(x, 0) = 0$  für  $0 < x < 1$ , die die exakte Lösung

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx \right) \sin n\pi x \cos n^2 \pi^2 t$$

besitzt, wird ersetzt durch die Differenzengleichung

$$V(x, t + \Delta t) - 2V(x, t) + V(x, t - \Delta t) = -r^2 [V(x + 2\Delta x, t) - 4V(x + \Delta x, t) + 6V(x, t) - 4V(x - \Delta x, t) + V(x - 2\Delta x, t)],$$

wo  $r = \Delta t / (\Delta x)^2$  ist. Rand- und Anfangsbedingungen entsprechen den obigen. Aus der Differenzengleichung kann man die Werte von  $V$  längs der Maschenlinie  $t + \Delta t$  berechnen, wenn man die Werte längs der Linien  $t$  und  $t - \Delta t$  kennt. Die exakte Lösung der Differenzengleichung für den Fall, daß das Intervall  $0 \leq x \leq 1$  in  $M$  gleiche Teile der Länge  $\Delta x = 1/M$  geteilt ist, ist bei festem  $r$

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \cos \left\{ \frac{t M^2}{r} \arccos \left( 1 - 8r^2 \sin^4 \frac{n\pi}{2M} \right) \right\}$$

mit willkürlichen Konstanten  $b_n$ . *L. Collatz* bewies (dies. Zbl. **44**, 131) die Stabilität des Differenzenverfahrens für festes  $r \leq 1/2$ . Verf. zeigt die Konvergenz der Lösung der Differenzengleichung gegen die Lösung der Differentialgleichung bei geeigneter Wahl der  $b_n$  für beliebiges festes  $r > 0$ , wenn  $M \rightarrow \infty$  geht. Analoge Konvergenzbetrachtungen werden ferner angestellt, wenn die obige Differentialgleichung durch

$$\Delta_x^2 U(x, t) + (r^2/4) \Delta_x^4 [U(x, t + \Delta t) + 2U(x, t) + U(x, t - \Delta t)] = 0$$

ersetzt wird, wo  $\Delta_x^4$  und  $\Delta_t^2$  die 4. bzw. 2. zentralen Differenzen in bezug auf  $x$  bzw.  $t$  bezeichnen. *W. Schulz.*

**Schopf, Andreas:** Sur une méthode aux différences pour l'opérateur  $\Delta \Delta$ . *C. r. Acad. Sci., Paris* **242**, 1674–1677 (1956).

Verf. überträgt eine von *Polya* (dies. Zbl. **47**, 366) für  $\Delta u + \lambda u = 0$  aufgestellte Methode auf die Gleichung der schwingenden Platte  $\Delta \Delta u = \lambda u$  mit eingespannten oder frei aufliegenden Rändern. Die Platte wird mit einem quadratischen Gitter der Maschenweite  $h$  bedeckt; es wird mit dem Ansatz  $\sum_i \xi_i \Phi_i$  in den Minimal-

ausdruck für den ersten Eigenwert  $\lambda_1$  eingegangen, wobei  $\xi_i$  freie Parameter und  $\Phi_i$  Funktionen sind, die jeweils in 9 Gitterquadraten (die in einem Quadrat der Seitenlänge  $3h$  liegen)  $\neq 0$  und sonst  $= 0$  sind und überall stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung haben. Man erhält dann kompliziertere Differenzengleichungen (lineare Gleichungen in den  $\xi_i$ ) als sonst, kann aber jetzt aussagen, daß der erhaltene Näherungswert  $\lambda$  eine obere Schranke für  $\lambda_1$  ist. Analoges Vorgehen bei einer Einzellast für eine Platte, wenn die Durchbiegung an der Laststelle gesucht ist. *L. Collatz.*

**Batschelet, Eduard und Franz Grün:** Numerische Behandlung der Diffusionsgleichung mit Konvektionsterm. *Z. angew. Math. Phys.* **7**, 113–120 (1956).

Die partielle Differentialgleichung elliptischen Typs für ein Diffusionsproblem mit Konvektion wird numerisch dadurch behandelt, daß die Differentialgleichung durch Differenzengleichungen ersetzt und diese exakt gelöst werden unter Anpassung

der Randbedingungen. Hierdurch werden die bei iterativer Behandlung der Differenzgleichungen auftretenden Konvergenzschwierigkeiten vermieden. Auch der Weg einer Fehlerabschätzung wird skizziert. *R. Zurmühl.*

**Douglas jr., Jim and H. H. Rachford jr.:** On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. Trans. Amer. math. Soc. 82, 421—439 (1956).

Un metodo implicito alle differenze viene usato per risolvere problemi non stazionari di conduzione del calore in due o tre variabili locali (problemi parabolici). — La stabilità e conseguentemente la convergenza del procedimento alle differenze nel caso bidimensionale (tridimensionale) sono dimostrate per un campo quadrato (cubico)  $Q$ , nell'ipotesi che i dati al contorno del primitivo problema differenziale assicurino in  $Q$  per la soluzione l'esistenza di derivate limitate del quarto ordine rispetto alle variabili locali e del secondo ordine rispetto al tempo. I teoremi vengono estesi, nel caso bidimensionale, a domini chiusi e connessi assai più generali del campo rettangolare; tale estensione è affermata anche per il caso tridimensionale. Il procedimento è applicato a risolvere anche problemi stazionari di conduzione del calore (problemi ellittici). Per questi problemi vengono caratterizzate le particolari successioni del parametro (la maglia temporale) atte ad assicurare la convergenza del procedimento. *G. Sestini.*

**Flemming D. P.:** An iterative method for Taylor expansion of rational functions, and applications. Math. Tables Aids Comput. 10, 120—130 (1956).

Die Koeffizienten  $c_k$  in der Taylorentwicklung der rationalen Funktion  $p(s)/q(s) = c_0 + c_1(s-a) + c_2(s-a)^2 + \dots$  mit  $q(a) \neq 0$  können zur rekursiven Berechnung durch  $c_j = p_j(a)/q(a)$ ,  $\Phi_{j+1}(s) = p_j(s) - c_j q(s)$ ,  $p_{j+1}(s) = \Phi_{j+1}(s)(s-a)^{-1}$  bestimmt werden. Auf ähnliche Weise gelingt die Koeffizientenbestimmung in der Partialbruchzerlegung von  $p(s)/q(s)$  rekursiv. Als Anwendung wird unter anderem die Umkehrung der Laplacetransformation bei einfachen und mehrfachen Polen einer rationalen Bildfunktion, einerseits durch Partialbruchentwicklung und andererseits durch Taylorentwicklung in der Umgebung des unendlich fernen Punktes skizziert. Die Diskussion des Fehlers, der durch Abbrechen der Reihe bzw. der Partialbruchentwicklung entsteht, sowie des Abrundungsfehlers folgt. *F. Selig.*

**Plainevaux, J. E.:** Zur graphischen Konstruktion von rationalen Polynomen. Z. angew. Math. Mech. 36, 78 (1956).

**Hammer, P. C., O. J. Marlowe and A. H. Stroud:** Numerical integration over simplexes and cones. Math. Tables Aids Comput. 10, 130—137 (1956).

**Hammer, Preston C. and Arthur H. Stroud:** Numerical integration over simplexes. Math. Tables Aids Comput. 10, 137—139 (1956).

Development of numerical integration formulae for simplexes, special cones, and cones in  $n$ -spaces after affine transformations and based on orthogonal polynomials with a weight function  $x^n$ . With  $m^n$  points a formula valid for all  $(2m-1)$ -degree polynomials over a simplex in  $n$ -space can be obtained. For  $n=0$  the Gauss integration formulae are resulting. An integration formula over a triangle, exact for 7th degree polynomials, is also given. Coefficients for formulae using 4 or 5 points have been calculated ( $n=1, 2, 3$ ) with a 18-digit floating decimal board. — Generalisations extensions of affinely symmetric formulae are considered. *E. J. Nyström.*

**Goodwin, E. T.:** Note on the computation of certain highly oscillatory integrals. Math. Tables Aids Comput. 10, 96—100 (1956).

● **Favier, Jean et Robert Thomelin:** La mécanographie. Machines à calculer. Machines comptables. Machines à cartes perforées, électromécaniques et électroniques. 3. éd., revue et augmentée. (Les collections de Montligeon.) La Chapelle-Montligeon: Les Editions de Montligeon 1956. 293 p.

Die Verff. geben eine umfassende Darstellung der historischen Entwicklung und eine ausführliche Beschreibung der mechanischen Rechen-Hilfsmittel, von den ersten



primitiven Anfängen (Benutzung der Finger zur Darstellung der Zahlen bis zu 9999 durch die Ägypter) bis zu den modernen Lochkarten-Maschinen. Automatische Rechenmaschinen aller hauptsächlichen Typen werden im Hinblick auf ihre wesentlichen Eigenschaften und ihre Leistungsfähigkeit beschrieben. Zahlreiche Abbildungen und Zeichnungen erleichtern das Verständnis. Die modernsten in diesem Buche beschriebenen Lochkarten-Maschinen sind die den I. B. M.-Typen 650 und 705 entsprechenden Maschinen. Auch die elektrischen Rechenmaschinen konventioneller Art werden gebührend berücksichtigt. Die vielseitigen Anwendungsmöglichkeiten der modernen Rechenmaschinen werden an entsprechenden Beispielen gezeigt. Im ganzen legt der Bericht mehr Gewicht auf die Darstellung der Entwicklung und die Beschreibung der entsprechenden Maschinen in großen Zügen, als auf eine erschöpfende Erläuterung aller Einzelheiten.

*E. Rabe.*

● **Wilkes, M. V.: Automatic digital computers.** London: Methuen & Co. Ltd. 1956. X, 305 p. 42 s. net.

Das vorliegende Buch ist sowohl für jene bestimmt, die sich für die Konstruktion der Rechenautomaten interessieren, wie für die, die mit ihnen arbeiten müssen. Zunächst wird in einer Einleitung die historische Entwicklung der Automaten gezeigt; sie beginnt mit den Arbeiten von Babagge, spricht dann weiter von dem Automatic Sequence Controlled Calculator von Aiken, dem ENIAC von Eckert und Mauchly und dem EDVAC; sodann wird zu den modernen Konstruktionen übergegangen. Hier wird der Leser mit der Konstruktion moderner Automaten vertraut gemacht, die zwar im allgemeinen Grundprinzip sich nicht wesentlich unterscheiden, wenn sie auch im einzelnen verschieden sind. Dabei wird in der Hauptsache auf den vom Verf. selbst gebauten EDSAC Bezug genommen. Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit Programmierung. Hier wird vom Aufbau der Rechenprogramme gesprochen, dem Einbau von Unterprogrammen, der bibliothekarischen Aufbewahrung solcher Unterprogramme, den verschiedenen Arten von Adressen usw. Weiter werden die Relaisrechner behandelt, sowohl die Maschinen von Bell wie die Havard-Rechner. Eingehend werden weiter die verschiedenen Arten von Speicherung geschildert (Ultraschall-Speicher, Quecksilbertanks, elektrostatische Speicherung, insbesondere die Speicher von Williams und Killburn, Magnetspeicher, insbesondere die magnetischen Trommelspeicher, ferner Ferritspeicher usw.). Es folgt ein Abschnitt, der sich insbesondere mit Schaltalgebra beschäftigt und ihrer Anwendung sowohl im Dual- wie im Dezimalsystem. Das letzte Kapitel endlich diskutiert verschiedene Faktoren, die beim Aufbau eines Rechenzentrums, sei es nun für wissenschaftliche Rechnungen, Rechnungen für Geschäftszwecke, Kontrolle von Industrieprozessen usw. zu berücksichtigen sind. Schließlich beschäftigt sich ein Anhang mit der Frage inwieweit es berechtigt ist, die Rechenautomaten als denkende Maschinen zu bezeichnen. Ein ausführliches Schriftverzeichnis schließt das Buch.

*Fr.-A. Willers.*

● **Korn, Granino A. and Theresa M. Korn: Electronic analog computers (D—c analog computers).** 2 ed. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company. Inc. 1956. XIV, 452 p. \$ 7,50.

Die 2. Auflage unterscheidet sich von der in dies. Zbl. 49, 93 besprochenen 1. Fassung durch die Aufnahme einiger neuer Abschnitte, welche die in der Zwischenzeit erfolgte Entwicklung der Technik berücksichtigen. Nach wie vor befaßt sich das Buch fast ausschließlich mit Integrieranlagen (differential analyzers). Die neuen Abschnitte behandeln: Lösung simultaner Gleichungen mit Integrieranlagen; Berücksichtigung von Zufallsvorgängen; gewisse partielle Differentialgleichungen; Fehlerbetrachtungen; einige neue elektrische Schaltungen; die automatische Programmierung von Integrieranlagen; Vermehrung der praktischen Beispiele. Ferner ist die in der Zwischenzeit erschienene Literatur berücksichtigt. Die Zusätze machen

das Buch noch in vermehrtem Maße zu einem wertvollen Hilfsmittel für die Benutzer von Integrieranlagen.

*Ambros Speiser.*

**Collatz, L., A. Meyer und W. Wetterling: Die Hamburger Integrieranlage „Integromat“.** Z. angew. Math. Mech. **36**, 234—235 (1956).

Kurzbeschreibung einer Integrieranlage mit 18 Integratoren, die zu den digital arbeitenden Analogrechenmaschinen zählt, bei denen die einzelnen Größen durch Impulsfolgen verschiedener Folgefrequenz dargestellt werden. Die Anlage enthält 18 Funktionstriebwerke, 6 Summentriebwerke, 8 Untersetzer, 1 Muttersender und 4 Tochttersender sowie das Schreibwerk. Kurze Erläuterung der einzelnen Bausteine. Zur Darstellung der Wirkungsweise als Beispiele: Die Bildung eines unbestimmten Integrals und die Berechnung der Eigenschwingungen 1. bis 3. Ordnung eines im Bau befindlichen Motorschiffes mit einer Genauigkeit von einigen  $\frac{0}{100}$ . Bearbeitet wurden bisher Probleme des Schiffsbaues, der Rundfunktechnik und der theoretischen Physik.

*W. Breitling.*

**Jaspen, Nathan: Machine computation of higher moments.** J. Amer. statist. Assoc. **51**, 489—500 (1956).

This paper describes the proper and most efficient use of the IBM Accounting Machine Type 402 for certain statistical computations. The machine features which are most essential for these computations are: progressive summation, total transfer, and the special program device. The report is illustrated by tables and by two drawings of the properly wired control panels. The method exploits fully the capacities of the IBM Type 402 Machine, while on more advanced models like the IBM Type 407 the number of card runs can be reduced and the speed accordingly increased.

*E. Rabe.*

**Bareiss, Erwin H.: Berechnung der Kern-Reaktoren am David W. Taylor Model Basin.** Z. angew. Math. Mech. **36**, 244—245 (1956).

● **Ajzerman, M. A.: Vorlesungen über die Theorie der automatischen Regelung.** Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 428 S. R. 12,10 [Russisch].

Das vorliegende Buch ist das Ergebnis einer mehr als 10-jährigen Vorlesungspraxis. Es ist mit außerordentlichem pädagogischem Geschick zusammengestellt und bringt einen Abriß der Regelungstheorie, der als Einführung in die modernen Verfahren besonders geeignet erscheint. Im Rahmen des Lehrbuches sollte und konnte keine Vollständigkeit angestrebt werden; dennoch ist durch die geschickte Auswahl der wichtigsten Teilgebiete der Regelungstheorie ein ausgezeichnete Überblick entstanden, und stellenweise reicht die Darstellung sogar bis an die neuesten Forschungsergebnisse heran. Historischer Ballast — sowohl im Aufbau des Stoffes, als auch bezüglich der Nennung von Quellen und Bearbeitern — wurde weitgehend vermieden. Allerdings findet sich am Schluß ein ausführliches Schrifttumsverzeichnis. Das Buch ist in die folgenden 5 Kapitel und einen Anhang eingeteilt: 1. Allgemeine Einführung über automatische Regler. 2. Die Gewinnung der Ausgangsdaten zur Berechnung von Regelkreisen. 3. Die Stabilität von Regelkreisen. 4. Konstruktion und Beurteilung von Regelvorgängen in linearisierten Systemen. 5. Selbsterregte und erzwungene Schwingungen in nichtlinearen Regelkreisen. Anhang 1: Laplace- und Fourier-Transformationen und ihre Anwendung zur Integration linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Anhang 2: Tabellen einiger im Text gebrauchter Funktionen. Entsprechend der Zielsetzung ist der einleitende praktische Teil kurz gehalten. Dafür findet man in den folgenden Kapiteln manche Themen wohl zum ersten Male in lehrbuchmäßiger Darstellung, z. B. Fragen zum Problem der Strukturstabilität, gewisse Überlegungen über die Brauchbarkeit von Untersuchungen an linearen Modellen und Berechnungen von Systemen mit mehreren nichtlinearen Kennlinien. Daneben sind viele praktisch wertvolle Hinweise aufgenommen worden, z. B. ein vielfach zweckmäßiges Verfahren zur Bestimmung der Wurzeln von charak-

teristischen Gleichungen und graphische Verfahren zur Ermittlung der Übergangsfunktionen. Auch in dem Abschnitt über Stabilitätsuntersuchungen ist besonderer Wert auf die Darstellung praktisch brauchbarer Verfahren gelegt worden. Die in der Sowjetunion viel verwendete  $D$ -Zerlegung wird ausführlich besprochen und u. a. mit ihrer Hilfe ein Beweis für die Hurwitzschen Kriterien gebracht. Selbstverständlich fehlen auch nicht die verschiedenen Verfahren zur Abschätzung der Regelgüte und die von den Praktikern stark bevorzugten logarithmischen Frequenzcharakteristiken. Von den zahlreichen in der Sowjetunion im Laufe der letzten Jahre herausgebrachten Büchern zur Regelungstheorie dürfte das vorliegende eines der besten sein.

*K. Magnus.*

● **Hahn, Wolfgang** (zusammengestellt von): **Nichtlineare Regelungsvorgänge. Vorträge, gehalten bei einer Tagung des Fachausschusses Regelungsmathematik der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Darmstadt am 8. September 1955.** (Beihefte zur Regelungstechnik.) München: Verlag R. Oldenbourg 1956. 107 S. mit 67 Bildern. Hlw. DM 14.—.

Zur Behandlung nichtlinearer Regelungsprobleme ist man in den meisten Fällen auf irgendwelche Näherungsmethoden angewiesen. Sehr gut bewährt hat sich ein Verfahren von Krylov und Bogoljubov, das auch unter dem Namen „Methode der Harmonischen Balance“ bekannt ist, bei dem ein System von Differentialgleichungen  $\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  durch ein lineares System  $\dot{x}_i = \sum a_{iv} x_v + a_{iv}^* \dot{x}_v$  ersetzt wird; die Koeffizienten  $a_{iv}$  und  $a_{iv}^*$  findet man durch Anwendung einer Integraltransformation unter alleiniger Berücksichtigung der Grundharmonischen. Zur Untersuchung der Stabilität wird die Routh-Hurwitzsche Determinante herangezogen; da aber die Koeffizienten  $a_{iv}$ ,  $a_{iv}^*$  von der Amplitude der Schwingung, also von einem Parameter abhängen, beschreiben sie im Raum der Koeffizienten eine Bahn, die u. U. die durch die Hurwitz-Determinante definierte Fläche schneidet. Dabei entstehen dann die verschiedensten Stabilitätsfälle. Wendet man nicht das Hurwitz-Kriterium an, sondern benutzt eine Abwandlung des Ortskurvenverfahrens (Übergangsfunktion), so kommt man zur Methode der Beschreibungsfunktion, die vorwiegend im englisch-sprachigen Schrifttum gebraucht wird. Eine ganz andere Art zur Untersuchung der Stabilität eines nichtlinearen Systems ist die Anwendung der zweiten Methode von Ljapunov, die nicht mehr auf ein Ersatzsystem angewiesen ist. Zu einem System von Differentialgleichungen 1. Ordnung muß man eine geeignete positiv definite „Trägerfunktion“  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  bestimmen, daraus  $\dot{V} = \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i$  unter Berücksichtigung der Differentialgleichungen errechnen; aus dem Verhalten dieser Funktion kann man dann Schlüsse auf die Stabilität des Systems ziehen. Nach dieser Methode sind von sowjetischen Autoren Regelsysteme untersucht, deren Nichtlinearitäten sich linear abschätzen lassen. Ferner hat man sich mit der Abschätzung des Stabilitätsbereiches der Parameter beschäftigt, was kurz angedeutet wird, und auch Fragen der Regelgüte sind mit dieser Methode zu behandeln. Mehrere Beispiele erläutern die in den bisherigen Vorträgen beschriebenen Methoden. Darüber hinaus wird aber in einem weiteren Vortrag die Methode der harmonischen Balance und die Ljapunovsche Methode auf ein und dasselbe Beispiel, nämlich auf die Untersuchung der Stabilität des Fluges eines Geschosses mit Antrieb angewandt, wobei die durch die Querruderbewegung hervorgerufenen, von der Längsneigung  $\vartheta$  und deren zeitlicher Änderung abhängige Steuerkraft nichtlinear sein soll. Benutzt wird aber hierbei nicht das Hurwitz-Kriterium, sondern es werden die Ortskurven des Frequenzganges herangezogen. Ein weiteres Regelsystem, das Übertragungsglieder mit schleifenartiger Kennlinie (z. B. Lose in einem Relais) enthält, wird in dem letzten Vortrag exakt untersucht, nachdem es auch schon zuvor mit der Näherungsmethode von Krylov-Bogoljubov behandelt war. Nach einer



Orientierung des Bewegungsablaufes in der Phasenebene folgt die rechnerische Bestimmung periodischer Lösungen, eine Stabilitätsuntersuchung, wobei man drei Bewegungsarten unterscheiden muß. Nach ähnlichem Muster lassen sich weitere Probleme, allerdings in individueller Einzelarbeit, erledigen. — Es sei noch bemerkt, daß ein Teil der Vorträge dieser im September 1955 abgehaltenen Regelungsstagung auch bereits in anderen Veröffentlichungen dargestellt ist (vgl. dies. Zbl. 66, 71). Der auf der Tagung gehaltene einleitende Vortrag von G. Doetsch „Stabilitätsuntersuchung auf Grund der Laplace-Transformation in exakter Behandlung“ ist aus diesem Grunde in diesem Beiheft nicht wiedergegeben. Inhaltsverzeichnis: K. Magnus: Das A-Kurven-Verfahren zur Berechnung nichtlinearer Regelvorgänge. S. 9—28. J. M. L. Janssen und J. C. Vermeulen: Behandlung von Regelproblemen mit Hysterese und Reibung nach der Methode der Beschreibungsfunktion. S. 29—50. W. Hahn: Behandlung zweier Stabilitätsprobleme mit der zweiten Methode von Ljapunov. S. 51—66. E. Pestel: Anwendung der Ljapunovschen Methode und des Verfahrens von Krylov-Bogoljubov auf ein technisches Beispiel. S. 67—85. W. Haacke: Untersuchung eines nichtlinearen Regelkreises in einer mehrblättrigen Phasenebene. S. 86—107. *H. Molitz.*

**Erismann, Th.:** Kugelgetriebe — neue Anwendungen in Rechen- und Regeltechnik. Z. angew. Math. Mech. 36, 276—278 (1956).

**Hamilton, H. J.:** Uniform circular motion is singular. Amer. math. Monthly 63, 109—111 (1956).

**Moisil, Gr. C.:** Utilisation des logiques trivalentes dans la théorie des mécanismes automatiques. II. Équation caractéristique d'un relais polarisé. Comun. Acad. Republ. popul. Romîne 6, 231—234, russ. u. französ. Zusammenfassg. 233 (1956) [Rumänisch].

L'A. écrit les relations entre le courant (en tenant compte du sens du courant) et la position du contact (qui est à trois positions) dans le cas d'un relais polarisé, à l'aide de la logique trivalente. *Autoreferat.*

**Popovici, Constantin P.:** Sur la théorie algebrique du elignoteur. Comun. Acad. Republ. popul. Romîne 6, 245—252, russ. u. französ. Zusammenfassg. 252 (1956) [Rumänisch].

L'A. donne une nouvelle méthode pour former les équations de récurrence du fonctionnement des elignoteurs en employant l'algèbre de Boole. *Autoreferat.*

**Decker, James L.:** The human pilot and the high-speed airplane. J. aeronaut. Sci. 23, 765—770 (1956).

A first tentative attack on the problem of human dynamics as it affects the high-speed airplane in short period pitching oscillations. Consider a pilot who, while flying, senses certain physical displacements and accelerations and attempts to annihilate them by suitable control displacements. There will be a finite time delay between the instant the disturbance is generated and the instant the pilot initiates his movement. This is the pilot reaction time, for which a series of tests provided 0,25 sec as a typical value. There is further a muscular lag time defined as the time to achieve  $(e - 1)/e = 0,634$  of the intended final displacement, measured from the inception of the motion, i. e. from the end of the reaction time. A typical value for it is 0,125 sec. — The flight path attitude  $\gamma$  is chosen as sensory cue to which the pilot responds and the pilot reaction  $P_R$  may be evidenced as a control force which is linearly dependent of  $\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}$  (time derivatives). A synthetic feel system providing a control feel force proportional to elevator deflection  $\delta$ , employed in conjunction with a power operated elevator control, is assumed. Together with this idealized control system and with this  $P_R$  the airplane equations for the short period motion are analyzed leading to the total pilot transfer function

$$\delta/\gamma = e^{-0.25s} (K + K_1 s + K_2 s^2) / (0,125 s + 1)$$

( $s$  is the Laplace transform variable). The coefficients  $K, K_1, K_2$  are determined by geometry, dynamics and aerodynamics of the airplane, using the reasonable assumptions that the pilot aims for a critically damped motion and that, in correcting for a load factor disturbance, he will deflect the elevator in a manner equal and opposite to the deflection required to generate an equal load factor in an intentional pull-up. — Theory is applied to two airplanes with given transfer functions for the control system and the hydraulic boost servo. Both airplanes have the same aerodynamic parameters and are flying at the same speed and altitude, but the second airplane is assumed to have only  $1/3$  the scale of the first one with regard to external dimensions. Nyquist plots of the open loop transfer function are given for both airplanes for various static margins, showing the deleterious effects of shortening the aircraft period and reducing aircraft size. Periods of the order of one second appear to become uncontrollable by the human pilot.

H. Behrbohm.

**Salzer, Herbert E.: Coefficients for complex osculatory interpolation over a cartesian grid.** J. Math. Physics **35**, 152—163 (1956).

Die Arbeit enthält achtstellige Tafeln zur Erleichterung der oskulatorischen Interpolation einer Funktion  $f(z)$  in einem Quadratgitter der komplexen Ebene, wenn die erste Ableitung  $f'(z)$  entweder, ebenso wie  $f(z)$ , tabuliert oder leicht zu berechnen ist. Es existieren zwar Koeffiziententafeln für die einfache Lagrangesche Interpolation, aber das oskulatorische Verfahren hat den Vorzug größerer Genauigkeit und man kann, besonders bei mathematisch definierten Funktionen, dieses mit einem weniger dichten Gitter durchführen.

E. J. Nyström.

**Allen, E. E.: Polynomial approximations to some modified Bessel functions.** Math. Tables Aids Comput. **10**, 162—164 (1956).

Die Approximation wurde so durchgeführt, daß 7 oder 8 sichere Stellen für alle positiven  $x$  angebar sind, daß im Intervall  $(0, x_r)$  und  $(x_r, \infty)$  die approximierenden Polynome  $P_n$  ungefähr gleichen Grad  $n$  haben und daß die Stellenzahl der Polynomkoeffizienten im ganzen Bereich ungefähr gleich (10) ist. Approximiert werden  $I_0(x)$  und  $I_1(x)/x$  in  $-3,75 \leq x \leq 3,75$  durch ein  $P_{12}$ ,  $I_0(x) x^{1/2} e^{-x}$  und  $I_1(x) x^{1/2} e^{-x}$  in  $3,75 \leq x < \infty$  durch ein  $P_8$ ,  $K_0(x) + \ln(0,5x) I_0(x)$  und  $(K_1(x) - \ln(0,5x) I_1(x)) x$  in  $0 < x \leq 2$  durch ein  $P_{12}$  sowie  $K_0(x) x^{1/2} e^x$  und  $K_1(x) x^{1/2} e^x$  in  $2 \leq x < \infty$  durch ein  $P_6$ . Das Maximum des absoluten Fehlers ist angegeben.

F. Selig.

● **Stratton, J. A., P.-M. Morse, L. J. Chu, J. D. C. Little and F. J. Corbató: Spheroidal wave functions including tables of separation constants and coefficients.** Technology Press of Massachusetts Institute of Technology; New York: John Wiley and Sons, Inc.; London: Chapman and Hall, Ltd. 1956. XIII, 613 p. \$ 12,50.

Eine Tabulierung der Sphäroidfunktionen selbst würde zu umfangreiche Tafeln geben. So hat man sich schon bisher, wie auch im vorliegenden Werk, meist damit begnügt, statt der Funktionen ihre Entwicklungskoeffizienten in Entwicklungen nach Kugel- oder Zylinderfunktionen anzugeben, was im Grunde nur heißt, daß man eine andere „Darstellung“ der Funktionen als die konventionelle wählt. Bei manchen Problemen genügt es, nur diese Koeffizienten zu kennen. In Fällen, wo man die numerischen Werte der Sphäroidfunktionen selbst braucht, benötigt man ergänzend zu den vorliegenden Tafeln noch solche der Bessel-Funktionen mit halbzahligem Index (der sogenannten „Kugel-Besselfunktionen“) und der Kugelfunktionen. — Die Differentialgleichung der Sphäroidfunktionen wird in folgender Form geschrieben:

$$(1) \quad \frac{d}{d\eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{dS}{d\eta} \right] + \left[ A - h^2 \eta^2 - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] S = 0$$

und es werden zwei Lösungen  $S_{ml}(h, \eta)$  in  $-1 \leq \eta \leq 1$  und  $j_{eml}(h, \eta)$  in  $1 \leq \eta < \infty$  definiert und als unendliche Reihen

$$(2) \quad S_{ml}(h, \eta) = \sum_n' d_n(h|m l) P_{m+n}''(\eta),$$

(3)  $j_{eml}(h, \eta) = (1 - \eta^{-2})^{m/2} \sum_n' a_n(h|m l) j_{n+m}(h \eta)$  angesetzt.  $j_{n+m}(h \eta)$  ist die

sogenannte Kugel-Besselfunktion,  $j_n(z) = (\pi/2z)^{1/2} J_{n+1/2}(z)$ . Die Normierung geschieht so, daß  $S_{ml}(h, \eta) \rightarrow P_l^m(\eta)$  für  $\eta \rightarrow 1$ ,  $j_{e_{ml}}(h, \eta) \rightarrow j_l(h, \eta)$  für  $\eta \rightarrow \infty$ . Der ganze Index  $l$  ist dadurch definiert, daß  $S_{ml}(h, \eta)$  endlich in  $\eta = \pm 1$  und  $\rightarrow P_l^m(\eta)$  für  $h^2$  (reell)  $\rightarrow 0$ . Die Tabellen geben auf jeweils 7 geltende Ziffern die Koeffizienten  $d_n$  und  $a_n$  für alle im Rahmen dieser Genauigkeit in Betracht kommenden Werte von  $n \geq 0$ , sowie (indirekt) die Werte des Separationsparameters  $A = A_{ml}$  für  $m = 0(1) 8$ ,  $l = m(1) 8$ ,  $h = 0(0,1) 1(0,2) 8$  und  $-ih = 0(0,1) 1(0,2) 8$ . Die reellen bzw. imaginären Werte von  $h$  führen zu den Funktionen des gestreckten bzw. abgeplatteten Rotationsellipsoids. — Zur Umrechnung in die Bezeichnungen von J. Meixner und F. W. Schäfke: Mathiesche Funktionen und Sphäroidfunktionen (Berlin 1954) seien folgende Beziehungen angegeben:  $S_{ml}(h, \eta) = \text{ps}_l^m(\eta; h^2)/A_l^{-m}(h^2)$ ,  $j_{e_{ml}}(h, \eta) = S_l^{m(1)}(\eta; h)$ ,  $A_{ml}(h) = \lambda_l^m(h^2) + h^2$ ,  $a_n(h|m l) = a_{l, n+m-l}^{-m}(h^2)/A_0^{-m}(h^2)$ ,  $d_n(h|m l) = i^{m+n-l} a_{l, n+m-l}^{-m}(h^2)/A_l^{-m}(h^2)$ , worin  $A_n^{-m}(h^2) = \sum_r (-1)^r a_{n, 2r}^{-m}(h^2)$  ist.  $A_n^{-m}(h^2)$  ist eine Normierungskonstante,

die in Meixner-Schäfke durch Gl. (14), S. 286 festgelegt ist, die aber auch beliebig gewählt werden kann, wenn man mit Hilfe der zitierten Gleichung alle Beziehungen homogen in den  $a_{l, 2r}^m$  schreibt. Es sei bemerkt, daß die  $d_n(h|m l)$  nicht wie auf S. 56 des Tabellenwerkes erwähnt, bei  $n = 0$  oder 1, sondern erst bei  $n = -2m$  oder  $-2m + 1$  nach links abbrechen. Diese zusätzlichen  $d_n$ -Werte sind nicht tabuliert, auch in (2) nicht notwendig, da die mit ihnen multiplizierten  $P_{m+n}^m(\eta)$  gleich Null sind. Indessen gibt es andere Entwicklungen, in denen man diese Koeffizienten nicht übersehen darf. — Die Tafeln wurden mit dem Whirlwind I am Massachusetts Institute of Technology berechnet und automatisch gedruckt. Stichproben, die der Referent, mehr zur eigenen Beruhigung, mit früher von ihm und seinen Mitarbeitern berechneten Koeffizienten durchführte, fielen positiv aus. Es besteht kein Zweifel, daß viele Probleme, deren Behandlung auf Sphäroidfunktionen führt, durch diese Tafeln erheblich erleichtert und vereinfacht werden.

J. Meixner.

• Belousov, S. L.: **Tafeln der normierten assoziierten Legendreschen Polynome.** (Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Energetisches G. M. Kržižanovskij-Institut.) Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1956. 380 S. R. 23,70 [Russisch].

Die Tafel enthält die auf sechs Dezimalstellen berechneten Funktionswerte der Polynome

$$\bar{P}_n^m(\cos \theta) = \sqrt{\frac{(n+\frac{1}{2})!}{(n-m)!}} P_n^m(\cos \theta) \quad \text{mit} \quad P_n^m(\cos \theta) = (\sin \theta)^m \frac{d^m P_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m}.$$

$P_n(x)$  ist das gewöhnliche Legendresche Polynom. Die Normierung ist so gewählt, daß  $\int_{-1}^{+1} (\bar{P}_n^m(x))^2 dx = 1$  ist. Die Tafel umfaßt den Bereich  $0 \leq m \leq 36$ ,  $m \leq n \leq 56$ ; das Intervall für  $\theta$  beträgt  $2,5^\circ$ . In der Einleitung findet man einige Formeln und eine kurze Ausführung über die Berechnung der Funktionswerte. W. Hahn.

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung:

• Onicescu, O., G. Mihoc und C. T. Ionescu Tulcea: **Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.** Bucureşti: Editura Academiei Republicii Populare Romine 1956. 787 S. Lei 26,30 [Rumänisch].

This volume is composed of three sections. Under a modern treatment, the first section deals with the so called classical part of the probability theory, where the probability field and the random variables defined on it are studied, for the finite



as well as for the infinite case. There are also examined sequences and series of random variables, mean values, independent random variables, the characteristic function and positive definite functions, sequences of events and stability, the law of large numbers, limit laws and the Gaussian law, infinitely divisible and  $\mathcal{L}$ -distributions, the problem of moments, ergodic theorems. Apart of items in strict connection with the probability theory, the first section contains a systematical treatment of the Lebesgue integral and of its properties and several notions of functional analysis concerning especially Banach spaces. The second section of this volume treats stochastic processes, constituting the vital and the most dynamical part of the probability theory directly connected with natural sciences, being in fact the main object of this treaty. The questions studied therein are concerned with Markov chains and ergodic problems, limit distributions of sums of random variables forming a Markov chain (the method of the characteristic function, asymptotical values for the two first moments, reduced limit laws for final and passage sets, extension of the Poisson law for Markov chains, limit laws for sums of random vectors forming a chain, the iteration problem), general stochastic processes (measures in product spaces, the extension theorem, measures in function spaces), random functions, ergodic properties of the stochastic processes, random mechanics (one-dimensional random movements, random movements in  $R^2$ , random dynamics, chains of discontinuous movements and state changes). We mention also that the second section contains an analytical treatment of different types of classical stochastic processes, especially pursuing the integrodifferential equations attached to the stochastic processes under consideration (the general case of a process with temporal derivatives, continuous stochastic processes with finitely many states, continuous stochastic processes with denumerably many states, Feller processes, processes in cascade and applications in biology and in the theory of cosmic radiation, continuous stochastic processes in  $R$  and  $R^n$ ). The third section of this volume refers to several applications which are very proper for a treatment with the help of stochastic processes. Thus the first application is concerned with statistical mechanics, where the special distribution laws for dynamical systems and an introduction of the probability theory in the classical statistical mechanics are examined. The second application is dealing with the mathematical statistics; there are studied classical statistical distributions, sampling theory, estimation theory, the theory of testing statistical hypotheses. The third application treats the demographical phenomena and insurance, considering problems concerning the mathematical theory of mortality, the mathematical theory of invalidity, the application of the mortality theory in insurance problems, the Taucer scheme and its generalisations. The fourth and last application refers to special problems concerning stellar dynamics. A rich bibliography is attached.

*R. Theodorescu.*

Kendall, M. G.: Studies in the history of probability and statistics. II. The beginnings of a probability calculus. *Biometrika* **43**, 1—14 (1956).

I s. dies. Zbl. **64**, 127.

Richter, H.: Zur Abschätzung von Erwartungswerten. *Z. angew. Math. Mech.* **36**, 266—268 (1956).

Wheeler, Ruric E.: A variable probability distribution function. *Ann. math. Statistics* **27**, 196—199 (1956).

Verf. leitet durch Lösung einer Differenzengleichung einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit  $P(n, x)$  dafür her, daß in  $n$  Versuchen  $x$  Treffer auftreten, wobei die Trefferwahrscheinlichkeit bei jedem Versuch sowohl von der Versuchsnummer als auch von der bis dahin erreichten Trefferanzahl abhängt. Als Spezialfälle ergeben sich hieraus die Polya-Verteilung und die Ergebnisse von Woodbury (dies. Zbl. **41**, 250).

*O. Ludwig.*

Laha, R. G.: On a characterization of the stable law with finite expectation. Ann. math. Statistics 27, 187—195 (1956).

Verf. beweist folgende Sätze: 1. Seien  $x, \xi$  und  $\eta$  drei Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten (Null o. B. d. A.), so daß  $x$  unabhängig von der Simultanverteilung von  $\xi$  und  $\eta$  verteilt ist, während bei der Simultanverteilung von  $\xi$  und  $\eta$  die Regression von  $\eta$  bez.  $\xi$  existiert, linear und durch  $E_\xi(\eta) = \beta_0 \xi$  gegeben ist. Dann ist die Regression von  $Y = c x + \eta$  bez.  $X = a x + \xi$  ( $a \neq 0$ ) stets linear, ohne Rücksicht auf die Verteilungsfunktion von  $x, \xi$  und  $\eta$ , wenn nur  $c = a \beta_0$  erfüllt ist. 2. Mit derselben Bezeichnung und unter denselben Bedingungen wie in Satz 1 ist notwendig und hinreichend für Linearität der Regression von  $Y$  bez.  $X$  für alle  $a$  aus einem abgeschlossenen Intervall  $(a_1, a_2)$  ( $a_1 < a_2 < 0$  oder  $0 < a_1 < a_2$ ) und ein  $c$  mit  $c \neq a \beta_0$  für alle  $a$  des Intervalls, daß  $x$  und  $\xi$  beide zur Klasse der stabilen Verteilungen mit endlichem Erwartungswert gehören. Satz 2 ist eine Verallgemeinerung sowohl der Lösung des Problems von Ragnar Frisch (vgl. C. R. Rao, dies. Zbl. 30, 39) als auch eines Satzes zur Charakterisierung der Normalverteilung (G. Darmois, dies. Zbl. 42, 373). Ein Beispiel zeigt, daß Satz 2 nicht gilt, wenn die Regression von  $Y$  bez.  $X$  nur für einen einzigen Punkt  $a$  linear ist.

O. Ludwig.

Morgenstern, Dietrich: Einfache Beispiele zweidimensionaler Verteilungen. Mittel.-Bl. math. Statistik 8, 234—235 (1956).

„Als Beispiele zweidimensionaler Verteilungen werden in vielen Lehrbüchern nur die Normalverteilungen geboten“. Deshalb gibt Verf. folgende Beispiele: I. In  $-1 \leq x, y \leq 1$  sei die Dichte  $f(x, y) = \frac{1}{4} (1 + \alpha x y)$ ,  $|\alpha| \leq 1$ . II. In der ganzen Ebene sei  $f(x, y) = \frac{1}{2} \pi^{-1} (1 + x^2 + y^2)^{-3/2}$ . Er gibt die einfachsten Eigenschaften dieser Verteilungen an. Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß diese Dichten nur Sonderfälle einer allgemeineren Klasse von Dichten sind, die Risser vielfach untersucht hat (s. z. B. dies. Zbl. 30, 39).

L. Schmetterer.

McFadden, J. A.: An approximation for the symmetric, quadrivariate normal integral. Biometrika 43, 206—207 (1956).

Die Simultanverteilung von vier Zufallsvariablen sei eine vierdimensionale Normalverteilung, bei der alle Elemente der Korrelationsmatrix außerhalb der Hauptdiagonale den gleichen Wert  $\varrho$  haben. Verf. findet für die Wahrscheinlichkeit  $P_4(\varrho)$  dafür, daß alle vier Variablen positiv sind, die Näherungsformel

$$P_4(\varrho) \cong \frac{1}{16} + 3\varphi/4\pi + \varphi^2(3 + 5\varphi)/4\pi^2(1 + \varphi)(1 + 2\varphi),$$

wobei  $\varrho = \sin \varphi$  ist ( $-\arcsin \frac{1}{2} \leq \varphi \leq \frac{1}{2} \pi$ ). Die Näherung ist sehr gut, wenn  $\varrho$  nicht zu nahe bei 1 liegt; sie liefert dann wesentlich genauere Werte als die vom Verf. früher (J. A. McFadden, dies. Zbl. 65, 112) gegebene.

O. Ludwig.

Wooding, R. A.: The multivariate distribution of complex normal variables. Biometrika 43, 212—215 (1956).

Es wird gezeigt, daß die Simultan-Verteilung  $N$  komplexer Variablen  $v_j = x_j + i y_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ), wenn die  $2N$  reellen Variablen  $x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N$  simultan normal verteilt sind mit

$$E(x_m x_n) = E(y_m y_n), \quad E(x_m y_n) = -E(x_n y_m), \quad E(x_j) = E(y_j) = 0,$$

von der der reellen Multinormalverteilung analogen Form

$$\pi^{-N} |L|^{-1} \exp(-V^* L^{-1} V)$$

ist, wobei  $L = E(V V^*)$  die Hermitesche Kovarianzmatrix der  $N$  komplexen Vektoren  $V = X + i Y$  bedeutet.

M. P. Geppert.

Haáz, I. B.: Une généralisation du théorème de Simmons. Acta Sci. math. 17, 41—44 (1956).

Sei  $p$  die konstante Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses einer Folge von  $n$  Versuchen; wir setzen, wie gewöhnlich,  $P_r = C_n^r p^r q^{n-r}$  und bezeichnen mit  $n_p$  die

kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich  $np$  ist. Sodann beweist der Verf. den folgenden Satz, der eine Erweiterung eines früher von Simmons bewiesenen Satzes ist:

$$\sum_{r=0}^{n_p} P_r > \sum_{s=n_p+1}^n P_s.$$

O. Onicescu.

Ludwig, Otto: Die Pascalsche Fragestellung für Merkmalsiterationen (runs). Z. angew. Math. Mech. **36**, 264—265 (1956).

Prékopa, András: On the convergence of series of independent random variables. Publ. math., Debrecen **4**, 410—417 (1956).

Let  $\xi_1, \xi_2, \dots$  be a sequence of independent random variables,  $\mathcal{T}$  the set of all finite subsets and  $\mathcal{S}$  the set of all subsets of natural numbers. Let  $\xi(A) = \sum_{k \in A} \xi_k$  provided the series on the right converges with probability 1 regardless of the order of summation and let  $F(x, A)$  be the distribution function and  $f(t, A)$  the characteristic function of the random variable  $\xi(A)$ . Suppose  $0 < \lambda < 1$ ;  $Q(\lambda)$  is a  $\lambda$ -quantile of a random variable  $\zeta$  if  $P(\zeta \leq Q(\lambda)) \geq \lambda$  and  $P(\zeta \geq Q(\lambda)) \geq 1 - \lambda$  and let  $Q(\lambda, A)$  be an arbitrary  $\lambda$ -quantile of the random variable  $\xi(A)$ . The author proves that if the set  $\{F(x, A), A \in \mathcal{T}\}$  is compact, the series  $(*) \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$  converges with probability 1 regardless of the order of summation and conversely, if the series  $(*)$  converges with probability 1 regardless of the order of summation, then the set  $\{F(x, A), A \in \mathcal{S}\}$  is compact. Using the function  $Q(\lambda, A)$  introduced above, the author proves also that if there exist two numbers  $\lambda_1, \lambda_2, 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ , such that the quantiles  $Q(\lambda_1, A)$  and  $Q(\lambda_2, A)$  can be chosen in such a manner that the sets  $Q_1 = \{Q(\lambda_1, A), A \in \mathcal{T}\}$  and  $Q_2 = \{Q(\lambda_2, A), A \in \mathcal{T}\}$  are bounded, then the series  $(*)$  converges with probability 1 regardless of the order of summation.

R. Theodorescu.

Hanš, O.: The strong law of large numbers for generalized random variables. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **4**, 15—17 (1956).

Die Werte der Zufallsvariablen  $S_n$  mögen in einem Banach-Raum  $B$  mit Basis liegen. Ihre Definition wird noch präzisiert, insbesondere durch die Forderung, daß „hinreichend viele  $S_n$ “ vorhanden sein sollen. Erwartungswerte werden durch Pettis-Integrale definiert. Dann wird behauptet, daß fast sicher  $S_n \rightarrow x \in B$  konvergiert, genau wenn:  $(*)$  für alle  $f \in B^*$  gilt:  $f(S_n) \rightarrow f(x)$  mit  $P = 1$ . Entsprechend ist  $S_n \rightarrow x$  äquivalent mit  $(*)$  und daß fast sicher  $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$  kompakt ist.

Als Spezialfälle ergeben sich notwendige und hinreichende Bedingungen für das starke Gesetz der großen Zahlen bei gleichverteilten unabhängigen derartigen Zufallsgrößen und eine Verallgemeinerung eines Satzes von Kolmogoroff, wonach aus  $E(X_n) = 0$  und  $\sum \text{Str.}(X_n) < \infty$  fast sichere Konvergenz von  $\sum X_n$  folgt, für diese verallgemeinerten Zufallsgrößen.

D. Morgenstern.

Baxter, Glen: A strong limit theorem for Gaussian processes. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 522—527 (1956).

Für einen Gaußschen Prozeß  $X(t)$  mit Kovarianzfunktion  $r(s, t) = E(X(s)X(t)) - m(s)m(t)$  ( $m(t) = E(X(t))$ ) wird durch Anwendung der Tschebyscheffschen Ungleichung und einfache Abschätzungen gezeigt, daß mit  $P = 1$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} \left[ X\left(\frac{k}{2^n}\right) - X\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \right]^2 = \int_0^1 f(t) dt.$$

Dabei ist  $f(t) = \lim_{s \rightarrow t+} \frac{r(t, t) - r(s, t)}{t - s} - \lim_{s \rightarrow t-} \frac{r(t, t) - r(s, t)}{t - s}$ . Für den Spezialfall des

Wienerschen Prozesses wurde dies Ergebnis erstmalig von P. Lévy bewiesen (dies. Zbl. **24**, 139). Weiterhin wird gezeigt, daß die Greenschen Funktionen gewisser gewöhnlicher Differentialgleichungen als Kovarianzfunktionen auftreten können.

D. Morgenstern.



**Schmid, Paul:** Sur les théorèmes asymptotiques de Kolmogoroff et Smirnov pour des fonctions de distribution discontinues. C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 349—352 (1956).

Ausdehnung der Grenzwertsätze von Kolmogoroff und Smirnow für die Limes-Verteilung (bei  $n \rightarrow \infty$ ) von  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_x |F_n^*(x) - F(x)|$  bzw. dem entsprechenden Ausdruck ohne Absolutstriche; dabei ist die empirische Verteilungsfunktion  $F_n^*$  durch  $n \cdot F_n^*(x) = \text{Anzahl der } [X_\nu \text{ } (\nu = 1, \dots, n) \leq x]$  definiert. Bisher wurde in dieser Problemklasse immer die gemeinsame kumulative Verteilungsfunktion der  $X_\nu$  als stetig vorausgesetzt. Durch die zugelassenen Unstetigkeiten (endlich oder abzählbar viele Sprungstellen) entstehen Grenzverteilungen, die von den Abszissen der Sprungstellen unabhängig sind, durch komplizierte Integrale definiert sind, und sich sowohl nach der Methode von Kolmogoroff als auch der von Doob-Donsker beweisen lassen sollen.

*D. Morgenstern.*

**Fraser, D. A. S.:** A vector form of the Wald-Wolfowitz-Hoeffding theorem. Ann. math. Statistics **27**, 540—543 (1956).

For each integer  $n > 0$ , let  $(C_{nt}(i, j))$  ( $t = 1, \dots, k$ ) be  $n \times n$  matrices of real numbers. Let  $(R_1, \dots, R_n)$  be a random permutation of  $(1, 2, \dots, n)$ . The author derives a necessary and sufficient condition for the limiting form of the joint distribution of normalized  $S_{nt} = \sum_{i=1}^n C_{nt}(i, R_i)$  to be  $k$ -variate normal.

*S. Vajda.*

**Blum, J. R. and Murray Rosenblatt:** A class of stationary processes and a central limit theorem. Proc. nat. Acad. Sci. USA **42**, 412—413 (1956).

Nach einer Korrektur des Satzes in der früheren Proc. Acad. Sci.-Abhandlung von Rosenblatt (dies. Zbl. **70**, 138) (in der zweiten Voraussetzung braucht nur  $O$  statt  $o$  zu stehen; die Mischungsbedingung soll für alle Mengen gelten, die durch Bedingungen für  $X_{k_1} X_{k_2} \dots X_{k_n}$  bestimmt sind), wird eine besondere Klasse stochastischer Prozesse angegeben, die aus der „shift“-Transformation im Raum abzählbarer unabhängiger gleichverteilter Zufallsgrößen hervorgehen; für sie gilt, wie an anderer Stelle genauer ausgeführt werden soll, asymptotische Normalverteilung der Partialsummen.

*D. Morgenstern.*

**Kanngiesser, W.:** Grenzwertsätze für verschwindende Übergangswahrscheinlichkeiten. I—III. Mittel.-Bl. math. Statistik **8**, 15—31, 141—153, 177—191 (1956).

In einer Markoffschen Kette  $X_\nu$  ( $\nu = 0, 1, \dots$ ) mit zwei Zuständen  $X_\nu = 0$ ,  $X_\nu = 1$  und Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ik} = P(X_{\nu+1} = i | X_\nu = k) \left( \sum_{i=0}^1 p_{ik} = 1 \right)$

betrachtet Verf. die zufälligen Größen  $N_n = \sum_{\nu=0}^n X_\nu$  und  $M_n = \sum_{\nu=1}^n Z_\nu$ , wo die (unabhängigen)  $Z_\nu$  die Anzahl der „Nullen“ vor der ersten „Eins“ bzw. zwischen aufeinanderfolgenden „Einsen“ angeben; d. h.  $M_n = z$ , falls die  $n$ -te „Eins“ bei  $\nu = n + z$  vorkommt. Durch Benutzung erzeugender Matrizen wird bewiesen: 1. Im Fall, wo für die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{10} = k/n$ ,  $p_{11} = l/n$  gilt, streben bei  $n \rightarrow \infty$   $N_n$  und  $M_n$  der Verteilung nach gegen eine Poisson-Verteilung (mit Parameter  $k$ ). 2. Bei  $p_{10} = k/n$ ,  $p_{11} = l$  streben  $N_n$  und  $M_n$  gegen eine Grenzverteilung  $\chi(x, k, l, q_1)$ ,  $q_1 = P(X_0 = 1)$ , mit erzeugender Funktion

$$E(t^X) = (1 + l q_1 (t - 1) / (1 - l t)) \exp(k(t - 1) / (1 - l t)),$$

für die einige Werte und Hilfswerte in einer Tabelle geboten werden. Der Zusammenhang zwischen beiden Grenzvariablen, und Spezialfälle werden diskutiert; die Theorie wurde an einem Würfelbeispiel verifiziert.

*D. Morgenstern.*

**Geppert, Maria-Pia:** Stochastische Prozesse und ihre Anwendungen. Z. angew. Math. Mech. **36**, 263—264 (1956).

**Dalcher, Andreas:** Einige unstetige stochastische Prozesse. *Z. angew. Math. Phys.* **7**, 273—304 (1956).

The author studies the following important class of stochastic processes  $x(t)$ . On the real semi-axis  $t > 0$  is given a point process defined by an intensity  $w(y, t)$ , that may depend upon both the time  $t$  and the value  $y = x(t-0)$  of the process. Between two successive events the process  $x(t)$  satisfies a differential equation of the first order. At an event the process makes a jump from  $y$  to  $x = x(t+0)$ . The distribution of  $x$  is given and may depend upon  $y$  and  $t$ . Finally the distribution of  $x(0)$  is given. To find the probability distribution of  $x(t)$  for  $t > 0$  two alternative methods are used. In the stationary case the fundamental relation reduces to an integral equation of Fredholm type and it is solved by an expansion in a Neumann series. When all the saltuses of  $x(t)$  are positive, the integral equation is of the Volterra type. The author also applies the Laplace transform and arrives at a partial differential equation, which becomes an ordinary differential equation in the stationary case. Several applications are discussed: to the operation of a power dam, to inventory and queuing problems and to a question related to Geiger-Müller counters. The extension to vector valued processes is mentioned briefly. *U. Grenander.*

**Fisz, M. and K. Urbanik:** Analytical characterization of a composed, non-homogeneous Poisson process. *Studia math.* **15**, 328—336 (1956).

Soit  $\xi_t$  un processus stochastique défini dans l'intervalle fermé de temps  $[0, T]$ ,  $\xi_I$  — l'accroissement de  $\xi_t$  dans l'intervalle  $I = [a, b]$ , où  $0 \leq a < b \leq T$  et  $Q(x, I)$  — une fonction de l'intervalle  $I$ , définie par la relation

$$Q(x, I) = P(\xi_I < x) \text{ pour } x < 0, = -P(\xi_I \geq x) \text{ pour } x > 0.$$

Si (i)  $\xi_t$  est un processus à accroissements indépendents, (ii)  $\lim_{|I| \rightarrow 0} P(\xi_I = 0) = 1$

( $|I|$  représente la longueur de l'intervalle  $I$ ), l'A. démontre que  $\xi_t$  est un processus Poisson composé et la fonction caractéristique  $\varphi(s, I)$  de  $\xi_I$  est donnée par la formule

$$(*) \quad \log \varphi(s, I) = \int_{x \neq 0} (e^{isx} - 1) d_x \int_I Q(x, J),$$

où  $\int_I Q(x, J)$  est l'intégrale Burkhill de la fonction  $Q(x, I)$ . Si l'on ajoute aux conditions (i) et (ii) l'homogénéité du processus considéré, la limite  $q(x) = \lim_{|I| \rightarrow 0} \frac{Q(x, I)}{|I|} (x \neq 0)$  existe et dans ce cas la formule (\*) devient

$$\log \varphi(s, I) = |I| \int_{x \neq 0} (e^{isx} - 1) dq(x).$$

*R. Theodorescu.*

**Lévy, Paul:** Fonctions aléatoires à corrélation linéaire. I, II. *C. r. Acad. Sci. Paris* **242**, 1575—1578, 2095—2097 (1956).

Die beiden Noten betreffen Verallgemeinerungen der vom Verf. eingeführten linear-korrelierten Gaußschen Prozesse. Wie Verf. dazu mitteilt, werden einige kleinere Fehler in einer ausführlichen Darstellung beseitigt. *D. Morgenstern.*

**Baxter, Glen:** Wiener process distributions of the „arcsine law“ type. *Proc. Amer. math. Soc.* **7**, 738—741 (1956).

Let  $x(t)$  be the Wiener process on  $(0, \infty)$ , and define the quantity  $m[s \in (0, T); x(s) > a] = m(T)$ , where  $m$  is Lebesgue measure and  $a$  is a non-negative constant. The author derives the probability distributions of  $m(T)$  and of the first time  $T$ , that  $m(T)$  takes a given value  $t$ . The case, when  $T$  becomes infinite, is also studied. *U. Grenander.*

**Leonov, Ju. P.:** On problem of filtration of nonstationary random functions. *Avtomat. Telemekh.* **17**, 97—106, engl. Zusammenfassg.: Append. to Nr. 2, 1 (1956) [Russisch].

Die Komponenten  $S(t)$  (nützliches Signal) und  $N(t)$  (Störung) eines Signals  $X(t) = S(t) + N(t)$  seien nichtstationäre stochastische Prozesse, welche in der Form

m. q.  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \nu t} dx(\nu)$  dargestellt werden können [ $x(\nu)$  ist irgendein stochastischer Prozess; m. q. bedeutet, daß das Integral im quadratischen Mittel zu nehmen ist;

außerdem soll auch m. q.  $\int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) e^{2\pi i \nu t} dx(\nu)$  existieren, wobei  $G(\nu)$  die Frequenzcharakteristik eines beliebigen linearen Filters ist,  $|G(\nu)| \leq k$  (konst.). Verf. beweist, daß man auch für einen solchen Prozeß einen optimalen stationären linearen Filter zum Ausfiltrieren der Störung bestimmen kann, wenn folgendes neues, doch praktisch genügendes Kriterium anstatt desjenigen von N. Wiener („Minimum des mittleren quadratischen Fehlers“) eingeführt wird: Wenn ein stationärer linearer Filter durch den Operator  $R_1$  bzw. die Impuls-Übergangsfunktion  $R(\tau)$  gekennzeichnet wird, sei  $X_D(t) = R_1[S(t)]$ ,  $X_R(t) = \text{m. q.} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) X(t-\tau) d\tau$  und  $e(t) = X_D(t) - X_R(t)$ . Dann kann jene Funktion  $R(\tau)$ , durch welche das optimale Filter bestimmt wird, aus einer der Bedingungen

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E \{e(t)\}^2 dt = \min \quad \text{bzw.} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T E \{e(t)\}^2 dt = \min.$$

berechnet werden ( $E$ : Erwartungswert; sie wird als Lösung einer Integralgleichung vom Wiener-Hopfschen Typ erhalten). Im Schlußteil gibt Verf. eine mathematische bzw. experimentelle Methode der Bestimmung des Spektrums mittlerer Energie von  $X(t)$ . Die erste stützt sich auf die Korrelationsfunktionen, die zweite aber nicht.

*P. Medgyessy.*

**Hunt, G. A.: Some theorems concerning Brownian motion.** Trans. Amer. math. Soc. 81, 294—319 (1956).

In dieser selbständig lesbaren Arbeit wird zunächst ein Satz über  $n$ -dimensionale Brownsche Bewegung mit  $X(0) = 0$  (Wienerscher Prozeß) bewiesen, der, grob formuliert, lautet: Ist  $U$  unabhängig von  $X(t)$  ( $0 \leq t < \infty$ ) und sind

$$T = f(X, U) \geq 0, \quad V = g(X, U)$$

unabhängig von den Werten  $X(t)$  für  $T \leq t < \infty$ , so ist  $W(t) = X(t+T) - X(T)$  ein Wienercher Prozeß unabhängig von  $V$ . Nach geeigneter Verschärfung über die auftretenden Funktionen  $f$  und  $g$  wird dieser Satz, der auch für Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen gilt, auf die Wärmeleitungsgleichung im Außengebiet einer abgeschlossenen Menge  $E$  angewandt, wobei  $T$  die Zeit des ersten Treffens von  $E$  ist. Übergangswahrscheinlichkeiten und Absorptionswahrscheinlichkeiten dafür werden studiert, wobei reguläre und singuläre Randpunkte in natürlicher Weise auftreten. Die Wahrscheinlichkeitsdichte, von einem festen Punkt aus zu einem Punkt  $P$  zu gelangen, ohne vorher  $E$  zu treffen, genügt der Wärmeleitungsgleichung und das Integral von  $t = 0$  bis  $\infty$  ist die Greensche Funktion von  $R^n - E$ . Für zwei Dimensionen wird gezeigt, daß die Differenz zwischen der Lösung  $F$  der ersten Randwertaufgabe und der Wärmeleitungsgleichung asymptotisch  $= 2\pi H(P) F(\infty)/\ln t$  ist, wobei  $H(P)$  die Greensche Funktion für den Punkt  $\infty$  ist. Es bestehen Zusammenhänge mit der dem Verf. bei Einreichen dieser Arbeit nicht bekannten Untersuchung von J. L. Doob [Trans. Amer. math. Soc. 80, 216—280 (1955)]. *D. Morgenstern.*

**Kiefer, J. and J. Wolfowitz: The characteristics of the general queueing process, with applications to random walk.** Ann. math. Statistics 27, 147—161 (1956).

This is a continuation of the authors' study (this Zbl. 64, 113) of the queueing process with arbitrary distribution of service time  $R_i$ , time between arrivals  $g_i$ , and with  $s$  servers, when  $\rho = E\{R_i\}/s \cdot E\{g_i\} < 1$ . They discuss the convergence of the means of waiting time, queue length, and busy period. They also construct



a random walk  $\{w_i\}$  from  $w_1 = 0$ ,  $w_i = [w_{i1}, \dots, w_{is}]$  and  $w_{i+1} = [(w_{i1} + R_i - g_{i+1})^+, (w_{i2} - g_{i+1})^+, \dots]$  after reordering the components in ascending order, where  $(a)^+$  denotes  $\text{Max}(0, a)$ . It is proved that for  $k > 0$  the  $k$ -th moment of the distribution of  $\lim_{i \rightarrow \infty} P\{w_i \leq x | w_1 = y\}$  (which, according to a result in the earlier paper, is independent of  $y$ ) is finite if and only if  $E\{R_i^{k+1}\} < \infty$ . Implications for the one-dimensional random walk are pointed out and it is mentioned that related results are implicit in P. Erdős, this Zbl. **33**, 290.

S. Vajda.

Mycielski, Jan et S. Paszkowski: Sur un problème du calcul de probabilité. I. Le mouvement d'une molécule sur une droite. *Studia math.* **15**, 188—200 (1956).  
 Paszkowski, S.: Sur un problème du calcul de probabilité. II. Mouvement d'une molécule sur plusieurs droites parallèles. *Studia math.* **15**, 273—299 (1956).

Teil I behandelt eine eindimensionale, stochastische Mechanik. Es werden die Wahrscheinlichkeiten des Überganges, des Umkehrens oder der Absorption, einer längs einer geraden Strecke — in dieser oder einer entgegengesetzten Richtung — sich bewegenden Partikel untersucht. Das Gleichungssystem, welches durch diese sechs Wahrscheinlichkeiten verifiziert wird, ist von einer hinlänglich einfachen funktionalen Struktur. Dessen Auflösungen, von denen einige von C. Ryll-Nardzewsky und C. R. Redhoffer gefunden wurden, sind vollkommen bestimmt. — In Teil II bewegt sich die Partikel auf  $n$  parallelen Geraden, wobei sie die Möglichkeit besitzt, von einer Geraden auf eine andere orthogonal überzuspringen. Wenn  $I_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) ein System von Strecken der betreffenden Geraden bildet, wobei jede Einzelne die orthogonale Projektion der anderen ist, führt der Verf. noch die Bezeichnungen  $q_{ij}(x)$ ,  $p_{ij}(x)$  ein für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten des Austrittes der Partikel durch die linke oder rechte Seite von  $I_i$  und  $r_{ij}(x)$  für die Wahrscheinlichkeit, daß die Partikel sich auf  $I_i$  aufhält [wobei  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ] — unter der Voraussetzung — daß die Partikel durch die linke Seite von  $I_j$  herein getreten sei. Ebenso sind  $P_{ij}(x)$ ,  $Q_{ij}(x)$ ,  $R_{ij}(x)$  die Wahrscheinlichkeiten, welche dem Wechsel der linken mit der rechten Seite in der vorigen Definition entsprechen. Die Wahrscheinlichkeit der Bewegung der Partikel in einem aus zwei Streckengruppen gebildeten Systeme wird als Produkt der diesbezüglichen Wahrscheinlichkeiten einer jeden Streckengruppe erhalten. Die funktionalen Gleichungen, welche sich ergeben, sind (außer denjenigen, welche sich auf die Wahrscheinlichkeiten eines einzelnen Streckensystemes beziehen) von der Form  $p_{ij}(x+y) = \sum_{k,l} p_{ik}(x) \varphi_{kl}(x, y) P_{lj}(y)$  etc. Unter der Voraussetzung, daß die gebrauchten Funktionen regelmäßig sind, verwandelt man diese Funktionalgleichungen in Differentialgleichungen. In dem besonderen Falle der Äquivalenz der Geraden wird das Problem auf das im Falle (I) studierte zurückgeführt.

O. Onicescu.

Onoyama, Takuji: Regular random functions and linear translatable stochastic functional equations. *Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A* **9**, 136—158 (1956).

In einer Arbeit von Kitagawa (dies. Zbl. **49**, 217; hinsichtlich aller Bezeichnungen und Definitionen wird auf dieses Referat verwiesen) wurde die homogene Gleichung  $\Delta(f) = 0$  behandelt, in der  $f = f(t, \omega)$  einem Raum  $\mathcal{L}^p \mathfrak{R}$  regulärer Zufallsfunktionen angehört und  $\Delta$  einen beschränkten, linearen und mit der Bildung der Erwartung und mit allen Translationen vertauschbaren Operator in  $\mathcal{L}^p \mathfrak{R}$  bedeutet. Der Verf. behandelt im Fall  $p = 2$  die inhomogene Gleichung  $\Delta f = g$ , in der der gegebene stochastische Prozeß  $g$  aus  $\mathcal{L}^2 \mathfrak{R}$  eine quadratisch integrierbare Kovarianzfunktion hat. Als Hilfsmittel dienen Reihenentwicklungen beliebiger  $f$  aus  $\mathcal{L}^2 \mathfrak{R}$  mit quadratisch integrierbarer Kovarianzfunktion, die sich auf die Weyl-Stone-Titchmarsh-Kodairasche Entwicklungsformel in bezug auf ein gewöhnliches Randwertproblem zweiter Ordnung stützen. Hieraus ergibt sich eine Integralformel für eine Lösung  $f$ , die mit stochastischen Integralen operiert und die erzeugende Funktion  $G$

von  $\Lambda$  enthält. Unter zusätzlichen Voraussetzungen läßt sich die allgemeine Lösung in der Form  $f = f^* + h$  schreiben, wobei  $f^*$  eine spezielle Lösung der inhomogenen und  $h$  die allgemeine Lösung der homogenen Lösung bildet und  $f^*(t, \omega)$  und  $h(t, \omega)$  für jedes  $t$  orthogonal sind. Anwendungen betreffen die Schätzung des Erwartungswertes  $\tilde{f}(t)$  eines Prozesses  $f(t, \omega)$ . K. Krickeberg.

**Vorovič, I. I.:** Über die Stabilität der Bewegung bei zufälligen Störungen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **20**, 17—32 (1956) [Russisch].

Verf. untersucht ein Differentialgleichungssystem vom Typ

$$(*) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=n+1}^m b_{ik} x_k + \varphi_i(x_1, \dots, x_n; t; x_{n+1}, \dots, x_m) \equiv F_i$$

( $i = 1, \dots, n$ ;  $a_{ij}, b_{ik}$  konst.), wobei die  $x_i(t)$  die gesuchten Funktionen, die  $\varphi_i$  gegebene Funktionen sind und  $(x_{n+1}, \dots, x_m)$  ein gegebener stochastischer Vektorprozeß ist. Man spricht von einer Lösung von (\*), wenn der stochastische Vektorprozeß  $(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_m)$  wahrscheinlichkeitstheoretisch beschrieben werden kann, z. B. dadurch, daß man für irgendein Indexsystem  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  die Gesamtheit der Korrelationsfunktionen

$$K_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(t_{11}, \dots, t_{m\alpha_m}) = E \left\{ \prod_{r=1}^{\alpha_1} x_1(t_{1r}) \cdots \prod_{r=1}^{\alpha_m} x_m(t_{mr}) \right\}$$

(„Vollständiges System der Korrelationsfunktionen“, kurz: VSDK) auf Grund von (\*) angibt. Selbstverständlich spricht man von einem VSDK auch im Falle eines beliebigen stochastischen Vektorprozesses  $(x_1(t), \dots, x_p(t))$ , wenn für irgendein Indexsystem  $\beta_1, \dots, \beta_p$  die Gesamtheit der Korrelationsfunktionen

$$K_{\beta_1, \dots, \beta_p}(t_{11}, \dots, t_{p\beta_p}) = E \left\{ \prod_{r=1}^{\beta_1} x_1(t_{1r}) \cdots \prod_{r=1}^{\beta_p} x_p(t_{pr}) \right\}$$

bekannt ist. Nach diesen Vorbereitungen beweist Verf. folgenden Satz: Voraussetzungen: 1. In (\*) sind die  $F_i$  analytische Funktionen der  $x_j, x_k$  in einem gewissen abgeschlossenen Bereich  $\bar{G}$ , welcher den Punkt  $x_j = x_k = 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ;  $k = n+1, \dots, m$ ;  $0 \leq t \leq T$ ) enthält. 2. Die  $F_i$  sind stetige Funktionen der Zeit ( $0 \leq t \leq T$ ). 3. Bei beliebigen Realisierungen des stochastischen Vektorprozesses  $(x_{n+1}, \dots, x_m)$  gehören die Lösungen von (\*) dem Analytizitätsbereich der  $F_i$  ( $0 \leq t \leq T$ ) an. 4. Die Gleichungen (\*) sind so beschaffen, daß die Lösungen des Systems

$$(**) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \mu \sum_{k=n+1}^m b_{ik} x_k + \mu \varphi_i(x_1, \dots, x_n; t; \mu x_{n+1}, \dots, \mu x_m)$$

als Potenzreihen in  $\mu$  dargestellt werden können, welche bei allen Realisierungen von  $(x_{n+1}, \dots, x_m)$  für  $0 \leq \mu \leq 1$  und  $0 \leq t \leq T$  gleichmäßig konvergieren. — Dann gilt folgendes: In (\*\*) ist das VSDK, welches zu  $(x_1, \dots, x_n)$  gehört, definiert, falls das zu  $(x_{n+1}, \dots, x_m)$  gehörende VSDK gegeben ist, und jede Korrelationsfunktion der  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) wird durch eine Potenzreihe in  $\mu$  dargestellt, deren Koeffizienten Funktionen der Korrelationsfunktionen der  $x_k$  ( $k = n+1, \dots, m$ ) sind. — Ein anderer Satz gibt die Bedingungen an, unter welchen das System (\*) — falls die  $\varphi_i$  die Zeit  $t$  nicht enthalten — eine Lösung hat, welche ein stationärer stochastischer Vektorprozeß ist. Falls  $(x_{n+1}, \dots, x_m)$  ein stationärer stochastischer Vektorprozeß ist, kann diese Lösung in Form einer konvergenten Reihe, deren Glieder die Komponenten eines stationären stochastischen Vektorprozesses sind, dargestellt werden. — Im übrigen Teil der Arbeit untersucht Verf. in gewissen Spezialfällen die Stabilität des Systems (\*), falls darin die Koeffizienten  $a_{ij}, b_{ik}$  Funktionen der Zeit sind.

P. Medgyessy.

**Kampé de Fériet, Joseph:** Intégrales aléatoires de l'équation de la diffusion. C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 929—932 (1956).

Beim Anfangswertproblem der Diffusionsgleichung für Parallelströmung

$s_t - s_{xx} = -(us)_x$  in  $-\infty < x < \infty$  sei  $u$ , räumlich und zeitlich konstant (was die Rückführung auf die Wärmeleitungsgleichung ermöglicht), eine zufällige Größe. Falls die Anfangswerte gewissen Bedingungen genügen, folgt die Existenz der mittleren Diffusionsdichte in gewissen Halbstreifen; im Spezialfall eines normalverteilten  $u$  und nichtnegativer Anfangswerte  $f(x)$  mit  $\int f(x) dx = 1$  folgt die Existenz aller Momente zu allen Zeiten; ohne die Bedingung über  $f(x)$  nur in endlichen Streifen  $0 < t < t_0$ .

D. Morgenstern.

**Burger, E.:** Zur Theorie der kooperativen Zweipersonenspiele. Arch. der Math. 7, 143—147 (1956).

The author gives a clear account of the concepts of threat and demand in a two-person cooperative game (see Nash, this Zbl. 50, 141) and of arbitration (see Raiffa, this Zbl. 50, 145). Raiffa has shown that the game of threats has at least one equilibrium point in pure strategies and that, if there are more than one, they are all equivalent. This was proved by using the fixed point theorem of Kakutani. In the present paper the proof is given by using Brouwer's fixed point theorem; this possibility was suggested by a proof of the existence of equilibrium points in Nash (this Zbl. 45, 82).

S. Vajda.

**Beale, Martin et Michael Drazin:** Sur une note de Farquharson. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 123—125 (1956).

The authors point out that the concept of ophelimity, introduced by Farquharson (this Zbl. 64, 134) is analogous to that of zero-sum for games with numerical pay-offs. Guided by this analogy, they prove that a game with non-numerical preferences can be transformed into one of ophelimity by the addition of one more player, with appropriately chosen preferences. This is first shown for a well-ordered set of players and another proof is given for the case of enumerable sets of players and strategies.

S. Vajda.

## Statistik:

● **Fisher, Sir Ronald A.:** Statistical methods and scientific inference. Edinburgh-London: Oliver and Boyd 1956. VIII, 175 p. 16/— net.

This monograph deals with the philosophy, the nature of scientific inference and the concepts of inductive reasoning which, in the authors opinion, form the basis for the last half-century advances in statistical methodology, a branch of applied mathematics to which the author has been a chief contributor. In the authors own words, „there has already appeared a need for exposition and consolidation of the specifically logical concepts, which have emerged as it were as a byproduct of both (a) the purely mathematical elucidation of the statistical problems in the first phase and (b) in the second phase the development of experimental designs . . .“. Chapter II deals with the earliest attempts in the history of science of solving problems connected with inductive reasoning. Thomas Bayes theory, which received wide acceptance in the last century due to the fact that Laplace was lending his authority to the theory, is analyzed. The author, although being the first one to recognize that Bayes attempt was a failure, has the highest regard for Bayes work. The concepts of a priori and a posteriori probabilities are explained and applied to the binomial probability in the wellknown classical manner. Georg Boole and John Venns criticism is discussed. Finally the author outlines his own view on the concept of probability and its relation to testing of hypothesis. Chapter III deals with the forms of statistical inference. Testing of hypothesis is illustrated by application to testing the hypothesis of random dispersal of stars on the celestial sphere. The author considers the principles for selection of test methods. He makes use of the term „sensitivity“ both when comparing different methods and when dealing with possible faults (alternatives to the hypothesis?). The Neyman-Pearson concept of power function is not mentioned but it is clear that the author disagrees with the whole Neyman-



Pearson approach. The author's wellknown fiducial argument is reviewed. If  $\theta$  is an unknown parameter,  $T$  a sufficient statistic, and  $F(t, \theta)$  the cumulative distribution function of  $T$ , then the fiducial probability density of  $\theta$  is defined as  $-\partial F/\partial \theta$ . It will probably be new to many that the author does not consider fiducial probability as being conceptionally different from ordinary probability. By the fiducial argument the parameter of a distribution function changes the status from a variable about which no probability statement can be made to a random variable. The fiducial reasoning is illustrated by application to estimating the mean interval of time between two successive emissions from a radioactive source. „Confidence limits“ receives approval by the author but „falls short in logical content of the limits found by fiducial argument“. Finally the probability distribution of the observations and the fiducial probability are discussed in their relationship to the maximum likelihood function. In the authors opinion there have been many misapprehensions about tests of significance and those are discussed in chapter IV. Some of these misapprehensions are due to Neyman and Wald and has something to do with their „acceptance“ view. Another confusion is between the level of significance assigned to a test and the frequency of occurrence of a specified type of decision. Student's tests of means and regression coefficients are used as illustrations. The fact that the rejection probability can sometimes not attain a chosen level and will often not be constant when the hypothesis is composite is discussed in great details. Behren's test is dealt with and it is pointed out that Pearson and Hartley's table no. 11 is misleading. Some remarks are made about randomized tests. Finally some views on the fundamental principles of scientific inference are advanced. Criticising Neyman and Wald he states that „As workers in Science we aim, in fact, at methods of inference which shall be equally convincing to all freely reasoning minds, entirely independent of any intentions that might be furthered by utilizing the knowledge inferred“. In chapter V various examples are given to substantiate the authors views regarding probability, likelihood and fiducial inference. Chapter VI treats the principles of estimation (commonly called point estimation, a term which the author dislikes). Noteworthy is the authors disapproval of the definition of a consistent estimate used by most statisticians. In the authors opinion the correct definition should be that of a function of the observed frequencies which takes the exact parametric value when for these frequencies their expectations are substituted. The concept of efficiency is treated in a non-asymptotic manner. The now wellknown inequality (discovered independently by Frechet, Cramer and Rao) between the variance of a statistic and „the amount of information“ is derived by using Lagrange multiplier rule. The concepts of Likelihood and Information are dealt with. It is proved that by grouping of samples the amount of information is never increased. Some special problems are treated and the book is concluded by deriving the joint fiducial probability of the parameter of a bivariate normal distribution.

*E. Sverdrup.*

● Johnson, R. E. and D. N. Morris: *Guide to elementary statistical formulae*. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Publishing Company, Ltd. 1956. 102 p. 22s. 6d.

Belevitch, B.: *Théorie de l'information et statistique linguistique*. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 42, 419—436 (1956).

A. Exposé heuristique de la théorie de Benoit Mandelbrot, concernant l'explication des données empiriques relatives aux fréquences des mots dans le discours, à partir d'un modèle thermodynamique; l'A. ne paraît pas se rendre compte de la généralité de la théorie qu'il expose dans un cas simple. B. Tentative pour représenter les fréquences empiriques des phonèmes par une distribution binomiale; succès problématique.

*B. Mandelbrot.*

Adam, A.: Mathematische Statistik in der industriellen Unternehmungsfor-  
schung. Z. angew. Math. Mech. **36**, 262—263 (1956).

Linnik, Ju. V.: Eine aus der mathematischen Statistik stammende Aufgabe der  
differenziellen Algebra. Uspechi mat. Nauk **11**, Nr. 3 (69), 169—170 (1956) [Russisch].

Let  $x_1, x_2, \dots, x_n$  denote independent and identically distributed random  
variables having the distribution function  $F(x)$  and the characteristic function  $y(t)$ .  
Let us put  $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  and denote by  $Q$  a polynomial of the variables  
 $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$(1) \quad Q = \sum b_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

The condition that  $Q$  and  $S$  are independent leads to the following differential  
equation for  $y(t)$ : (2)  $D(t) = D(0) (y(t))^n$  where

$$(3) \quad D(t) = \sum b_{k_1 k_2 \dots k_n} (-i)^{k_1 + \dots + k_n} y^{(k_1)}(t) y^{(k_2)}(t) \dots y^{(k_n)}(t).$$

Thus the statistical problem of determining the distribution functions  $F(x)$  which  
have the property that  $S$  and  $Q$  are independent, leads to the investigation of all  
solutions of the differential equation (2), i. e. to a problem in differential algebra  
(see H. Ritt, Differential algebra, New York 1943).

A. Rényi.

Herdan, G.: Ein neuer statistischer Parameter. Z. angew. Math. Mech. **36**,  
72 (1956).

Es werden spezielle Zufallsvariablen  $X$  betrachtet, die nur positiver ganzer  
Werte ( $X = 1, 2, \dots, n$ ) fähig sind und in einer Gesamtheit vom Umfang  $N$  mit den  
Häufigkeiten  $f_X$  (mit  $\sum_{X=1}^n f_X = N$ ) auftreten. Aus der Gleichung für den Variations-  
koeffizienten des Mittelwertes

$$v_m^2 = \sigma_x^2 / N M_x^2 = \sum f_X X^2 / [\sum f_X X]^2 - N^{-1} = K - N^{-1}$$

folgt Verf., weil hierin nur der letzte Summand sichtbar von  $N$  abhängt, Konstanz  
der von G. U. Yule (A statistical study of vocabulary, Cambridge 1943) eingeführten  
„Charakteristik“  $K$ . Seine Behauptung bestätigt sich an einem Zahlenbeispiel aus  
der Wortschatzstatistik. Verf. kennt offenbar nicht die zahlreichen konzentrations-  
theoretischen Arbeiten der italienischen statistischen Schule (C. Gini u. a.) über  
derartige Besetzungs-Variablen  $X$ , wie sie mannigfach bei Aufteilungen auftreten,  
z. B. von Vermögen auf Personen, von Kindern auf Familien, von Früchten auf  
Pflanzen, Bevölkerung auf Städte, von Sonnentagen auf Jahre, von Kugeln auf  
Fächer, etc., und die mithin in der Bevölkerungs-, Sozial-, Wirtschafts-, Land- und  
Forstwirtschaftsstatistik etc. schon längst eine wichtige Rolle spielen.

M. P. Geppert.

Horst, Paul and Charlotte MacEwan: Optimal test length for maximum absolute  
prediction. Psychometrika **21**, 111—124 (1956).

Gulliksen, Harold: A least squares solution for paired comparisons with in-  
complete data. Psychometrika **21**, 125—134 (1956).

Wartmann, Rolf: Anwendung der logarithmischen Normalverteilung. Mitteil.-  
Bl. math. Statistik **8**, 83—91 (1956).

Verf. setzt seine früheren Untersuchungen über die logarithmische Normal-  
verteilung (R. Wartmann, dies. Zbl. **64**, 384) fort. Behandelt werden: Die Varianz  
des Schätzers des Fluchtpunktes und der zur Erkennung der Schiefe einer logarith-  
mischen Normalverteilung erforderliche Stichprobenumfang. Den Abschluß bilden  
eine Formelzusammenstellung und ein durchgerechnetes Anwendungsbeispiel aus  
der Stahlindustrie.

O. Ludwig.

Weibull, Waloddi: Static strength and fatigue properties of unnotched circular  
75 S — T specimens subjected to repeated tensile loading. Flygtekn. Försöksanstalt,  
Meddel. **68**, 29 p. (1956).

Data from a series of 24 static tensile tests and 270 fatigue tests have been statistically ana-  
lyzed by determination of the median  $S - N$  curve, the scatter and the distribution function of

the fatigue strength as well as the  $P-S-N$  equation. — It was found that the scatter in fatigue strength is independent of the number of stress cycles applied (Case A) and that the strength is neither normally nor lognormally distributed. — The scatter due to the material is small and of the same magnitude as the scatter due to the testing machine. — Formulae for calculating the variances of estimated parameters have been derived and applied to the test data.

Zusammenfassung des Verfassers.

**Fraser, D. A. S. and Irwin Guttman: Tolerance regions.** Ann. math. Statistics **27**, 162—179 (1956).

The authors define three types of tolerance regions: distribution free,  $\beta$ -content and  $\beta$ -expectation tolerance regions. The precise definitions are too abstract to be quoted here. The problem of finding a good  $\beta$ -expectation tolerance region is reduced to that of solving a problem of constructing a significance test. Best tolerance regions are obtained for problems involving normal distributions. S. Vajda.

**Keeping, E. S.: Statistical decisions.** Amer. math. Monthly **63**, 147—159 (1956).

Expository paper, discussing Wald's book on Statistical Decision Functions (this Zbl. **40**, 364), a paper by Milnor (this Zbl. **58**, 137), Savage's criterion of minimax regret, the connection between Bayes and minimax estimates, quality control, and a problem in sequential analysis involving two alternative hypotheses.

S. Vajda.

**Karlin, Samuel and Herman Rubin: The theory of decision procedures for distributions with monotone likelihood ratio.** Ann. math. Statistics **27**, 272—299 (1956).

A cumulative distribution function  $P(x|\omega) = \int_{-\infty}^x p(t|\omega) d\mu(t)$  is said to have a monotone likelihood ratio if

$$p(x_1|\omega_1) p(x_2|\omega_2) - p(x_1|\omega_2) p(x_2|\omega_1) \geq 0$$

for  $x_1 > x_2$  and  $\omega_1 > \omega_2$ . The binomial, normal, and Poisson distributions are examples. A strategy  $\{\Phi_i(x)\}$  is monotone if there exist  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) such that  $\Phi_i(x) = 1$  for  $x_i < x < x_{i+1}$  and  $= 0$  for  $x < x_i$  or  $x > x_{i+1}$ , where  $\Phi_i(x)$  is the probability of deciding on action  $i$  when  $x$  was observed. A similar definition is given for an infinite number of possible actions. — The authors prove the essential completeness of the set of all such strategies, determine the Bayes strategies for the statistician, Bayes and minimax strategies for nature, and study admissibility. They also discuss the connection between monotonicity and invariance theory.

S. Vajda.

**Wishart, John:  $\chi^2$  probabilities for large numbers of degrees of freedom.** Biometrika **43**, 92—95 (1956).

Durch Entwicklung der Verteilungsdichte

$$f(x) = c^{c-1/2} \exp \{ -c (e^{x/\sqrt{c}} - x/\sqrt{c}) \} / \Gamma(c)$$

der Variablen  $x = \sqrt{c} \cdot \ln(\chi^2/2c)$ , wobei  $\chi^2$  mit  $\nu = 2c$  F.G.  $\chi^2$ -verteilt sei, nach Potenzen von  $c^{-1/2}$  gewinnt Verf. für  $\int_0^x f(x) dx$  einen Näherungsausdruck, der  $c, \mu_0(x)$  und die „unvollständigen Normalmomente“

$m_n(X) = \mu_n(X) / (n-1)(n-3) \cdots \frac{1}{2}$  mit  $\mu_n(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x x^n \exp(-\frac{1}{2}x^2) dx$  enthält, sowie einen solchen, der auf  $c$ , Potenzen von  $X$  und den Größen

$$P(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^X \exp(-\frac{1}{2}x^2) dx, \quad Z(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}X^2)$$

füßt. Da der zweite Näherungsausdruck Spezialfall ( $n_2 = \infty, n_1 = \nu = 2c$ ) der direkten Cornish-Fisher-Entwicklung [E. A. Cornish and R. A. Fisher, Moments



and cumulants in the specification of distributions. *Revue Inst. internat. Statist.* 5, 307—320 (1937)] für Fishers  $z$ -Verteilung ist, folgt aus deren Umkehrung eine Entwicklung von  $\frac{1}{2} \ln (\chi^2/2c)$  nach Potenzen von  $c^{-1/2}$  und  $X$ , die für große  $\nu = 2c$  zu einer Normal-Näherung führt, die besser als die Fishersche und äquivalent derjenigen von Wilson und Hilferty ist.

*M. P. Geppert.*

**Fox, Martin:** Charts of the power of the  $F$ -test. *Ann. math. Statistics* 27, 484—497 (1956).

Charts are given of curves of constant  $\sqrt{S_b^*/[(f_1 + 1) \sigma^2]}$  where  $S_b^*$  is the value of the sum of squares in the numerator of the  $F$  statistic, when the observable variables are replaced by their expectation under the alternative hypothesis. The curves are exhibited for all combinations of  $\alpha = 0,01$  and  $0,05$ , and  $\beta = 0,5, 0,7, 0,8, 0,9$ . Also, nomograms are given for the same values of  $\alpha$  to make interpolation for  $\beta$  feasible.

*S. Vajda.*

**David, H. A.:** On the application to statistics of an elementary theorem in probability. *Biometrika* 43, 85—91 (1956).

Der bekannte elementare Satz über die Wahrscheinlichkeit für gleichzeitiges Eintreffen von mindestens  $m$  aus  $n$  Ereignissen bekannter Simultan-Wahrscheinlichkeit wird angewandt auf statistische Probleme, und zwar: 1. Kriterium  $x_{\max} - \bar{x}$  zur Ausschaltung einer maximal vom Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  aus  $n$  Beobachtungen  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) abweichenden Beobachtung, wobei die  $x_i$  unabhängig, mit gleicher Varianz normal verteilt angenommen werden. 2. Verteilung des maximalen Varianzverhältnisses  $s_{\max}^2/s^2$  aus  $n$  mit  $\nu_i$  und  $\nu$  F.G.  $F$ -verteilten Verhältnissen  $s_i^2/s^2$  ( $i = 1, \dots, n$ ) von Stichprobenvarianzen, speziell angewandt auf stochastisierte Blockversuche mit gleicher Block- und Behandlungszahl, lateinische und lateinisch-griechische Quadrate.

*M. P. Geppert.*

**Trickett, W. H., B. L. Welch and G. S. James:** Further critical values for the two-means problem. *Biometrika* 43, 203—205 (1956).

Verff. ergänzen die [in E. S. Pearsons und H. O. Hartleys „*Biometrika Tables*“ I (dies. Zbl. 56, 127) als Tafel 11 abgedruckten] von Aspin berechneten Tafeln der einseitigen oberen 5%- und 1%-Fraktile für das von Welch entwickelte Mittelwertvergleichs-Kriterium

$$v = (y - \eta) / \sqrt{\lambda_1 \cdot s_1^2 + \lambda_2 \cdot s_2^2}$$

(A. A. Aspin und B. L. Welch, dies. Zbl. 36, 24) durch Berechnung der zur zweiseitigen 5%- und 1%-Abgrenzung brauchbaren oberen 2,5%- und 0,5%-Fraktile. Hierbei ist wie früher  $y$  normal verteilt mit  $E(y) = \eta$ ,  $\text{var } y = \lambda_1 \cdot s_1^2 + \lambda_2 \cdot s_2^2$ , und  $s_i^2$  sind unabhängige, auf  $\nu_i$  F.G. fußende, standard- (d. h.  $\nu_i \cdot s_i^2/\sigma_i^2 = \chi^2$ ) verteilte Schätzer von  $\sigma_i^2$ .

*M. P. Geppert.*

**Fisher, Sir Ronald:** On a test of significance in Pearson's *Biometrika Tables* (No. 11). *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* 18, 56—60 (1956).

Bekanntlich hat Verf. [R. A. Fisher, *Ann. Eugenics* 11, 141—172 (1941)] das von W. U. Behrens [Landw. Jahrb. 68, 807—837 (1929)] angegebene Kriterium zum Vergleich zweier Stichprobenmittelwerte bei Stichproben, die Normalverteilungen mit verschiedenen, unbekannten Varianzen entstammen, mittels seines Begriffs der Fiducialwahrscheinlichkeit zu rechtfertigen gesucht und zur Grundlage der von P. V. Sukhatme berechneten, in seinem Tafelwerk (R. A. Fisher und F. Yates, *Statistical tables for biological agricultural and medical research*, London 1938) als Tafel V 1 publizierten Test-Tafeln gemacht. Während dieser Behrens-Fisher-Sukhatme-Test auf bedingten Verteilungen mit fixiertem Verhältnis der Stichproben-Varianzen beruht, fußt der von B. L. Welch (dies. Zbl. 36, 211) entwickelte, von A. A. Aspin (dies. Zbl. 36, 211) tabulierte und in E. S. Pearson und H. O. Hartley (*Biometrika tables for statisticians*. Vol. I, dies. Zbl. 56, 127) als Tafel 11 publizierte approximative Test auf der klassischen Neyman-Pearson-Theorie. Verf.

betrachtet das Welchsche Kriterium  $v = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) / \sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}$  von seinem Gesichtspunkt aus und nimmt an ihm auf Grund numerischer Einzelheiten in der entsprechenden Tafel Anstoß.

*M. P. Geppert.*

**Albert, G. E.:** Accurate sequential tests on the mean of an exponential distribution. Ann. math. Statistics 27, 460—470 (1956).

Consider a sequential probability ratio test for  $\theta = \theta_1$  against  $\theta = \theta_2 > \theta_1$ , where  $\theta$  is the mean of the distribution  $g(u, \theta) = [\exp(-u/\theta)]/\theta$ , with given decision boundaries on the sums of  $\log [g(u, \theta_2)/g(u, \theta_1)]$ . Integral equations are derived for the probability of deciding in favour of  $\theta = \theta_1$  and for the expected duration of the test. These integral equations are solved exactly, and approximately, decision boundaries are derived for pre-assigned risk probabilities, and two examples are attached.

*S. Vajda.*

**Noether, Gottfried E.:** Two sequential tests against trend. J. Amer. statist. Assoc. 51, 440—450 (1956).

Der  $S_j$ -Test prüft eine Reihe von Beobachtungen  $x_1, x_2, \dots$  gegen linearen Trend. Es sei für eine feste ganze Zahl  $j | y_m = 0 | 1$ , wenn  $x_m < x_{m+j} | x_m > x_{m+j}$ ,  $m = 1, 2, \dots, j$  und  $p = P(y_m = 1)$ . Geprüft wird die Nullhypothese  $p_0 = \frac{1}{2}$

gegen die Hypothese eines linearen Trends  $p = p_1 = \int_{-\infty}^{\infty} F(x - j\theta) dF(x) =$

$\frac{1}{2} + e_j$ . Zum Test der gleichen Beobachtungsreihe gegen eine zyklische Alternative wird die Variable  $y_m = 1$  gestzt, wenn  $x_m, x_{m-1}, x_{m-2}$  eine monotone Folge bilden, sonst  $= 0$ . Geprüft wird die Nullhypothese  $p_0 = \frac{1}{3}$  gegen eine Hypothese  $p = p_1 > p_0$ . Angewendet wird in beiden Fällen ein Sequentialverfahren. Im ersten Fall wird  $j$  so bestimmt, daß die Anzahl der erwarteten Beobachtungen ein Minimum wird.

*F. Wever.*

**Darwin, J. H.:** The behaviour of an estimator for a simple birth and death process. Biometrika 43, 23—31 (1956).

Zur Schätzung des Parameters  $\alpha = \exp[(\lambda - \mu)\tau]$  beim einfachen Zu- und Abgangs-Prozeß mit konstanter Zu- bzw. Abgangswahrscheinlichkeit  $\lambda dt$  bzw.  $\mu dt$  schlägt Verf. die bisher nur für  $\lambda = 0$  oder  $\mu = 0$  als plausibelster Schätzer verwendete Größe  $X_k = (N_1 + \dots + N_k)/(N_0 + \dots + N_{k-1})$  vor, wo  $N_0$  die Bevölkerungszahl zur Zeit  $t = 0$  und  $N_i$  diejenige im Zeitpunkt  $i\tau$  ( $i = 1, \dots, k$ ) sei. Er beweist  $E(X_k) \leq \alpha$ ,  $E(\ln X_k) \leq \ln \alpha$ , zeigt, daß für  $N_0 \rightarrow \infty$  der Schätzfehler  $\alpha - E(X_k) \rightarrow 0$  strebt, daß für  $\lambda = \mu$  stets und für  $\lambda \neq \mu$  in gewissen Fällen  $X_k$  sogar ein inkonsistenter Schätzer für  $\alpha$  ist, beweist asymptotische Erwartungstreue von  $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k$  für  $\exp(\lambda\tau)$  im Falle  $\mu = 0$  und bestimmt die Inkonsistenz  $\exp(-\mu\tau) - \lim_{k \rightarrow \infty} E(X_k)$  im Falle  $\lambda = 0$ . Mittels Berechnung

von  $\text{var } X_k$  für großes  $N_0$  wird dann die Effizienz von  $X_k$  untersucht, wobei  $X_k$  mit dem bei kontinuierlicher Beobachtung und Registrierung der genauen Zeitpunkte der Zu- und Abgänge im Zeitintervall  $(0, t)$  plausibelsten (Maximum-likelihood-) Schätzer für  $\exp[(\lambda - \mu)t]$  verglichen wird.

*M. P. Geppert.*

**Haldane, J. B. S. and Sheila Maynard Smith:** The sampling distribution of a maximum-likelihood estimate. Biometrika 43, 96—103 (1956).

Eine Population bestehe aus endlich oder abzählbar vielen Klassen  $r = 1, 2, \dots$  mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten  $f_r(\xi)$ ; auf Grund einer  $N$ -gliedrigen zufälligen Stichprobe aus ihr, von welcher jeweils  $n_r$  in Klasse  $r$  fallen, sei der unbekannte Parameter  $\xi$  zu schätzen. Mit Hilfe der Taylor-Entwicklung von  $f_r(\xi + y)$  nach Potenzen von  $y$ , der Momente von  $\sum_r h_r z_r$  mit  $z_r = n_r/N - f_r(\xi)$  und langwieriger Approximationen der Momente von Summen der Form  $\sum_r z_r [f_r(\xi)]^{-i} [f_r'(\xi)]^{-i}$  u. a. berechnen Verff. Momente und Kumulanten des Schätzfehlers  $y = x - \xi$

des plausibelsten Schätzers  $x$  für  $\xi$ , welcher im Falle linearer Funktionen  $f_r(\xi)$  „fast erwartungstreu“ ist, d. h. für den  $E(x) - \xi = O(N^{-2})$  ist. — Hierbei werden einige Rechenfehler früherer Arbeiten berichtigt.

*M. P. Geppert.*

**Broadbent, S. R.: Examination of a quantum hypothesis based on a single set of data.** *Biometrika* **43**, 32–44 (1956).

The problem considered differs from that in an earlier paper (this Zbl. **64**, 140) in that the quantum hypothesis  $y_i = 2 r_i d + \varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) is now dependent on, and actually suggested by the observed data. The statistic used to measure the agreement between hypothesis and observation is similar to chi-squared and its values for a rectangular distribution are studied by a sampling experiment. This is discussed in some detail and an example of a quantum hypothesis connected with excitation energies of nuclei is attached.

*S. Vajda.*

**Teicher, Henry: Identification of a certain stochastic structure.** *Econometrica* **24**, 172–177 (1956).

Consider the pair of observable variables  $X_i = U_i + \alpha U_{i-1}$ ,  $X_{i+1} = \alpha U_i + U_{i+1}$ . The author studies the problem of identifiability, i. e. the conditions under which only one value of  $\alpha$  and /or one c. d. f. of the  $U_i$  are compatible with the same distribution of the  $X_i$ . He obtains the following theorems: (1)  $\alpha$  is identifiable if  $U$  (or  $X$ ) are non-normally distributed. (2) if  $U$  (or  $X$ ) is normally distributed, then both  $\alpha$  and the characteristic function of  $U$  called  $\varphi(t)$  are identifiable if, and only if,  $\alpha$  ranges over a set  $A$  of real values such that, for  $\alpha \neq 1$ ,  $\alpha$  and  $1/\alpha$  are not simultaneously in  $A$ . (3)  $\alpha$  and  $\varphi(t)$  are identifiable if the characteristic function of  $X$  is non-normal and not  $\equiv 0$  in any (finite) interval, and if  $-1 \notin A$ . The „linear structure“  $X_{1i} = Y_1 + V_{1i}$ ,  $X_{2i} = \alpha + \beta Y_1 + V_{2i}$ , with  $Y_1$  independent of  $(V_1, V_2)$  and  $\alpha, \beta$  unknown is briefly examined and a theorem is proved about the identifiability of  $\beta$ .

*S. Vajda.*

**Deming, W. Edwards: On simplifications of sampling design through replication with equal probabilities and without stages.** *J. Amer. statist. Assoc.* **51**, 24–53 (1956).

A procedure for the selection of a sample in a public opinion survey is described in detail. The area to be surveyed is divided into sections and to each section a number of sampling units is assigned in accordance with the data from the last census preceding the survey. Serial numbers are attached to the sampling units, and the whole series is divided into zones of equal size. From each zone two (or more) numbers are drawn at random, and the corresponding sampling units are assembled into subsamples in order of selection. Formulae are given for computing estimates of means and ratios and their variances. The procedure is illustrated by three examples with different features.

*J. J. Bezem.*

**Jones, Howard L.: Investigating the properties of a sample mean by employing random subsample means.** *J. Amer. statist. Assoc.* **51**, 54–83 (1956).

A sampling procedure, designed primarily to estimate the mean value of some property of the individuals in a finite population, is discussed. It consists in the selection of a number  $g$  of subsamples of equal size  $m$ . To this end, a serial number is assigned to every individual, and the population is divided into  $m$  sections of equal size  $k$  (the total size of the population being  $mk$ ). From each section  $g$  individuals are selected, one for each subsample, according to one of the following methods. Method A:  $g$  numbers are drawn at random without replacement from the numbers  $1, \dots, k$  and each number  $a$  provides a subsample consisting of the individuals numbered  $a, a + k, \dots, a + (m - 1)k$ . Method B: from each section  $g$  individuals are selected at random without replacement and assigned to the subsamples in order of selection. For either procedure the subsample means  $x_r$  and the over-all mean  $\bar{x} = g^{-1} \sum_r x_r$

are computed. It is shown, that in both cases  $\bar{x}$  is an unbiased estimate of the population mean, and  $[(k - g)/k g(g - 1)] \sum_r (x_r - \bar{x})^2$  an unbiased estimate of the variance



of  $\bar{x}$ . The relative advantages of methods A and B are pointed out and rules are given for choosing a sampling plan in different situations. In particular, the use of the procedure in stratified sampling is discussed. Formulae are derived for estimating the variance and possible bias of a weighted average of several ratio-estimates, calculated from samples selected by either method A or method B. Finally, it is shown how to determine under certain conditions the number of degrees of freedom associated with the estimate of the variance of  $\bar{x}$ . If this quantity is known, a confidence interval for the population mean may be computed by means of the corresponding  $t$ -distribution.

J. J. Bezem.

**Harley, B. I.:** Some properties of an angular transformation for the correlation coefficient. *Biometrika* 43, 219—224 (1956).

Einen Gedanken von W. F. Sheppard (1899) aufgreifend, berechnet Verf., wenn  $r$  der Korrelationskoeffizient einer  $n$ -paarigen Stichprobe aus einer Normalverteilung mit Korrelationskoeffizient  $\rho$  ist, bis auf Glieder  $O(n^{-3})$  Erwartungswert und 2-ten bis 4-ten Kumulanten von  $y = \arcsin r$  zu:

$$E(y) = \arcsin \rho,$$

$$\text{var}(y) = \kappa_2(y) = (1 - \rho^2) n^{-1} \{1 + (2 + \rho^2) n^{-1} + \frac{1}{3} (11 + 8\rho^2 + 8\rho^4) n^{-2}\},$$

$$\kappa_3(y) = 3\rho (1 - \rho^2)^{3/2} n^{-2} \cdot \{1 + (3 + 4\rho^2) n^{-1}\},$$

$$\kappa_4(y) = 2(1 - \rho^2)^2 n^{-3} \{10\rho^2 - 1\}.$$

Vergleich derselben und der daraus abgeleiteten Schiefe und Kurtosis  $\beta_1 = \kappa_3 \kappa_2^{-3/2}$ ,  $\beta_2 = 3 + \kappa_4 \kappa_2^{-2}$  mit den entsprechenden Parametern der  $r$ -Verteilung und denjenigen der Verteilung der Fisher-Transformierten  $z = \text{Tang } r$  zeigt, daß  $y$  zwar viel schiefere verteilt und daher erheblich schlechter normal approximierbar ist als  $z$ , andererseits aber einen von  $n$  weitgehend unabhängigen Erwartungswert aufweist. Verf. vergleicht überdies an Beispielen numerisch die kumulativen Verteilungsfunktionen von  $r$  (exakt) und von  $z$  und  $y$  mittels Normalapproximation auf Grund der Näherungswerte von  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  bzw. mittels der von Verf. kürzlich [B. I. Harley, *Biometrika* 41, 278—280 (1954)] herangezogenen Cornish-Fisher-Form der Edgeworth-Entwicklung.

M. P. Geppert.

**Pillai, K. C. S.:** On the distribution of the largest or the smallest root of a matrix in multivariate analysis. *Biometrika* 43, 122—127 (1956).

In der multivariablen Analysis normal verteilter Populationen tritt bei Prüfung der Nullhypothesen 1. Gleichheit der Dispersionsmatrizen zweier  $p$ -variablen Populationen, 2. Gleichheit der  $p$ -dimensionalen Mittelwertsvektoren von  $l$   $p$ -variablen Populationen, 3. Unabhängigkeit eines  $p$ - und eines  $q$ -dimensionalen Satzes von Variablen einer  $(p + q)$ -variablen Population, auf Grund von Stichproben, eine Matrix auf, deren  $s$  Eigenwerte  $0 < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_s < 1$  nach S. N. Roy, P. L. Hsu und R. A. Fisher der Simultanverteilung

$$p(\theta_1, \dots, \theta_s) d\theta_1 \dots d\theta_s = C(s, m, n) \prod_{i=1}^s \theta_i^m (1 - \theta_i)^n d\theta_i \prod_{j < i} (\theta_i - \theta_j)$$

folgen, wobei die Konstante  $C$  sich aus den der angenommenen Nullhypothese 1., 2. oder 3. entsprechenden Werten von  $m, n$  bestimmt. Aus der bekannten kumulativen Verteilungsfunktion des größten Eigenwertes  $\theta_s$  gewinnt Verf. für  $s = 2, 3, 4, 5$  durch partielle Integration der darin auftretenden unvollständigen Betafunktionen Näherungsformeln zur Bestimmung der Fraktile, insbesondere der oberen 5%- und 1%-Punkte  $x$  für  $\theta_s$  (tabuliert für  $s = 2$ ). Vergleich dieser Näherungswerte mit den exakten ergibt Abweichungen in der 5-ten Dezimalstelle. Im Falle  $s = 2$  werden aus  $p(\theta_1, \theta_2)$  zudem die Wahrscheinlichkeitsdichten für  $\theta_1$  und  $\theta_2$  in Form hypergeometrischer Reihen hergeleitet.

M. P. Geppert.

**Lawley, D. N.:** Tests of significance for the latent roots of covariance and correlation matrices. *Biometrika* 43, 128—136 (1956).

Anknüpfend an mehrere von Bartlett stammende und kürzlich (M. S. Bartlett, dies. Zbl. 57, 354) übersichtlich koordinierte approximative  $\chi^2$ -Tests mit geeigneten Korrekturfaktoren, entwickelt Verf. approximative  $\chi^2$ -Kriterien zur Prüfung der Gleichheit von  $p - k$  Eigenwerten der Kovarianz- bzw. der Korrelationsmatrix einer  $p$ -variablen Normalverteilung, deren  $k$  größte Eigenwerte alle voneinander differieren. Entsprechende Korrekturfaktoren, die die approximative Übereinstimmung des Erwartungswertes (und der höheren Momente) der gewonnenen Kriterien mit denjenigen der entsprechenden  $\chi^2$ -Verteilung gewährleisten, werden sowohl bei bekanntem als auch bei unbekanntem hypothetischem Wert der  $p - k$  Eigenwerte bestimmt.

M. P. Geppert.

Gulati, R. L.: **Sequentielle Tests für den Korrelationskoeffizienten.** Mitteil.-Bl. math. Statistik 8, 202—233 (1956).

$(X, Y)$  are jointly normally distributed with unknown means and correlation coefficient, and  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$  are independent observations of  $(X, Y)$ . Sequential tests for the hypothesis specifying the value of the correlation coefficient ( $\varrho = \varrho_0$ ) are proposed, both for the case when the variances of  $X$  and  $Y$  are known and the case when these variances are more or less unknown. The OC-functions (operating characteristic = probability of accepting  $\varrho = \varrho_0$ ) and ASN-functions (average sample number = expected value of the number of pairs  $(X_i, Y_i)$  observed) for the test methods are derived and tabulated. The variables  $X_i$  and  $Y_i$  are transformed in the well-known manner to obtain variables  $X'_i$  and  $Y'_i$  with means zero. In the case when both variances are known Wald's sequential probability ratio test is constructed both for the variables  $(X'_i, Y'_i)$  and a variable  $U'_i = c_1 X'_i + c_2 Y'_i$ . The constants  $c_1$  and  $c_2$  are determined to satisfy certain optimum properties. When only the ratio between the variances is known a test is based on the sequence  $X_i/Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , of variables. For the case where the variables are completely unknown a test based on the signs of  $X'_i \cdot Y'_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , is constructed. Finally the author proposes a test based on the signs of  $X''_i \cdot Y''_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , where  $(X''_i, Y''_i)$  is obtained by a linear transformation of  $(X'_i, Y'_i)$ . An optimum choice of transformation is determined. This transformation depends on the ratio between variances.

E. Sverdrup.

Butcher, J. C.: **Treatment variances for experimental designs with serially correlated observations.** Biometrika 43, 208—212 (1956).

The author considers the design of field experiments in which fertilities of neighbouring plots follow a linear autoregressive scheme. He derives equations for the estimation of the parameters and discusses the variances and covariances of the estimated treatment effects. This study generalizes results by R. M. Williams (this Zbl. 46, 360), who considered schemes of order 1 and 2.

S. Vajda.

Angoff, William H.: **A note on the estimation of nonspurious correlations.** Psychometrika 21, 295—297 (1956).

Die Note ergänzt frühere Ausführungen (W. H. Angoff, dies. Zbl. 53, 276) und fußt auf den dortigen Definitionen und Resultaten. Verf. entwickelt ein Verfahren zur Schätzung der echten (Nicht-Schein-) Korrelation eines Teiles eines psychologischen Testes mit dem ganzen Test, und zwar für die beiden Fälle der Parallelität und der Nicht-Parallelität.

M. P. Geppert.

Edgett, George L.: **Multiple regression with missing observations among the independent variables.** J. Amer. statist. Assoc. 31, 122—131 (1956).

With reference to investigations by Matthai (this Zbl. 43, 137) the author finds explicit solutions to the maximum likelihood equations for the estimators of parameters of a trivariate normal population where observations are missing for just one of the variates. He established also the regression equation of one of the other variates on the remaining two.

S. Vajda.

**Creasy, Monica A.: Confidence limits for the gradient in the linear functional relationship.** J. Roy. statist. Soc., Ser. B 18, 65—69 (1956).

Aus  $n$  Binormalverteilungen mit der linearen Relation  $\eta_i = \beta + \alpha \xi_i$  genügenden Mittelwerten  $\xi_i, \eta_i$ , gleichen Varianzen  $\delta_x^2, \delta_y^2$  und Korrelation 0 liege eine Stichprobe von je einem Wertepaar  $(x_i, y_i)$  vor ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Anknüpfend an Resultate von D. V. Lindley (dies. Zbl. 31, 172), der sich eingehend mit der Schätzung von  $\alpha, \beta, \delta_x^2, \delta_y^2$  befaßt hat, leitet Verf. Konfidenzgrenzen für  $\alpha$  her in folgenden Fällen: a)  $\xi_i, \eta_i$  normal verteilt,  $\beta \neq 0$ ; b)  $\xi_i, \eta_i$  fest,  $\beta \neq 0$ ; c)  $\xi_i, \eta_i$  fest,  $\beta = 0$ ; d)  $\xi_i, \eta_i$  normal verteilt,  $\beta = 0$ .

*M. P. Geppert.*

## Geometrie.

### Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

• **Meserve, Bruce E.: Fundamental concepts of geometry.** (Addison-Wesley Mathematics Series.) 2<sup>nd</sup> edition. Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Publication Company, Inc. 1956 IX, 321 p. \$ 7,50.

Das nunmehr in guter Ausstattung vorliegende Buch stellt eine Überarbeitung des in dies. Zbl. 53, 285 besprochenen Werkes dar. Der Inhalt ist im wesentlichen der gleiche geblieben. Einige Umstellungen sind vorgenommen, z. B. ist das Kapitel über Topologie an den Schluß gestellt worden. Neu hinzugekommen ist ein Kapitel über die geschichtliche Entwicklung der Geometrie. Manche Ungenauigkeiten und Mängel der früheren Ausgabe sind ausgemerzt worden.

*H. Karzel.*

**Zaddach, Arno: Über Anti-Fano-Ebenen.** Math. Z. 65, 353—388 (1956).

Eine projektive Ebene, in welcher der Satz vom vollständigen Vierseit gilt, ist entweder eine Moufang-Ebene (d. h. in ihr gilt der kleine Desarguessche Satz) oder eine Anti-Fano-Ebene, das ist eine Ebene, in der jedes Viereck kollineare Diagonalepunkte hat. Für Moufang-Ebenen hat Moufang (dies. Zbl. 2, 406; 4, 362, 411; 6, 217; 7, 72) die folgenden Sätze bewiesen: (a) Jede von einem nichtausgearteten Viereck erzeugte Unterebene ist eine Ebene über einem Primkörper. (b) Jede von einem nicht ausgearteten Viereck und einem weiteren Punkt auf einer seiner Seiten erzeugte Unterebene ist eine Ebene über einer einfachen Erweiterung eines Primkörpers. (c) Jede von einem nichtausgearteten Viereck und zwei weiteren Punkten auf einer der Seiten erzeugte Unterebene ist eine Ebene über einem Schiefkörper. (d) die ganze Ebene ist eine Ebene über einem Alternativkörper. Verf. beweist die Gültigkeit von (b) auch für Anti-Fano-Ebenen [(a) ist für sie trivial]; ob auch (c) und (d) gelten, bleibt weiterhin offen. Hierzu betrachtet Verf. Ternärkörper, welche Anti-Fano-Ebenen erzeugen (Anti-Fano-Ternärkörper). Durch umfangreiche Rechnungen wird gezeigt, daß jeder von einem von 0 und 1 verschiedenen Element erzeugte Anti-Fano-Ternärkörper zerlegbar [d. h. es gilt  $T(\alpha, \xi, \alpha) = \alpha \xi + \alpha$ ] und (hinsichtlich seiner Addition und Multiplikation) eine einfache Erweiterung des Primkörpers der Charakteristik 2 ist. — Bem. d. Ref.: Inzwischen hat Gleason in einer noch unveröffentlichten Note mit gruppentheoretischen Methoden bewiesen: Jede endliche Anti-Fano-Ebene ist desarguessch. Damit sind für endliche Anti-Fano-Ebenen auch (c) und (d) als richtig erkannt worden.

*S. André.*

**Schütte, Kurt: Schließungssätze für orthogonale Abbildungen euklidischer Ebenen.** Math. Ann. 132, 106—120 (1956).

Als euklidische Ebenen werden hier die in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 65, 134) eingeführten affin-metrischen Ebenen bezeichnet. Durch Hinzufügen der uneigentlichen Punkte und der uneigentlichen Geraden  $\omega$  wird eine euklidische Ebene zu einer projektiven erweitert. Eine Korrelation dieser projektiven Ebene heißt orthogonal, wenn bei ihr Bild und Urbild von  $\omega$  eigentliche Punkte  $O_2, O_1$  sind und für jeden eigentlichen Punkt  $P \neq O_1$  sowie jede eigentliche Gerade



$g$  stets  $P' \perp O_1 P$ ,  $g \perp O_2 g'$  gilt (mit  $P', g'$  als den Bildern von  $P, g$ ). Der Satz von den anti-orthologen Vierecken [im oben angegebenen Referat mit (S) bezeichnet] lautet: Gelten für zwei echte Vierecke  $P_0, \dots, P_3$  und  $Q_0, \dots, Q_3$  fünf der sechs Aussagen  $P_0 P_1 \perp Q_2 Q_3, \dots$ , so auch die sechste. Schränkt man diesen Schließungssatz dadurch ein, daß man  $P_0, P_1, Q_0$  sowie die Gerade  $g = Q_2 Q_3$  fest wählt, so spricht man vom  $(P_0, P_1; Q_0, g)$ -Satz. Zu den eigentlichen Punkten  $O_1, O_2$ ,  $P \neq O_1$  und einer eigentlichen Geraden  $g \perp O_1 P$ , die nicht durch  $O_2$  geht, gibt es nun genau dann eine orthogonale Korrelation, die  $O_1, \omega, P$  in  $\omega, O_2, g$  überführt, wenn der  $(O_1, P; O_2, g)$ -Satz gilt. Bei einer involutorischen orthogonalen Korrelation, also einer orthogonalen Polarität, ist  $O_1 = O_2$ , und dieser Punkt wird als Zentrum  $O$  bezeichnet. Genau dann gibt es eine orthogonale Polarität mit Zentrum  $O$ , die einen eigentlichen Punkt  $P \neq O$  in eine eigentliche Gerade  $g \perp O P$ , die nicht durch  $O$  geht, überführt, wenn in jedem Fünfeck mit einem Eckpunkt  $P$  und der Gegenseite  $g$ , bei dem vier Höhen durch  $O$  gehen, auch die fünfte Höhe (= Lot von einem Eckpunkt  $\neq P$  auf die Gegenseite) durch  $O$  geht. Statt des hier vorkommenden „Fünfecksatzes“ genügen für die Existenz von orthogonalen Polaritäten zwei seiner Spezialisierungen: Der konditionale Höhenschnittpunktsatz (Hat ein Dreieck  $ABC$  einen Höhenschnittpunkt  $S$ , so auch jedes Dreieck  $ABD$  mit  $DC \perp AB$ ) und der konditionale Fünfecksatz (einschränkende Voraussetzung: Das Dreieck aus dem Schnittpunkt der vier Höhen und zwei nicht benachbarten der ersten vier Ecken hat einen Höhenschnittpunkt). — Als Sonderfall des Satzes von den anti-orthologen Vierecken wird der Trapezsatz betrachtet: Für die echten Vierecke  $A_1, \dots$  und  $B_1, \dots$  mit  $A_1 A_2 \parallel A_3 A_4$ ,  $B_1 B_2 \parallel B_3 B_4$  folgt  $A_1 A_3 \perp B_1 B_3$  aus den übrigen Aussagen  $A_i A_k \perp B_i B_k$ . Aus dem Trapezsatz folgt der kleine Desarguessche Satz mit beliebigem eigentlichen Punkt als Zentrum. Das ermöglicht Koordinateneinführung: Die euklidischen Ebenen mit Fano-Axiom (s. die Bemerkung w. u.) und Trapezsatz sind gerade die euklidischen Ebenen über Alternativkörpern einer Charakteristik  $\neq 2$ , worin die Geraden mit den Gleichungen  $y = ax$ ,  $x = (ka)y$  zueinander orthogonal sind; dabei ist  $k \neq 0$  und  $a \rightarrow \bar{a}$  eine umkehrbare Abbildung des Alternativkörpers auf sich mit  $1 = \bar{1}$ ,  $a + \bar{b} = \bar{a} + b$ ,  $\bar{a^{-1}} = \bar{a}^{-1}$ ,  $\bar{k} \bar{a} = a k$ . Hinzufügen des konditionalen Höhenschnittpunktsatzes und des konditionalen Fünfecksatzes bedeuten, daß  $a \rightarrow \bar{a}$  ein involutorischer Antiautomorphismus mit Fixelement  $k$  ist, dessen Fixelemente sämtlich im Kern des Alternativkörpers liegen. Liegt ein echter Alternativkörper vor, so ist  $a$  das zu  $a$  konjugierte Element und jede orthogonale Korrelation mit  $O_1 = O_2$  ist eine Polarität. Bemerkungen des Ref.: Da das Fano-Axiom nur benötigt wird, um das Rechtskürzungsgesetz aus dem Linkskürzungsgesetz herleiten zu können, ist es nach einem Ergebnis von San Soucie (dies. Zbl. 64, 34) überflüssig; daß der Koordinatenbereich ein Alternativkörper ist, ergibt sich aus der gewonnenen eingeschränkten Gültigkeit des Desarguesschen Satzes bereits rein projektiv ohne die Orthogonalität; bei der Herleitung der Koordinatendarstellung wurde die Voraussetzung der Existenz nichtisotroper Geraden vergessen.

G. Pickert.

• Lobačevskij, N. I.: Drei Arbeiten zur Geometrie: Geometrie. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelen. Pangeometrie. Mit einer Einleitung von A. P. Norden und Bemerkungen von V. F. Kagan. (Klassiker der Naturwissenschaft: Mathematik; Mechanik, Physik, Astronomie.) Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 416 S. R. 14,60 [Russisch].

Die sorgfältige Ausstattung des vorliegenden Werkes verrät wieder einmal die besondere Liebe, welche die heutigen russischen Mathematiker ihrem großen Landsmann entgegenbringen. Knapp die Hälfte des Buches besteht aus einem Neudruck folgender drei Schriften von Lobačevskij: a) „Geometrie“, Vorlesungen aus dem J. 1823, die zu seinen Lebzeiten infolge Ablehnung durch den Petersburger Akademiker Fuß nicht gedruckt werden konnten und erst 1909 zuerst veröffentlicht wurden,

b) „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien“, auf deutsch in Berlin im Jahre 1840 erschienen, im vorliegenden Bande in einer russischen Übersetzung von Kagan gedruckt, c) „Pangeometrie“ aus dem Jahre 1855, kurz vor dem Tode des Autors zum 50-jährigen Jubiläum der Kasaner Universität geschrieben. Fast ebenso umfangreich wie diese genannten drei Arbeiten sind die ausführlichen Kommentare dazu. Diese sind von dem im Jahre 1953 verstorbenen Mathematiker Kagan für die in den Jahren 1946 bis 1951 zum größten Teil herausgekommene Gesamtausgabe der Werke Lobačevskijs verfaßt worden: sie befinden sich, ohne den Text zu stören, hinter den Werken. Zu Beginn gibt Norden einen Überblick über die geometrischen Ideen Lobačevskijs und am Schluß des vorliegenden Buches kennzeichnet Bronstein alle seine geometrischen Werke, darunter auch die abgedruckten drei Schriften.

W. Burau.

● Delone, B. N.: **Elementarer Beweis der Widerspruchsfreiheit der Planimetrie Lobačevskijs**. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 140 S. R. 3.05 [Russisch].

Stimmt im wesentlichen mit dem in dies. Zbl. 52, 372 besprochenen Buch überein.

Coxeter, H. S. M.: **Hyperbolic triangles**. Scripta math. 22, 5—13 (1956).

Nach einem kurzen geschichtlichen Überblick folgen drei sehr übersichtliche Beweise klassischer Sätze der hyperbolischen Geometrie: 1. Die Fläche eines Dreiecks ist seinem Winkeldefekt proportional (Beweis nach Gauß in seinem Brief an Bolyai) 2. Die Fläche eines asymptotischen Dreiecks ist endlich (Hilfssatz für 1., Beweis nach Liebmann); 3. Die inneren und äußeren Winkelhalbierenden eines Dreiecks bilden die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks (in der projektiven Erweiterung der hyperbolischen Ebene).

H. Lenz.

### Elementargeometrie:

● Klein, F.: **Famous problems of elementary geometry**. Authorized translation by Wooster Woodruff Beman and David Eugene Smith. Second ed. revised and enlarged with notes by Raymond Clare Archibald. New York: Dover Publications, Inc. 1956. XI, 92 p. 16 fig. \$ 1,—.

Das vorliegende Buch ist eine unveränderte Wiederauflage der 2. Auflage der Übersetzung von F. Kleins Buch: „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie“ durch W. W. Beman u. D. E. Smith, ergänzt durch Anmerkungen von R. C. Archibald von 1930. Die Anmerkungen bringen vor allem historische Ergänzungen zu den Gaußschen Polygonen und der Irrationalität von  $\pi$ . Sie sind im wesentlichen ein Extrakt von R. C. Archibalds Arbeit in Amer. math. Monthly, 21, 247—259 (1914).

A. Bergmann.

● Anspach, Pierre A. L.: **Aperçu de la théorie des polygones réguliers. I—III**. Bruxelles: Chez l'auteur 1955, 1956, 1956. p. 1—92, 93—192, 193—298.

Die Seiten der drei einem Kreis eingeschriebenen regelmäßigen Siebenecke, des konvexen und der beiden Sternsiebenecke, bilden die Seiten eines Dreiecks, von Verf. heptales Dreieck genannt. Dieses bildet das Bezugsdreieck für eine Unzahl von Sätzen und Sätzchen, über die der von der Sache begeisterte Verf. in immer neuen Wendungen sein Entzücken ausdrückt. Es handelt sich im wesentlichen um Eigenschaften des Sieben-, Elf- und Dreizehnecks, um Kreise und Kegelschnitte, die zu ihnen in Beziehung stehen, und eine Cassinische Lemniskate, die dem heptalen Dreieck umbeschrieben ist. — Der Druck ist sehr unübersichtlich, da Verf. es unterlassen hat, die wesentlichen Ergebnisse hervorzuheben.

M. Zacharias.

Goormaghtigh, R.: **Sur une généralisation d'un théorème de Carnot**. Mathesis 65, 192—196 (1956).

Es handelt sich um den Carnotschen Satz über die auf den Seiten eines Polygons durch eine Gerade bestimmten Abschnitte. Die Verallgemeinerung bezieht sich

auf ein Paar von Polygonen einer Ebene mit gleicher Seitenzahl  $A_1 A_2 \dots A_n$  und  $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ , deren entsprechende Seiten  $A_i A_{i+1}$ ,  $A'_i A'_{i+1}$  sich in den Punkten  $B_{i, i+1}$  schneiden. Bezeichnet man die Winkel der von  $A'_i$  ausgehenden Seiten des zweiten Polygons mit  $A'_i A_i$  mit  $\vartheta_{i, i+1} = (\angle A'_i A_i, A'_i A'_{i+1})$  und  $\vartheta_{i, i-1} = (\angle A'_i A_i, A'_i A'_{i-1})$ , so lautet die Verallgemeinerung

$$\frac{A_1 B_{12}}{B_{12} A_2} \cdot \frac{A_2 B_{23}}{B_{23} A_3} \dots \frac{A_n B_{n1}}{B_{n1} A_1} = \frac{\sin \vartheta_{12}}{\sin \vartheta_{21}} \cdot \frac{\sin \vartheta_{23}}{\sin \vartheta_{32}} \dots \frac{\sin \vartheta_{n1}}{\sin \vartheta_{1n}}.$$

Weitere Sätze beziehen sich auf den Fall, daß  $A_1 A_2 \dots A_n$  und  $A'_1 A'_2 \dots A'_n$  zwei unendlich benachbarte Lagen eines in seiner Ebene veränderlichen Polygons sind, insbesondere wenn das veränderliche Polygon einem festen Kegelschnitt einbeschrieben ist, oder wenn seine Ecken  $n$  parallele Geraden beschreiben. *M. Zacharias.*

**Fabricius-Bjerre, Fr.: Some theorems of J. Hjelmslev on plane, skew, and spherical quadrangles.** Nordisk mat. Tidsskrift 4, 139—148, engl. Zusammenfassg. 176 (1956) [Dänisch].

In einem ebenen Viereck  $ABCD$  sei  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $AD = d$ ,  $AC = e$ ,  $BD = f$ . Entsprechende Bedeutungen haben  $a_1, b_1, \dots, f_1$  in einem Viereck  $A_1 B_1 C_1 D_1$ . Die beiden Vierecke heißen wechselseitig entsprechend, wenn  $a + a_1 = b + b_1 = c + c_1 = d + d_1$ ,  $a + b + c + d = a_1 + b_1 + c_1 + d_1$ ,  $e = e_1$  ist, und wenn entweder keins von beiden oder beide durch die Diagonalen  $AC$  und  $A_1 C_1$  geteilt werden. — Für ebene entsprechende Vierecke gelten die Sätze: I.  $f = f_1$ . II. Die Abstände der Mitten der Diagonalen sind gleich. III. Sind  $T$  und  $T'$  die Inhalte der Dreiecke  $ABC$  und  $ADC$ , so ist  $TT' = T_1 T'_1$ . IV. Entweder beide Vierecke oder keins von beiden können einem Kreis einbeschrieben werden. — Für windschiefe entsprechende Vierecke mit gleichen diedralen Winkeln längs den entsprechenden Diagonalen  $e = e_1$  gelten I bis III, und die Tetraeder  $ABCD$ ,  $A_1 B_1 C_1 D_1$  haben gleichen Rauminhalt. — Für sphärische entsprechende Vierecke mit Seiten  $< 180^\circ$  gelten I und IV, aber nicht II. Satz III gilt, wenn man die Inhalte der Dreiecke durch die Inhalte der entsprechenden Tetraeder mit Ecke im Mittelpunkt der Kugel ersetzt. *M. Zacharias.*

**Yzeren, J. van: Isogonale Beziehungen im vollständigen Viereck und in der Malfattischen Figur.** Simon Stevin 31, 19—26 (1956) [Holländisch].

Einige einfache Sätze bringen die isogonale Verwandtschaft in Verbindung mit Spiegelungen. Diese Sätze werden auf die Figur eines vollständigen Vierecks mit seinen 12 Winkelhalbierenden angewendet. Besteht das Viereck insbesondere aus den Ecken eines Dreiecks und seinem Inkreismittelpunkt, so ergeben die isogonalen Beziehungen eine sehr einfache Konstruktion der Mittelpunkte der Malfattischen Kreise (deren jeder zwei Seiten und die beiden anderen Kreise berührt).

*M. Zacharias.*

**Court, Nathan Altshiller: Sur quatre sphères réelles deux à deux orthogonales.** Mathesis 65, 53—67 (1956).

(A), (B), (C), (D) seien vier reelle, paarweise orthogonale Kugeln. Das Tetraeder ihrer Zentren  $ABCD$  ist orthozentrisch Ihre orthogonale Kugel (H) ist imaginär. Die Ähnlichkeitskugel, die radikale Kugel und die beiden „Antiähnlichkeitskugeln“ von je zwei der vier Kugeln sind ebenfalls paarweise orthogonal. [Die Radikalkugel (BC) von (B) und (C) hat zum Durchmesser die Zentrale BC. Die Antiähnlichkeitskugeln (X), (X') von (B), (C) haben die Ähnlichkeitspunkte X, X' von (B), (C) zu Zentren, gehören dem Büschel (B) (C) an, sind orthogonal zueinander und zu (H)]. Man erhält so 6 Quadrupel von paarweise orthogonalen Kugeln. Weiter untersucht Verf. die Paare der Schnittpunkte der gegebenen Kugeln, genommen zu je drei, und die aus ihnen gebildeten Tetraeder, die alle isodynamisch sind [N. A. Court, Mathesis 45, 315—351 (1931)]. Anwendungen und Untersuchung der Aufgabe, durch je drei von vier nicht koplanaren Punkten vier paarweise orthogonale Kugeln zu legen, bilden den Schluß der Arbeit. *M. Zacharias.*



● **Lopšic, A. M.:** Berechnung der Flächeninhalte orientierter Figuren. (Populäre Vorlesungen über Mathematik, Nr. 20.) Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 60 S. R. 0,90 [Russisch].

Dem Heft ist Stoff aus den Oberklassen der Schule zugrunde gelegt. Im ersten Teil wird der Begriff des orientierten Inhaltes orientierter Vielecke ausführlich erläutert und der Leser an Hand einiger Aufgaben aus der Schulgeometrie mit diesem Begriff vertraut gemacht. Der zweite Teil bringt eine kurze Beschreibung von Polar- und Linearplanimeter und erklärt ihre Wirkungsweise am Beispiel der Ausmessung des orientierten Inhaltes von Vielecken. Im dritten Teil wird ein Vierreck aus seinen Seiten und Winkeln berechnet.

*H. Salzmann.*

● **Boltjanskij, V. G.:** Gleich große und zerlegungsgleiche Figuren. (Populäre Vorlesungen über Mathematik. Nr. 22). Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 64 S. R. 1,— [Russisch].

Das vorliegende Heft bringt eine gute Einführung in die Inhaltslehre, wobei vor allem auch die modernen Ergebnisse der Hadwigerschen Schule Berücksichtigung finden. Zunächst wird gezeigt, daß bei ebenen Polygonen die Zerlegungsgleichheit gleichwertig zu ihrer Inhaltsgleichheit ist. Darauf wird der Satz von Hadwiger und Glur gezeigt, daß man flächengleiche Polygone auch so zerlegen kann, daß die entsprechenden Stücke lediglich mittels Schiebungen und Punktspiegelungen zur Deckung gebracht werden. Es wird ferner bewiesen, daß die Gruppe der Schiebungen und Punktspiegelungen auch die engste ist, bezüglich der man alle flächengleichen Polygone in äquivalente Teile zerlegen kann. Im Teil II wird der bekannte Satz von Dehn bewiesen, daß es im  $R_3$  volumengleiche, aber nicht zerlegungs- oder ergänzungsgleiche Polyeder gibt, wofür man Würfel und Tetraeder bereits als Beispiele finden kann. Der Beweis dafür wird in moderner Gestalt mit Hilfe eines Lemmas von Hadwiger über additive Funktionen der Kantenwinkel geführt. Nach kurzer Erörterung der Möglichkeiten, Inhalte durch Grenzwerte zu erklären, wird der Satz von Siedler über die Gleichwertigkeit von Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit von Polyedern bewiesen.

*W. Burau.*

● **Klaf, A. Albert:** Trigonometry refresher for technical men. Unabridged and unaltered republication of the first edition. New York: Dover Publications, Inc. 1956. X, 629 p. \$ 1,95.

In Form von Fragen und Antworten wird der Leser schrittweise mit den Grundbegriffen und den wichtigsten Formeln der ebenen und sphärischen Trigonometrie einschließlich ihrer Herleitung bekannt gemacht und an Hand einer Fülle von Beispielen aus Mechanik, Landmessung, Nautik und anderen Gebieten der Technik über die zweckmäßige Durchführung trigonometrischer Rechnungen belehrt. Dabei wird auch die Rechengenauigkeit erörtert und eine eingehende Erläuterung zum Gebrauch der Tafelwerke und des Rechenschiebers gegeben. Dank der straffen Gliederung ist eine geschlossene Darstellung des gesamten Stoffgebietes erreicht worden, die dem Techniker, der sich heute in wachsendem Maße mit trigonometrischen Rechnungen befassen muß, als leicht faßliche erste Einführung dienen kann und auch dem mit der Materie schon vertrauten Praktiker bei speziellen Fragen von Nutzen sein wird.

*W. Hofmann.*

### Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

**Laugwitz, Detlef:** Über die Invarianz quadratischer Formen bei linearen Transformationen und das Raumproblem. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. 1956, 21—25 (1956).

Verf. beweist mehrere, das Helmholtzsche Raumproblem betreffende Sätze, die einerseits von recht schwachen Voraussetzungen ausgehen und deren Beweise andererseits durch sehr elegante elementar-geometrische Schlüsse ausgezeichnet

sind. Ein wesentliches Hilfsmittel der Beweisführung ist das Loewner-Ellipsoid. — Für den Satz, daß jede beschränkte Gruppe von linearen homogenen Transformationen eines endlichdimensionalen reellen Vektormoduls eine invariante definite quadratische Form besitzt, wird ein einfacher geometrischer Beweis angegeben. Das Helmholtzsche Raumproblem wird unabhängig von Voraussetzungen über infinitesimale Elemente in folgender Form bewiesen: Zu einer Gruppe  $\mathfrak{G}$  von linearen homogenen Transformationen eines reellen Vektorraumes  $\mathfrak{L}$  endlicher Dimension mit den Eigenschaften: (a)  $\mathfrak{G}$  ist beschränkt und (b) zu  $\xi, \eta \in \mathfrak{L}$  ( $\xi, \eta \neq 0$ ) gibt es ein  $B \in \mathfrak{G}$  und ein  $\mu > 0$  mit  $B\xi = \mu\eta$  — gibt es eine definite,  $\mathfrak{G}$ -invariante quadratische Form  $Q$ ; jede Invariante ist eine Funktion von  $Q$ . Derselbe Satz wird sodann für Räume beliebiger (unendlicher) Dimension bewiesen, wobei entsprechende Voraussetzungen hinsichtlich aller zweidimensionalen Unterräume erfüllt sein müssen. Schließlich wird eine geometrische Kennzeichnung der definiten quadratischen Formen ohne Benutzung linearer Abbildungen gegeben:  $F$  sei eine Minkowskische Metrik in einem zentral-affinen Raum endlicher Dimension mit  $F(\xi) > 0$  für  $\xi \neq 0$ ,  $F(a\xi) = aF(\xi)$  für  $a > 0$ , die Menge  $\{\xi: F(\xi) \leq 1\}$  ist beschränkt. Unter diesen Voraussetzungen ist  $F^2$  genau dann eine quadratische Form, wenn jede Invariante längs der Indikatrix  $F = 1$  konstant ist. Wieder wird der analoge Satz für Räume beliebiger Dimension bei entsprechenden Voraussetzungen über die zweidimensionalen Unterräume bewiesen.

H.-J. Kowalsky.

**Loewner, Charles:** On some transformation semigroups. J. rat. Mech. Analysis 5, 791—804 (1956).

Die Transformation, die in einem  $n$  dimensionalen Raume aus einer Translation durch eine Homographie entsteht, wird hier eine projektive  $(p, l)$ -Translation genannt: sie besitzt einen Fixpunkt  $p$  und eine durch  $p$  hindurchgehende Fixhyperbene  $l$ . Wird jetzt  $p$  auf dem Umriß eines konvexen Gebietes  $D$  gewählt und ist  $l$  eine Hyperebene, die  $D$  nicht durchschneidet, so betrachtet Verf. alle  $(p, l)$ -Translationen, die  $D$  in ein in  $D$  enthaltenes Gebiet  $D'$  umwandeln; bei veränderlichen  $p, l$  erzeugen solche Translationen eine Semigruppe  $P_D$ . Ganz ähnlich erhält man eine andere Semigruppe  $M_D$ , wenn man die projektiven durch Möbiussche winkeltreue Transformationen ersetzt und diejenigen Transformationen betrachtet, die wieder aus einer Translation entstehen; für eine solche Möbiussche Translation gibt es ein Linienelement  $e$ , so daß jeder Kreis durch  $e$  in sich selbst verwandelt wird; man erhält die Semigruppe  $M_D$ , wenn man das Element  $e$  in einem Punkt des Umrisses von  $D$  zum Umriss selbst orthogonal setzt. — Nach allen diesen Erklärungen beweist Verf. im 1. Teil, daß die Jacobische Determinante  $J(p)$  einer Transformation von  $P_D$ , die den Punkt  $p$  von  $D$  in  $p'$  verwandelt, folgender Ungleichung genügt:  $0 < J(p) \leq \varphi^{n+1}(p, p') \leq 1$ , wobei  $\varphi(p, p')$  das Verhältnis der Entfernungen von  $p, p'$  vom Schnittpunkte der Geraden  $p, p'$  mit dem Umriß von  $D$  bedeutet. Für  $M_D$  hat man ähnlicherweise:  $0 < J(p) \leq \psi(p, p') \leq 1$ , falls aber  $D$  eine Sphäre ist; hier ist  $\psi(p, p') = (\overline{p'p'/p''p})^{2n}$ , wo  $p''$  der Schnittpunkt des Kreises durch  $p, p'$  und orthogonal zu  $D$  mit  $D$  selbst bedeutet. — Im 2. Teil ist  $D$  ein Kreis in der Ebene, z. B. der Kreis  $|z| < 1$  der komplexen Ebene. Es werden dann alle Transformationen von  $M_D$  betrachtet, die einen Punkt  $z_0$  von  $D$  festlassen, um zu untersuchen, in welche Vektoren  $\zeta'_0$  ein aus  $z_0$  ausgehender Vektor  $\zeta_0$  von den betrachteten Transformationen von  $M_D$  verwandelt werden kann. Man findet  $\zeta'_0 = \zeta_0 e^{i\theta} e^{-\mu} \sqrt{|\theta|} (|\theta| + 4\pi)$ , wo  $|\theta| \leq \pi$ ,  $\mu \geq 1$ . — Im 3. Teil wird  $D$  als Sphäre angenommen; dann ist  $P_D$  der Schnitt derjenigen Semigruppen  $S$  der Gruppe  $G$  aller Homographien von  $D$  in sich selbst, welche folgenden Bedingungen genügen:  $S$  verwandelt  $D$  in sich;  $S$  ist invariant in  $G$ ;  $S$  wird von ihren infinitesimalen Transformationen vollständig erzeugt; solche infinitesimalen Transformationen bilden ein geschlossenes System; es gibt in  $S$  Transformationen, die  $P_D$  nicht angehören. Etwas Ähnliches gilt auch, wenn  $P_D$  durch  $M_D$  und  $G$  durch die Möbiussche Gruppe ersetzt werden. E. Togliatti.

Masotti Biggiogero, Giuseppina: Una osservazione sulla costruzione delle coniche per punti e relative tangenti. *Periodica Mat.*, IV. Ser. **34**, 8—12 (1956).

Železina (Zhelezina), I. I.: Line-geometry of degenerated non-Euclidean spaces. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **106**, 959—962 (1956) [Russisch].

Der reelle projektive Raum  $P_3$  kann zu einem metrischen Raum gemacht werden durch Auszeichnung zweier absoluten Ebenen  $E_1, E_2$  sowie zweier absoluten Punkte  $P_1$  und  $P_2$  auf der Schnittgeraden  $g = E_1 E_2$ . Je nachdem nun, ob  $E_1, E_2$  und  $P_1, P_2$  reell oder konjugiert komplex angenommen werden, ergibt das 4 Raumtypen. Bei geeigneter Koordinatenwahl lassen sich die Bewegungen in allen 4 Geometrien matrizenmäßig leicht aufschreiben. Verf. betrachtet insbesondere alle Geraden von  $P_3$ , die  $g$  nicht treffen. Diese von  $\infty^4$  reellen Parametern abhängenden Geraden können durch ihre Schnittpunkte mit  $E_1$  und  $E_2$  festgelegt werden und damit leicht auf die Punkte sog. pseudoeuklidischer Ebenen abgebildet werden, wovon 3 Typen auftreten, die Verf. mit  $R_2(e), R_2(i), {}^1R_2(e)$  bezeichnet. Die Bezeichnungen sind dabei so gewählt, daß  $R_2$  die gewöhnliche Gaußsche Ebene ist und  ${}^1R_2$  die Ebene der Größen  $\alpha = a + b e$  ( $e^2 = 1$ ) ( $a$  und  $b$  reelle Zahlen) bedeutet.  $R_2(i)$  und  ${}^1R_2(e)$  entstehen hieraus, wenn man die  $a$  und  $b$  ihrerseits nicht als reell, sondern als komplex, bzw. als Größen des Systems mit den Einheiten  $1, e$  annimmt. Demnach ist  $R_2(i)$  das System der Größen:  $\alpha = (a + b j) + i(c + d j)$  ( $i^2 = j^2 = -1, i j = j i$ ) und  ${}^1R_2(e)$  das der Größen  $\alpha = (a + b f) + e(c + d f)$  ( $e^2 = f^2 = 1, e f = f e$ ). Als viertes System tritt hierbei noch die sinngemäß mit  ${}^1R_2(i)$  zu bezeichnende Menge aller Größen  $\alpha = (a + b i) + e(c + d i)$  ( $i^2 = -1, e^2 = 1, i e = e i$ ) auf. Doch wenn man  $i e$  als  $j$  erklärt, erweisen sich die Systeme  ${}^1R_2(i)$  und  $R_2(i)$  als isomorph.

W. Burau.

Solnceva, T. V.: Einige Bemerkungen zu der Arbeit von D. Z. Gordevskij „Mehrdimensionale Analoga des Hyperboloids“. *Uspechi mat. Nauk* **11**, Nr. 3 (69), 175—176 (1956) [Russisch].

Verf. bemerkt im Anschluß an eine Arbeit von Gordevski (dies. Zbl. **65**, 138), daß, wie auch schon im Referat bemerkt wurde, die behandelten Analoga längst unter dem Namen Segresche Mannigfaltigkeiten bekannt sind. W. Burau.

Facciotti, Guido: La parabola sulla sfera. *Periodica Mat.*, IV. Ser. **34**, 38—50 (1956).

Marmion, A.: Épi- ou hypocycloïdes semblables tangentes à 2, 3 ou 4 droites. *Mathesis* **65**, 234—252 (1956).

Es werden viele Eigenschaften der im Titel angegebenen Familien von Radlinien in elementarer Weise untersucht. Schlüssel hierzu ist die folgende Erzeugungsweise der Radlinien: Werden zwei Punkte  $M$  und  $N$  auf einem Kreis um  $O$  so bewegt, daß die von ihnen beschriebenen Kreisbogenstücke der Längen  $u, v$ , gemessen von einem festen Ausgangspunkt  $S$  aus, ständig proportional sind, also etwa  $v = k u$  mit festem  $k$  gilt, so hüllt die Gerade  $MN$  eine Epi- bzw. Hypozykloide ein, je nachdem ob  $k \geq 0$ . Der jeweilige Berührungspunkt  $T$  teilt die Strecke  $MN$  so, daß für das Teilverhältnis gilt:  $(NMT) = -k$ . Diese Größe  $k$  charakterisiert nun eindeutig eine Familie von ähnlichen Radlinien; für rationales (irrationales)  $k$  sind sie algebraisch (transzendent).

H. R. Müller.

### Algebraische Geometrie:

Engel, Wolfgang: Invariante Divisorenscharen bei endlichen Gruppen von Cremonatransformationen. *J. reine angew. Math.* **196**, 59—66 (1956).

Verf. beweist, indem er sich zur Reduktion der linearen Divisorenscharen der von Jung (dies. Zbl. **20**, 162) angegebenen Vertauschungs- und Fundamentaltransformationen bedient, den von Wiman [Math. Ann. **48**, 195—240 (1897)] in geometrischer Form gegebenen Satz, daß als invariante lineare Divisorenscharen



nur endlich viele Typen existieren. — Zum Beweis dieses Ergebnisses gelangt er, indem er zeigt, daß jede endliche Gruppe von Cremonatransformationen eine invariante lineare Divisorenschar von Primdivisoren des Geschlechtes 0 oder 1 besitzt. Daraus leitet er weiter ab, daß zur Bestimmung der invarianten linearen Divisorenscharen aller nichtisomorphen Gruppen von Cremonatransformationen die Aufzählung aller birational verschiedenen linearen Divisorenscharen der Geschlechter 0 und 1 genügt, da stets eine lineare Divisorenschar des Geschlechtes 0 oder 1 vorhanden ist, wenn überhaupt eine existiert. Er zählt sodann alle Typen der linearen Divisorenscharen aus Primdivisoren des Geschlechtes 0 auf, und ebenfalls jene des Geschlechtes 1.

*M. Piazzolla-Beloch.*

**Thalberg, Olaf M.:** „Conic involutions“ with a coincident curve of order  $3n + 4$ . Avhdl. Norske Vid. Akad. Oslo I 1956, Nr. 1, 20 p. (1956).

L'A. étudie une involution plane dont les couples sont sur les coniques d'un faisceau et qui possède une courbe de points unis  $K$  d'ordre  $4n + 3$  passant  $2n + 1$  fois par les points-base  $A$  du faisceau, d'abord pour  $n = 0, 1$ , puis pour  $n$  quelconque. Il existe  $4n + 4$  coniques du faisceau touchant  $K$  en des points  $F$ , fondamentaux pour la transformation. Celle-ci fait correspondre aux droites du plan des courbes d'ordre  $8n + 9$  passant  $4n + 4$  fois par les quatre points  $A$  et 2 fois par les  $4n + 4$  points  $F$ .

*L. Godeaux.*

**Teixidor, J.:** Über die Kurven, die einfacher, vollständiger Schnitt zweier algebraischer Flächen sind. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 20, 155—164 (1956) [Spanisch].

Les tangentes aux intersections d'un plan  $P$  avec la courbe  $C$  intersection complète de deux surfaces  $f = 0$ ,  $g = 0$  d'ordre  $m$  et  $n$  ( $m \geq n$ ) sont liées par  $n(m - 1)$  relations. Soit alors  $z = 0$ , le plan  $P$ ; si nous posons  $a(x, y, z) = a(x, y) + z a_1(x, y) + \dots$  forme d'ordre  $n + m - 2$  nulle pour les points  $P_i$  sections de  $C$  par  $P$ ,  $\bar{f} = f(x, y, 0)$ ,  $\bar{g} = g(x, y, 0)$ ,  $a = Af + Bg$ , si on introduit les déterminants jacobiens  $J_z = D(f, g)/D(x, y)$  et si on pose encore  $p_j = [J_x/J_z]_{P_j}$ ,  $q_j = [J_y/J_z]_{P_j}$ , l'intégrale abélienne  $\int a dz/z^2 J_z$  conduit au résidu

$$\sum_{j=1}^{mn} \left\{ \left( \frac{\partial a}{\partial x} J_x + \frac{\partial a}{\partial y} J_y + \frac{\partial a}{\partial z} J_z \right) \middle/ J_z^2 \right\}_{P_j} = 0$$

qui équivaut aux deux séries de relations,

$$\sum_{j=1}^{mn} \left( \frac{A}{J_z} \right)_{P_j} \left\{ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{P_j} p_j + \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \right)_{P_j} q_j \right\} = 0, \quad \sum_{j=1}^{mn} \left( \frac{B}{J_z} \right)_{P_j} \left\{ \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{P_j} p_j + \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} \right)_{P_j} q_j \right\} = 0$$

en nombre respectivement  $m(m - 1)/2$  et  $n(n - 1)/2$ . L'étude de leur matrice montre qu'il n'y a que  $n(m - 1)$  de ces relations indépendantes de celles correspondant aux éléments d'ordre zero de  $C$  avec origines aux points  $P_j$ . Si  $m = n$ , on peut donner des expressions plus simples. Pour  $m = n = 2$ , relations de Blaschke (Blaschke - Bol, Geometrie der Gewebe, p. 74—79, ce Zbl. 20, 67), dont l'A. donne une élégante interprétation géométrique.

*B. d'Orgeval.*

**Orgeval, B. d':** A propos des surfaces elliptiques avec un faisceau de courbes de genre 4. Publ. sci. Univ. d'Alger, Sér. A 2, 5 (1956).

Dans cette Note vient reconnue l'antériorité des travaux de M<sup>lle</sup> Maria Scafati sur le même problème traité par l'A. de la présente Note, et M<sup>lle</sup> Scafati vient invitée à souligner et expliquer les divergences entre les résultats contrastants.

*M. Piazzolla-Beloch.*

**Godeaux, Lucien:** Sur la structure des points de diramation d'une surface multiple, d'ordre 157. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 42, 413—418 (1956).

La surface  $a_1 x_1^{13} x_2 + a_2 x_2^{13} x_3 + a_3 x_3^{13} x_1 + a_4 x_4^{14} = 0$  possède une involution d'ordre 157 présentant trois points unis, dont la structure est la même. Leur étude, par les procédés classiques de l'A. se fait à partir des systèmes:  $l + 57m = 0$ ,

$m + 146l = 0 \pmod{157}$ . La surface image de l'involution possède trois points de diramation d'ordre 6 dont le cône tangent se décompose en un cône quadrique, un cône cubique rationnel ayant avec le précédent une génératrice commune, enfin un plan contenant une génératrice du cône cubique; à ce point sextuple sont infiniment voisins six points doubles biplanaires dont le premier est situé sur la droite commune au plan et au cône cubique.

*B. d'Orgeval.*

**Godeaux, Lucien:** Sur les droites des surfaces cubiques d'un système linéaire. *Mathesis* 65, 12—15 (1956).

Les droites d'un système  $\infty^3 |F|$  de surfaces cubiques forment un complexe  $S$  caractérisé par la propriété que les surfaces de  $|F|$  découpent sur les droites de  $S$  une involution  $I_2^3$ ; ce complexe est d'ordre 6. Les droites appartenant à  $\infty^2$  surfaces cubiques d'un système  $\infty^4$  de telles surfaces forment une congruence  $G$  caractérisée par la propriété que les surfaces de  $|F|$  découpent sur les droites de  $G$  une involution  $I_2^3$ ; cette congruence est d'ordre 25 et de classe 15. De ces deux résultats on déduit que les droites des surfaces cubiques d'un réseau forment une congruence  $H$  d'ordre 11 et classe 21. Les complexes  $S$  forment un système  $\infty^4$ ; comme deux  $S$  déterminent une  $H$ , celles-ci sont  $\infty^6$ . La réglée commune à trois complexes  $S$  est le lieu des droites appartenant aux cubiques d'un faisceau, c'est le lieu des trisécantes de la  $C_9$  base du faisceau; elle est d'ordre 12 et il y en a  $\infty^6$ .

*B. d'Orgeval.*

**Leicht, J.:** Über die Mannigfaltigkeit der reduziblen quadratischen Formen. *Monatsh. Math.* 60, 123—129 (1956).

Deutet man die Koeffizienten einer quadratischen Form in  $n + 1$  Veränderlichen als homogene Koordinaten eines Punktes in einem  $\left(\binom{n+2}{2} - 1\right)$ -dimensionalen Raum, so sind den reduziblen Formen die Punkte einer irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeit  $R$  der Dimension  $2n$ , der Ordnung  $\frac{1}{2} \binom{2n}{n}$  und des virtuellen arithmetischen Geschlechtes 0 zugeordnet. Die singulären Punkte von  $R$  entsprechen dabei den Quadraten der Linearformen und bilden eine Veronesesche Untermannigfaltigkeit vom Grade 2 in  $R$ . — Zum Beweis berechnet der Verf. die Hilbert-Funktion

$H(t, A) = \left(\binom{n+t}{2} + 1\right)$  des zu  $R$  gehörigen Primideals  $A$  [vgl. W. Gröbner, *Arch. der Math.* 3, 351—359 (1952)] mittels eines Satzes über den Zusammenhang der Potenzprodukte vom Grade  $t$  der Koeffizienten einer reduziblen quadratischen Form und der Potenzprodukte der Koeffizienten ihrer linearen Faktoren, aufgefaßt als Unbestimmte.

*E.-A. Behrens.*

### Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

**Nash, John:** The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. of Math.*, II. Ser. 63, 20—63 (1956).

Das lokale Problem der Einbettung einer gegebenen Riemannschen Mannigfaltigkeit  $V_n$  in einen euklidischen Raum  $E_m$ , von Schläfli gestellt und ausgesprochen, wurde vor Jahren von Janet für  $n = 2$  und von E. Cartan für beliebiges  $n$  gelöst. In beiden Fällen handelte es sich um analytische Mannigfaltigkeiten. In früheren Arbeiten hatten sich der Verf. und N. H. Kuiper mit  $C^1$ -Einbettungen (d. h. solchen, bei welchen der eingebettete Raum von der Regularitäts-Klasse  $C^1$  ist) befaßt und bei solchen Einbettungen eine Herabsetzung der Dimensionszahl  $m$  erzielt. Bis vor kurzem sind die Einbettungen im Großen (speziell für geschlossene bzw. kompakte Mannigfaltigkeiten) betrachtet worden in bezug auf das Weylsche Problem (betreffend die Einbettung einer geschlossenen  $V_2$  mit positiver Gaußschen Krümmung in einen  $E_3$ ). In dieser Hinsicht sind die Arbeiten von Aleksandrov und Pogorelov (die eine geometrische Approximationsmethode mit Hilfe von Poly-

edern verwenden) und die von Lewy und Nirenberg (die eine analytische Methode anwenden) zu erwähnen. Bei der Einbettung in einen Raum von höherer Dimension verschwindet die Starrheit. Die Hauptergebnisse, die in dieser wichtigen Arbeit enthalten sind, können in folgenden zwei Sätzen ausgesprochen werden: Jede kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit  $V_n$  mit positiv definiter Metrik von der Klasse  $C^k$  ( $k \geq 3$ ) kann in eine beliebig kleine Portion des euklidischen Raumes  $E_m$  isometrisch eingebettet werden, wobei die Klasse der Einbettung ebenso gleich  $C^k$  ist und  $m = \frac{1}{2} n (3n + 11)$  ist. Für Einbettungen von nicht kompakten Mannigfaltigkeiten erzielt der Verf. eine größere Dimensionszahl für  $m$ , nämlich  $m = \frac{1}{2} n (n + 1) (3n + 11)$ . Der Verf. bedient sich einer originellen Methode der „Perturbationen“, wobei ein Glättungsoperator (smoothing operator) verwendet wird. Auf die Einzelheiten dieser Methode, die einen allgemeineren Charakter zu besitzen scheint und viel versprechend ist, kann hier nicht näher eingegangen werden. *S. Golab.*

**Otsuki, Tominosuke: Note on the isometric imbedding of compact Riemannian manifolds in Euclidean spaces.** Math. J. Okayama Univ. 5, 95—102 (1956).

Es handelt sich um isometrische Einbettung im Großen eines kompakten Riemannschen Raumes  $V_n$  in einen euklidischen Raum  $E_m$ . Die wesentliche Rolle spielt der Begriff des von S. S. Chern und N. H. Kuiper (dies. Zbl. 52, 176) eingeführten „index of nullity“, und zwar der Index des ganzen Raumes, d. h. das Minimum der Indizes in allen Punkten des Raumes. Dieser globale Index sei im weiteren mit  $n - k(V)$  bezeichnet. Die ausgesprochenen Sätze enthalten die Aussagen im negativen Sinne, d. h. daß unter gewissen Voraussetzungen der Raum in einen euklidischen  $E_m$  nicht einbettbar ist. Der Verf. nennt den Raum „of separated curvature“, falls sein Krümmungstensor in folgender Form darstellbar ist:  $R_{ijkl} = \sigma S_{ij} S_{kl}$ , wo  $\sigma$  ein Skalar und  $S_{ij}$  ein schiefsymmetrischer Tensor ist. Der Verf. beweist die folgenden Sätze: Ein kompakter Riemannscher Raum, der lokal nicht-euklidisch ist ( $k(p) \neq 0$ ), läßt sich nicht isometrisch in einen euklidischen  $E_m$  einbetten, wo  $m = 2n - k(V)$ . Ein kompakter Riemannscher Raum „of separated curvature“ und mit nichtpositivem Krümmungsskalar läßt sich nicht isometrisch in einen euklidischen  $E_{2n-1}$  einbetten. Die weiteren Sätze beziehen sich auf die Einbettung von dreidimensionalen kompakten Riemannschen Räumen in einen euklidischen  $E_4$  bzw.  $E_5$ . Als Folgerung ergibt sich z. B. der Satz, daß ein kompakter Einsteinscher dreidimensionaler Raum mit nichtpositivem Krümmungsskalar sich nicht in einen fünfdimensionalen euklidischen einbetten läßt. *St. Golab.*

**Apte, Madhumalati et André Lichnerowicz: Sur les transformations affines d'une variété presque hermitienne compacte.** C. r. Acad. Sci., Paris 242, 337—339 (1956).

Let  $V_{2n}$  be a  $2n$  dimensional compact differentiable manifold with an almost Hermitian structure. We call any homeomorphism of  $V_{2n}$  which preserves the first canonical connexion an affine transformation of  $V_{2n}$  and call any homeomorphism of  $V_{2n}$  which preserves the almost complex structure and the metric an automorphism. The author proves first that the maximal connected group of affine transformations which preserves the almost complex structure of  $V_{2n}$  coincides with the maximal connected group of automorphisms of the manifold. An analogous theorem for compact orientable manifolds with an Euclidean connection is proved also, i. e. the maximal connected group of affine transformations of a compact orientable manifold with an Euclidean connection preserves the metric of the manifold under the assumption that the homogeneous holonomy group is irreducible. *S. Sasaki.*

**Akbar-Zadeh, Hassan: Sur les isométries infinitésimales d'une variété finslerienne.** C. r. Acad. Sci., Paris 242, 608—610 (1956).

In this paper the author establishes necessary and sufficient conditions in order that a one-parameter group of transformations leads to isometric motions in a Finsler space, i. e. such that the corresponding Lie derivatives of the metric tensor



will vanish. In order to exploit this condition the author uses a decomposition of the Lie derivative due to Lichnerowicz (Theories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, p. 156, this Zbl. 65, 207). The final form of the conditions obtained involve the commutability of Lie derivatives with the various covariant derivatives of the Finsler space. This leads to a study of affine collineations. *H. Rund.*

**Tonooka, Keinosuke:** On a geometry of three-dimensional space with an algebraic metric. Tensor, n. Ser. 6, 60—68 (1956).

Die Untersuchung gilt dreidimensionalen Räumen  $F$  mit einer durch

$$ds^3 = a_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} dx^{\alpha_1} dx^{\alpha_2} dx^{\alpha_3}$$

gegebenen Metrik, wobei die Diskriminante der Koeffizienten von Null verschieden ist. Ein linearer Zusammenhang existiert genau dann, wenn  $F$  eben ist. Die Koeffizienten dieses Zusammenhanges werden bestimmt. Ferner werden Beziehungen zwischen verschiedenen vom Fundamentaltensor abgeleiteten Tensordichten angegeben.

*E. Kreyszig.*

**Rapesák, A.:** Über das vollständige System von Differentialinvarianten im regulären Cartanschen Raum. Publ. math., Debrecen 4, 276—293 (1956).

The purpose of the present paper is to determine the complete system of differential invariants of a Cartan space. Let  $L(x^i, u_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), be the fundamental function of the space, where the  $u_i$  represent a vector density of unit weight. The tensors  $g^{ik}$ ,  $A^{ikh}$ ,  $A^i$  and the coefficients  $\Gamma_{hk}^{*i}$  are defined by means of  $L(x^i, u_i)$  in the usual manner (L. Berwald, this Zbl. 22, 55). Following a method due to O. Varga (this Zbl. 49, 119) the author succeeds in constructing a type of normal coordinate system in the Cartan space. A fundamental reduction theorem is obtained; this leads to the following principal conclusion of the paper: Every tensorial differential invariant of a regular Cartan space is a function of the tensors

$A_{jk}^i, A_{jk}^i \parallel^{s_1}, \dots, A_{jk}^i \parallel^{s_1 \dots s_r}; A^i, A^i \parallel^{s_1}, \dots, A^i \parallel^{s_1 \dots s_r}; \Gamma_{jk}^{*i} \parallel^{s_1}, \dots, \Gamma_{jk}^{*i} \parallel^{s_1 \dots s_r};$  and of the covariant derivatives of these tensors, and of the curvature tensor and its covariant derivatives, and of the vector  $l_i = L^{-1} \sqrt{g} u_i$  and of the tensor  $g^{ik}$ .

*H. Rund.*

**Pastori, Maria:** Un'insidia nell'uso di coordinate generali. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 72—79 (1956).

Die Komponenten eines affinen Zusammenhanges sind bekanntlich keine Tensoren. Verschwinden sie z. B. in einem Koordinatensystem, so braucht das in einem anderen nicht der Fall zu sein. Das trifft bereits im euklidischen Raum zu. Dort sind z. B. die Komponenten eines kontravarianten Vektors  $\xi^i$  konstant bei Parallelverschiebung längs einer Kurve  $x_i = x_i(t)$ , wenn  $x_1, x_2, \dots, x_n$  kartesische Koordinaten sind, dagegen veränderlich, wenn diese  $x_1, x_2, \dots, x_n$  z. B. polysphärische Kugelkoordinaten sind, trotz der Euklidizität des Raumes in beiden Fällen. Dieses Nichtübereinstimmen von gewöhnlichen und kovarianten Ableitungen auch schon im euklidischen Raum bei Verwendung allgemeiner krummliniger Koordinaten kann zu Irrtümern Anlaß geben, wenn vektorielle und tensorielle Integralsätze in solchen allgemeinen Koordinaten ausgedrückt werden. Dafür werden mehrere Beispiele gegeben (Divergenztheorem, Gradiententheorem, Integralsätze der Mechanik kontinuierlicher Systeme usw.).

*M. Pinl.*

**Willmore, T. J.:** Parallel distributions on manifolds. Proc. London math. Soc., III. Ser. 6, 191—204 (1956).

La première partie contient une courte exposition sur les formes extérieures et les connexions affines sur la variété  $M$  de classe  $C^\infty$ . On entend par champ de vecteurs  $\lambda$  sur  $M$  une loi qui fait correspondre à chaque point  $x \in M$  un vecteur tangent  $\lambda_x$ . Si l'on désigne par  $e_i f = (\partial_i f)_x = \partial f / \partial x^i$  les vecteurs de base dans un système de coordonnées  $x^i$  d'un certain voisinage  $U$  de  $M$ , on a  $\lambda_x f = A^i (\partial_i f)_x$ , ou en notation

classique  $A^i \partial f / \partial x^i$ . Un ensemble de  $m$  champs de vecteurs forment une distribution et l'on dit que la distribution est involutive si chaque parenthèse de Poisson formée avec deux vecteurs  $\lambda, \mu$  de la distribution appartient à l'ensemble. A côté de l'espace tangent  $T_x$ , dont  $e_i$  nous fournissent une base, on considère l'espace tangent dual  $T_x^*$  formé par  $n$  formes de Pfaff  $w^i$  indépendantes, par exemple  $dx^i$ . On définit ensuite un espace vectoriel  $(k, l)$  à l'aide de  $k$  espaces  $T_x$  et  $l$  espaces  $T_x^*$ , ce qui conduit à la notion de tenseur. [Le Ref. remarque que se donner un système de  $n$  formes de Pfaff  $w^i$  en posant  $ds^i = w^i$ , les  $ds^i$  sont ce qu'on appelle les différentielles des arcs sur les  $n$  congruences de courbes une de ces congruences par exemple  $i$ , étant définie par les  $n - 1$  équations  $ds^j = 0$  ( $j \neq i$ ) et le champ dual correspondant est donné par  $\partial f / \partial s^i$ .] Les formes  $w^i$  sont déterminées dans chaque point  $x \in M$  abstraction faite d'une transformation linéaire et homogène (1)  $\bar{w}^a = w_i^a w^i$  où  $w_i^a$  sont fonctions des  $x^i$  et le déterminant  $|w_i^a|$  est différent de zéro. D'après Chern (1953) on dit que  $M$  possède une structure  $G$  si l'on peut se réduire à des transformations (1) appartenant à un certain groupe linéaire fermé  $G$  et un cas important est celui où  $G$  est le groupe orthogonal. En ce cas la forme quadratique (2)  $(w^1)^2 + \dots + (w^n)^2$  est un invariant du groupe  $G$ , donc  $M$  peut être considéré globalement comme un espace de Riemann  $V_n$  à métrique définie positive. (Le Ref. remarque que les  $n$  congruences constituent en ce cas ce que Ricci et Levi-Civita appelle un système de  $n$  congruences orthogonales et un étude des espaces de Riemann comme espaces du groupe orthogonal de transformations de congruences, peut être trouvé dans le livre du Ref., Leçons de géométrie différentielle I, ce Zbl. 34, 249). L'A. montre qu'étant donné  $m$  champs de vecteurs formant une distribution involutive, il en existe toujours une connexion affine définie globalement sur  $M$  de façon que par rapport à cette connexion les champs soient formés des vecteurs parallèles. Autrement dit il en existe une connexion affine dont le groupe d'holonomie laisse invariante la distribution. L'A. dit que ce résultat était connu à A. G. Walker qui l'a trouvé par une autre méthode. Le résultat ne peut pas être étendue aux espaces  $V_n$ . Pour ces espaces on peut montrer que la métrique (2) se décompose dans un voisinage  $U$  dans deux métriques à  $m$  et  $n - m$  variables, résultat démontré antérieurement par A. Lopschitz (ce Zbl. 12, 317). Au point de vue global l'A. démontre en utilisant un résultat de Lichnerowicz (ce Zbl. 43, 374) le théorème: Si un champ de vecteurs défini sur une variété orientable compacte est tel qu'il peut être considéré comme parallèle par rapport à une métrique définie positive est nécessaire que la caractéristique d'Euler-Poincaré de la variété soit nulle et que les nombres de Betti satisfassent aux conditions  $B_r \geq \sum_{s=1}^{r-1} (-1)^{s+1} B_{r-s} + (-1)^{r+1}$

( $r = 1, 2, \dots, [n/2]$ ). Si l'on désigne par orientable une  $m$ -distribution si elle détermine globalement un tenseur gauche symétrique d'ordre  $m$ , l'A. montre que pour  $n \geq 3$  ( $n \neq 5$ ) il en existe une variété  $M$  qui ne possède aucune 2-distribution orientable qui soit parallèle par rapport à une métrique définie positive sur  $M$  et un théorème analogue est donné pour  $n \geq 7$  ( $n \neq 10$ ) et une 3-distribution.

G. Vranceanu.

**Hano, Jun-ichi and Hideki Ozeki: On the holonomy groups of linear connections.** Nagoya math. J. 10, 97—100 (1956).

Cette Note montre que tout sous-groupe analytique  $G$  du groupe linéaire général  $GL(n, R)$  à  $n$  variables réelles est le groupe d'holonomie d'une connexion linéaire connexable sur  $R^n$ . Soient  $x_i$  les coordonnées de  $R^n$ ,  $(A_{ki}^j)$ , ( $k = 1, \dots, m$ ;  $1 \leq i, j \leq n$ ) une base de l'algèbre de Lie de  $G$ ,  $a_i$ , ( $1 \leq i \leq m$ ) des nombres strictement positifs, deux à deux distincts,  $g_i$  une fonction différentiable d'une variable dont la première dérivée est nulle en  $a_j$  si  $i \neq j$ , non nulle en  $a_i$ , ( $1 \leq i \leq m$ ). La connexion définie par les AA. a son coefficient  $\Gamma_{ij}^s$  identiquement nul pour  $s \geq 2$  et égal à  $\sum_a g_a(x_2) A_{ij}^a$  pour  $s = 1$ ; pour montrer que son groupe d'holonomie est  $G$ ,

ils s'appuient principalement sur le théorème d'Ambrose-Singer (ce Zbl. 52, 180). Enfin ils donnent un exemple de connexion linéaire sans torsion sur  $R^6$  dont le groupe d'holonomie n'est pas fermé dans  $GL(6, R)$ .  
A. Borel.

Nomizu, Katsumi: Un théorème sur les groupes d'holonomie. Nagoya math. J. 10, 101—103 (1956).

L'A. remarque que la construction de Ozeki-Hano (voir analyse précédente) montre aussi que étant donné un ouvert  $V$  de  $R^n$  et un groupe de Lie connexe  $G$ , il existe sur le produit  $V \times G$  une connexion dont le groupe d'holonomie est  $G$ ; il en déduit que si le groupe structural  $G$  d'un espace fibré principal différentiable  $E$  peut se réduire à un sous-groupe analytique  $H$  de  $G$ , alors il existe sur  $E$  une connexion ayant  $H$  comme groupe d'holonomie.  
A. Borel.

Auslander, Louis: On holonomy covering spaces. Proc. Amer. math. Soc. 7, 685—689 (1956).

Dans un autre travail (ce Zbl. 65, 376) l'A. et L. Markus ont introduit la notion d'espace d'holonomie de recouvrement pour un espace  $A_n$  à connexion affine localement euclidien et ont montré que cet espace d'holonomie est pour un espace  $A_n$  complète le produit direct d'un tore  $T_i$  et d'un espace euclidien  $E_{n-i}$ . L'A. montre maintenant que ces espaces d'holonomie peuvent être tous réalisés en faisant voir qu'on peut construire  $n$  connexions affines  $A_n^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sur le tore à  $n$  dimensions dont les espaces d'holonomie de recouvrement sont  $T_i \times E_{n-i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Pour cela on considère l'espace euclidien  $E_n$  et un sousgroupe  $\Pi$  du groupe des transformations affines de  $E_n$ . On suppose que  $\Pi$  ne possède pas des points fixes et est proprement discontinu. On considère les classes d'équivalences par rapport à  $\Pi$ , donc  $E_n/\Pi$  et l'on montre que l'espace de recouvrement de  $E_n/\Pi$  est de la forme  $T_i \times E_{n-1}$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $i$  étant le nombre de générateurs du groupe fondamental de l'espace d'holonomie de recouvrement de  $E_n/\Pi$ . Pour la détermination des connexions affines on utilise ensuite certains résultats de Kuiper relatifs à la classification des surfaces localement affines (ce Zbl. 53, 130).  
G. Vranceanu.

Aragnot, André: Champ d'holonomie et sous-algèbre d'holonomie. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 1117—1120 (1956).

Soit  $\mathcal{C}(E, B, G, p)$  un espace fibré principal, muni d'une connexion définie par une forme différentielle  $\omega$  à valeurs dans l'algèbre de Lie  $A(G)$ . On désigne par  $L$  le module des formes différentielles d'espèce adjointe; pour qu'un champ  $C$  de l'espace tangent à la fibre, définissant une sous-algèbre  $L(C)$  stable pour l'opérateur de différentiation covariante, soit intégrable, il faut et il suffit que  $L(C)$  contienne la forme de courbure  $\Omega$ .  
J. Lelong.

Cossu, Aldo: Connessioni tensoriali per tensori doppi misti. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 19, 421—427 (1956).

Bompiani a introduit la notion de connexion tensorielle doublement covariante ou contrevariante que l'A. a considéré dans d'autres travaux. Ici l'A. considère les connexions tensorielles mixtes définies de la même manière, et précisément ce sont des quantités  $E_{rkt}^{is}$  qui ont la propriété que les expressions (1)  $D\xi_k^i = d\xi_k^i + E_{rkt}^{is} \xi_s^r dx^t$  sont des tenseurs, quand  $\xi_k^i$  sont des tenseurs et  $dx^t$  et  $d\xi_k^i$  sont des différentielles. Si l'on considère une transformation de variables (2)  $x'^i = x'^i(x^1, \dots, x^n)$  l'invariance des (1) nous montre que  $E_{rkt}^{is}$  se transforme d'après une loi où interviennent les dérivées secondes de (2). On dit que  $D\xi_k^i = 0$  constituent les équations du transport parallèle de  $\xi_k^i$  du point  $P(x^i)$  au point voisin  $Q(x^i + dx^i)$ . Dans le cas où le transport parallèle coïncide avec celui relatif à une connexion affine habituelle  $L_{rt}^i$  nous avons les formules

$$(3) \quad E_{rkt}^{is} = \delta_k^s L_{rt}^i - \delta_r^i L_{kt}^s + Q_{rkt}^{is}$$

où  $Q$  est un tenseur. On montre que, contrairement à ce qui arrive dans le cas des



$\xi_{ik}$  ou  $\xi^{ik}$ , la connexion  $E$  n'est liée seulement à  $L_{rt}^i$ , mais aussi aux transformées  $T_p$  de Bortolotti  $\bar{L}_{rt}^i = L_{rt}^i + \delta_r^i \varphi_t$  où  $\varphi_t$  est un vecteur arbitraire. On donne ensuite certaines propriétés relatives aux transports parallèles des tenseurs produits  $\xi_k^i = \mu_h^i \lambda_k^h$  où  $\mu_h^i$  se transporte par  $E$  et  $\lambda_k^h$  par la connexion conjuguée  $-E$ . On montre aussi que l'on peut définir le tenseur de courbure de la connexion  $E$  par une formule analogue à celle habituelle relative à une connexion  $L_{rt}^i$  et l'on considère certaines transformations particulières liées à  $E$ .

G. Vranceanu.

### Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde:

Rham, Georges de: Sur une courbe plane. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 35, 25—42 (1956).

Ausgehend von dem Seitenpaar  $AB$  und  $BC$  eines Dreiecks  $P_0 = (A, B, C)$  werde die Folge der Polygone  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}, \dots$  durch die Vorschrift abgeleitet, daß die Ecken von  $P_{n+1}$  die Seiten von  $P_n$  dritteln. Die Grenzlagen der Polygonecken erzeugen dann für  $n \rightarrow \infty$  einen eindeutig bestimmten konvexen Kurvenbogen  $k$ , den Verf. schon bei früherer Gelegenheit [Elemente Math. 2, 73—76, 87—87 (1947)] studiert hat. Sind  $A^* B^*$  und  $B^* C^*$  irgend zwei benachbarte Seiten von  $P_n$ , so führt die Affinität, welche das Dreieck  $(A, B, C)$  in das Dreieck  $(A^*, B^*, C^*)$  verwandelt, den ganzen Kurvenbogen  $k$  in einen seiner Teilbogen  $k^*$  über. Unter Ausnutzung dieser und einiger ähnlich einfacher Bemerkungen gelingt eine sehr einfache und geometrisch durchsichtige Behandlung und analytische Darstellung der Kurve. Ihr Anfangspunkt  $M(0)$  und Endpunkt  $M(1)$  sind die Mitten der Seiten  $AB$  und  $BC$ . Ist  $F_0$  bzw.  $F_1$  die Affinität, die das Dreieck  $(A B C)$  von  $P_0$  in das erste bzw. letzte Teildreieck von  $P_1$  verwandelt, und ist  $M(t)$  ein beliebiger Punkt von  $k$ , so gelten die in den Mittelpunkt der Betrachtung gestellten Funktionalgleichungen  $F_0 M(t) = M(t/2)$  und  $F_1 M(t) = M((1+t)/2)$ . Es wird bewiesen, daß die Kurve  $k$  in allen ihren Punkten  $t$  eine Tangente besitzt. Legt man die Punkte  $A, B, C$  nach  $(-1, 0), (1, 0), (1, 2)$  so ist die Steigung  $m(t)$  der Kurve  $k$  im wesentlichen die Umkehrfunktion der Minkowskischen Fragezeichenfunktion; genauer ist  $t = 2 ?(m)$ . Schon Denjoy bewies (dies. Zbl. 18, 346), daß die Minkowskische Fragezeichenfunktion nirgends eine endliche, von Null verschiedene Ableitung hat. Verf. beweist dasselbe für die Umkehrung, d. h. für die Steigung  $m(t)$ . Daraus folgt, daß die Kurve  $k$  fast überall verschwindende Krümmung hat; nur in Punkten mit rationalen Parameterwerten  $t$  ist die Krümmung von  $k$  unendlich groß. — Eine Verallgemeinerung von  $k$  entsteht, wenn man die Ecken des Polygons  $P_{n+1}$  so auf die Seiten von  $P_n$  legt, daß sie von den Ecken von  $P_n$  gleiche Abstände haben, das Verhältnis  $\gamma$  des Mittelstückes zu den Randstücken jedoch nicht  $= 1$  (wie bei der Drittelung) sondern eine positive Konstante  $\gamma \neq 1$  ist. Die dann entstehende Kurve  $k_\gamma$  ist für  $\gamma = 2$  eine quadratische Parabel, in allen anderen Fällen jedoch nicht analytisch. Für  $\gamma > 1$  hat sie überall eine eindeutige Tangente, für  $\gamma < 1$  jedoch eine dichte Menge von Ecken; auch ihre Krümmungsverhältnisse werden geklärt. Diese Kurven  $k_\gamma$  lassen sich ebenfalls als Lösungen von einfachen Funktionalgleichungen darstellen. Ähnlichen Funktionalgleichungen genügen auch die tangentiallose von Kochsche Kurve, ferner die Peanokurven von Cesàro [Atti reale Accad. Sci. fis. mat., II. Ser. 12, Nr. 15 (1905)] und Pólya [Bull. internat. Acad. Sci. Cracovie, Ser. A. 1913, 305—313 (1913)]. K. Strubecker.

Lane, N. D. and P. Scherk: Characteristic and order of differentiable points in the conformal plane. Trans. Amer. math. Soc. 81, 358—378 (1956).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 51, 134) haben die Verff. im Sinne der direkten Infinitesimalgeometrie den Begriff des differenzierbaren Punktes  $p$  im Inneren eines Bogens  $B$  in der ebenen, konformen Geometrie erklärt; auf Grund der Schnitt- bzw.

Stützeigenschaften der Kreise durch  $p$  bezüglich  $B$  wurden sodann diese differenzierbaren Punkte klassifiziert und jede Klasse gekennzeichnet durch ein gewisses Tripel  $(a_0, a_1, a_2)$ , die sogen. Charakteristik, wobei  $a_0, a_1 = 1, 2$  und  $a_2 = 1, 2, \infty$  ist. Nunmehr werden Beziehungen zwischen der Charakteristik und der zyklischen Ordnung von  $p$  auf  $B$  untersucht. — Wichtige Ergebnisse: I. Die zyklische Ordnung von  $p$  ist nicht kleiner als  $a_0 + a_1 + a_2$ , wenn  $(a_0, a_1, a_2)$  die Charakteristik von  $p$  ist. — II. Ist  $p$  innerer Punkt von  $B$  und besitzt  $p$  auf  $B$  sowohl eine links- als eine rechtsseitige Umgebung, die von der zyklischen Ordnung Drei ist, so heiße  $p$  elementarer Punkt von  $B$ . Ein elementarer Punkt mit der Charakteristik  $(a_0, a_1, a_2)$  besitzt die zyklische Ordnung  $a_0 + a_1 + a_2$ . — III. Es seien  $R, Q$  Punkte der konformen Ebene, ferner  $p, t, u, v$  voneinander verschiedene Punkte von  $B$ . Mit  $C(Q, u, v)$  bzw.  $C(t, u, v)$  werde der Kreis durch  $Q, u, v$  bzw. durch  $t, u, v$  bezeichnet. Es heißt  $B$  stark differenzierbar in  $p$ , wenn (1)  $C(Q, u, v)$  konvergiert für  $Q \rightarrow R, u \rightarrow p, v \rightarrow p$ , wobei  $R \neq p$ , und wenn (2)  $C(t, u, v)$  konvergiert für  $t \rightarrow p, t \rightarrow u, t \rightarrow v$ . In einem elementaren Punkt  $p$  mit der Charakteristik  $(a_0, a_1, a_2)$  ist  $B$  stark differenzierbar genau dann, wenn  $B$  in  $p$  differenzierbar ist und  $a_0 = a_1 = 1$ . In einem Endpunkt eines Bogens  $B$  der zyklischen Ordnung Drei ist  $B$  stark differenzierbar. *Otto Haupt.*

**Bakel'man, I. Ja.:** Differentialgeometrie glatter irregulärer Flächen. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 2 (68), 67—124 (1956) [Russisch].

Es werden glatte Flächen betrachtet, die verallgemeinerte 2. Ableitungen besitzen. Wie Verf. zeigt, gilt für diese Flchenklasse eine Reihe von Sätzen der klassischen Differentialgeometrie. Hervorgehoben seien etwa 1. der Gauß-Bonnet'sche Integralsatz, 2. Gauß' Satz über das sphärische Bild und 3. die Gauß-Codazzi'schen Gleichungen (2. und 3. allerdings in integraler Form). Die innere und äußere Krümmung im Sinne von A. D. Aleksandrov fallen bei den betrachteten Flächen zusammen. *Joachim Nitsche.*

**Zalgaller, V. A.:** On the principles of the theory of two-dimensional manifolds of bounded curvature. Doklady Akad. Nauk SSSR 108, 575—576 (1956) [Russisch].

A. D. Aleksandrov gibt in seinem Buch (Innere Geometrie konvexer Flächen, dies. Zbl. 38, 352; 65, 151) folgende Bedingung dafür an, daß eine Fläche  $F$  mit innerer Metrik beschränkte Krümmung hat: Für jedes Gebiet  $G$  aus  $F$  muß die Summe der bei Aleksandrov definierten Exzesse der Dreiecke einer beliebigen Triangulation beschränkt sein. Diese Bedingung ist gleichwertig damit, daß die innere Metrik von  $F$  in jedem kompakten Bereich  $G$  durch Polyedralmetriken approximiert werden kann. Verf. gibt nun in der vorliegenden Note folgende Abschwächung dieser Bedingung an: Man braucht nur zu verlangen, daß in der Umgebung jedes Punktes die Exzessummen beschränkt sind und ferner, daß dies auch nur für die positiven Beiträge  $\omega_n^+$  der approximierenden Polyedralmetriken gilt (wegen der Bezeichnungen vgl. das zitierte Buch von A. D. Aleksandrov). *W. Burau.*

**Klee jr., V. L.:** The structure of semispaces. Math. Scandinav. 4, 54—64 (1956).

Let  $L$  be a real linear space and  $p$  a point of  $L$ . In the terminology of Hammer (this Zbl. 64, 166) a semispace at  $p$  is a maximal convex cone with vertex at  $p$  but excluding  $p$ . Equivalently, it is a maximal convex subset of  $L \sim \{p\}$ . A construction is given for semispaces in terms of ordered sets of linear functionals, as follows. Let  $F$  be a set of linear functionals on  $L$  linearly ordered by a relation  $r$  in such a way that for each non-zero vector  $x$  in  $L$  there exists a first element  $f_x$  of  $F$  having  $f_x x \neq 0$ . Then the set  $S(F, r)$  of all  $x$  for which  $f_x x > 0$  is a semispace at the zero vector  $\Phi$ ; and it is proved that every semispace at  $\Phi$  is of the form  $S(F, r)$  for some appropriate set  $F$  of linear functionals and some appropriate order relation  $r$ . Further,  $L$  has countable dimension if and only if every semispace at  $\Phi$  is of the form  $S(F, r)$  with  $F$  the set of coordinate functionals corresponding to a basis for  $L$ . The structure of convex subsets of a space that has finite or countable dimension or is separable and complete with respect to an invariant metric is studied in terms of the intersection of semi-

spaces. In particular, it is proved that if  $L$  has countable dimension and  $C$  is a convex proper subset of  $L$ , then  $C$  is the intersection of a countable family of semispaces if and only if every family of convex sets whose intersection is  $C$  contains a countable subfamily whose intersection is  $C$ .  
F. F. Bonsall.

**Busemann, H. and C. M. Petty:** Problems on convex bodies. Math. Scand. 4, 88—94 (1956).

Es wird eine Reihe von ungelösten Fragen über konvexe Körper  $K$  mit Mittelpunkt  $O$  im euklidischen  $E^n$  ( $n \geq 3$ ) formuliert, auf welche der Aufbau der Minkowskischen Geometrie geführt hat. Dabei spielt der Inhalt  $A(u)$  des ebenen ( $n-1$ )-dimensionalen Schnitts  $K(u)$  des Körpers  $K$  mit der Mittelpunktebene  $H(u)$  der Stellung  $u$  stets eine Rolle. Die Bedeutung der Fragen und vermuteter Lösungen für die Minkowskische Geometrie wird besprochen. Beispiel (Problem 5): Für einen gegebenen Stellungsvektor  $u$  werde ein Kegel größten Volumens  $C(u)$  über  $K(u)$  gebildet. Sind die Ellipsoide durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß nur für sie unter allen Körpern  $K$  das Volumen  $C(u)$  von  $u$  unabhängig ist? H. Busemann hat (dies. Zbl. 40, 375) eine für die Minkowskische Geometrie natürliche Einführung des Senkrechtstehens einer Geraden auf einer Hyperebene und einer Hyperebene auf einer Geraden angegeben. Diese Paarungen von Geraden und Hyperebenen sind dann und nur dann miteinander identisch, wenn die Einheitskugel der Minkowskischen Geometrie ein Körper  $K$  mit konstantem  $C(u)$  ist. Wenn die Ellipsoide die Lösung des Problems 5 sind, so ist die Geometrie dann euklidisch. Die Frage hängt also mit einem Ergebnis von W. Blaschke zusammen, wonach räumliche Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalität Ellipsoide als Eichflächen haben [Ber. Verhandl. Ges. Wiss. Leipzig, math.-phys. Kl. 68, 50—55 (1916)].

W. Süss.

**Hanner, Olof:** Intersections of translates of convex bodies. Math. Scand. 4, 65—87 (1956).

$K$  sei ein  $n$ -dimensionaler konvexer Körper. Ist  $K$  kein Parallelotop, so gibt es nach B. v. Sz.-Nagy (dies. Zbl. 57, 145) Vektoren  $u_1, \dots, u_m$  ( $3 \leq m \leq n+1$ ) so daß die parallelverschobenen Körper  $K + u_i$  keinen Punkt gemeinsam haben, sich aber paarweise treffen.  $I(K)$  sei die kleinste derartige Zahl  $m$ . Verf. zeigt, daß  $I(K) = 3$  ist für alle  $K$  mit Ausnahme von endlich vielen Klassen affin äquivalenter Körper, für die  $I(K) = 4$  ist. Die zweite Möglichkeit tritt dann und nur dann ein, wenn  $K$  ein zentralsymmetrisches konvexes Polyeder ist und es zu irgend zwei punktfremden Randpolyedern  $L_1$  und  $L_2$  von  $K$  (Dimension  $< n-1$  zugelassen) zwei parallele Stützhyperebenen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  von  $K$  gibt, derart, daß  $L_i$  in  $\pi_i$  enthalten ist. Weiter wird gezeigt, daß sich die Zahl  $I(K)$  nicht ändert, wenn man in ihrer Definition die parallelverschobenen Körper  $K + u_i$  allgemeiner durch homothetische Körper  $\lambda_i K + u_i$  ersetzt. Zum Schluß wird eine Methode zur Konstruktion von Körpern  $K$  mit  $I(K) = 4$  angegeben.  
M. Kneser.

**Fejes Tóth, L.:** On the volume of a polyhedron in non-euclidean spaces. Publ. math., Debrecen 4, 256—261 (1956).

Es ist bekannt, daß ein konvexes euklidisches Polyeder vom Volumen  $V$ , das eine Kugel vom Radius  $r$  enthält und  $f$  Flächen,  $e$  Kanten und  $v$  Ecken hat, der Ungleichung

$$V \geq \frac{1}{3} e \sin(e^{-1} \pi f) (\operatorname{tg}^2(\frac{1}{2} e^{-1} \pi f) \operatorname{tg}^2(\frac{1}{2} e^{-1} \pi v) - 1) r^3$$

genügt, wo die Gleichheit nur für die der Kugel umbeschriebenen regelmäßigen Polyeder gilt (Fejes Tóth, dies. Zbl. 35, 245). Verf. beweist folgende Verallgemeinerung: Wenn in einem dreidimensionalen Raum konstanter Krümmung  $c \neq 0$  ein konvexes Polyeder  $f$  Flächen,  $e$  Kanten und  $v$  Ecken hat und eine Kugel vom Radius  $r$  enthält, so genügt sein Volumen  $V$  der Ungleichung

$$V \geq \frac{2e}{\sqrt{c^3}} \int_0^{\pi f/2e} \left\{ \sqrt{cr} - \frac{\cos \varphi}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \varphi}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \operatorname{tg}(\sqrt{cr}) \frac{\sqrt{k^2 - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} \right) \right\} d\varphi,$$



wo  $k = \sin(\frac{1}{2}e^{-1}\pi f)/\cos(\frac{1}{2}e^{-1}\pi v)$  ist. Die Gleichheit gilt nur für ein der Kugel um-  
beschriebenes regelmäßiges Polyeder. M. Zacharias.

**Goldberg, Michael:** Basic rotors in spherical polygons. J. Math. Physics **34**, 322—327 (1956).

A rotor is a spherical oval rotatable in a spherical polygon. A kinematic method of generation of rotors is shown. Consider a fixed circle  $\Gamma$  of circumference  $c$  lying on the sphere and let another circle  $\Gamma'$  of circumference  $c n/(n+1)$  roll within  $\Gamma$  without slipping. If an arc of a great circle is carried by  $\Gamma'$  the envelope of the positions of this arc, if it is sufficiently distant from the center of  $\Gamma'$ , will be a convex curve which is shown to be a rotor in a spherical  $n$ -gon. An analogous construction assuming that  $\Gamma$  is rolled about  $\Gamma'$  gives rise also to spherical rotors. More general spherical rotors can be obtained by composition of the preceding methods. L. A. Santaló.

**Demaria, Davide Carlo:** Sui ricoprimenti finiti della superficie sferica. Atti Accad. nat. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **20**, 185—192 (1956)

Es werden Überdeckungen der Oberfläche der Einheitskugel durch  $n$  abgeschlossene Punktmengen betrachtet. Für den maximalen sphärischen Abstand von zwei Punkten, die zu derselben Menge der Überdeckung gehören, wird die untere Grenze  $\vartheta(n)$  gesucht. Nach B. Segre ist  $\vartheta(1) = \vartheta(2) = \vartheta(3) = \pi$ ,  $\vartheta(4) = \arccos(-\sqrt{3/3})$ . Verf. beweist den allgemeinen Satz: Zu jeder Überdeckung der Kugeloberfläche durch eine endliche Anzahl abgeschlossener Mengen gibt es entweder einen Punkt, der zu drei verschiedenen Mengen der Überdeckung gehört, oder eine Menge der Überdeckung, die ein Paar diametraler Punkte enthält. Mit Hilfe dieses Satzes werden die Lösungen erbracht:  $\vartheta(5) = 2\pi/3$ ,  $\vartheta(6) = \arccos(-1/3)$ ,  $\vartheta(8) = \pi/2$ .

Kurt Schütte.

## Topologie:

● **Patterson, E. M.:** Topology. (University Mathematical Texts.) Edinburgh and London: Oliver and Boyd Ltd.; New York: Interscience Publishers, Inc. 1956. 128 p. 8/6 net.

Einführung in die Grundbegriffe der Topologie. Das Buch vermittelt grundsätzlich nur einen Überblick über die wesentlichen Begriffsbildungen, die am anschaulichen Beispiel entwickelt und sodann abstrakt formuliert werden. Auf die Behandlung tiefergreifender Ergebnisse wird bewußt verzichtet. Eingegangen wird nur auf einfache Sätze, die für das Verständnis der Grundlagen erforderlich sind. Das Buch besitzt somit einen rein orientierenden Charakter. Behandelt werden nach einer anschaulichen Einführung in die Grundideen: Metrische Räume, die verschiedenen Definitionen allgemeiner topologischer Räume, Stetigkeit, Relativräume, Produkträume (endliche Produkte), topologische Gruppen, Hausdorffsche Räume, normale Räume, Vollständigkeit, Kompaktheit und Zusammenhang. Es folgen die wesentlichen Eigenschaften der Homotopie, Fundamentalgruppe und Homotopiegruppen. Im letzten Teil werden nach einem kurzen Überblick über die simplizialen Komplexe deren (ganzzahlige) Homologie- und Cohomologiegruppen, Bettische Zahlen usw. behandelt.

J.-H. Kowalsky.

**Cassina, Ugo:** Elementi della teoria degli insiemi. II. — Insiemi connessi irriducibili. Periodico Mat., IV. Ser. **34**, 85—108 (1956).

In questa 2ª parte [I: questo Zbl. **65**, 383] l'A. espone, sempre in forma piana, per una larga cerchia di studiosi, le proprietà degli insiemi „connessi irriducibili“ secondo Lennes e nell'indirizzo di Knaster e Kuratowski. Dopo avere analizzato le prime proprietà, si passa a studiare le cosiddette „funzioni ordinatrici di un connesso irriducibile“, „gli ordini lineari su un connesso irriducibile“, le principali proprietà degli intervalli, „la densità geometrico-ordinale“ e „la continuità ordinale“ di un connesso irriducibile, „la convessità“ rispetto a un connesso irriducibile, etc. etc.

L. Giuliano.

**Ellis, David:** A theorem on description adequacy. Publ. math., Debrecen 4, 180—183 (1956).

It is shown that one can construct a class of nets in a topological  $T_1$ -space  $S$  directly from the mapping (the selection operator) whose existence is a form of the axiom of choice. These nets adequately describe the topology of  $S$ . *A. van Heemert.*

**Michael, E.:** Selected selection theorems. Amer. math. Monthly 63, 233—238 (1956).

Démonstration directe de deux théorèmes faisant partie d'un plus long travail de l'A. [v. Ann. of Math., II. Ser. 63, 361—382; 64, 562—580 (1956)]. Si  $X, Y$  sont des espaces topologiques,  $\varphi$  une application de  $X$  dans  $\mathfrak{P}(Y)$ , l'A. appelle sélection pour  $\varphi$  une application continue  $f$  de  $X$  dans  $Y$  telle que  $f(x) \in \varphi(x)$  pour tout  $x \in X$ . Il suppose toujours que  $\varphi$  est semi-continue inférieurement, c'est-à-dire que pour tout ensemble ouvert  $U \subset Y$ , l'ensemble des  $x \in X$  tels que  $\varphi(x) \cap U \neq \emptyset$  soit ouvert dans  $X$ . Il prouve alors l'existence d'une sélection dans les deux cas suivants: 1.  $X$  est paracompact,  $Y$  est un espace de Banach et les ensembles  $\varphi(x)$  sont fermés, convexes et non vides; 2.  $X$  est paracompact et zéro-dimensionnel,  $Y$  un espace métrique complet, les ensembles  $\varphi(x)$  sont non vides et fermés.

*J. Dieudonné.*

**Nagami, Keiô:** Local properties of topological spaces. Proc. Japan Acad. 32, 320—322 (1956).

Let  $X$  be a topological space. In case  $P$  is a  $G$ - or  $F$ -hereditary property for  $X$ , E. Michael has shown (this Zbl. 55, 162) that (1) if  $X$  is paracompact and has property  $P$  locally, then  $X$  has property  $P$  and (2) if, for some uniform structure on  $X$ ,  $X$  has property  $P$  uniformly locally, then  $X$  has property  $P$ . In this paper the author proves on the basis of a theorem of A. H. Stone that the propositions (1) and (2) are true in case  $P$  is a  $CG$ - or  $CF$ -hereditary property for  $X$  and gives some applications of them. The author calls a property  $P$  a  $CF$ - (resp.  $CG$ -) hereditary property for  $X$  if it satisfies the following conditions: (a) if a subspace  $S$  of  $X$  has property  $P$ , every elementary open (resp. closed) subset of  $S$  has property  $P$ ; (b) if  $\{S_\alpha\}$  is a discrete collection of open (resp. closed) subsets of  $X$  each element of which has property  $P$ ,  $\bigcup S_\alpha$  has property  $P$ ; (c) if  $\{S_i\}$  is a locally finite countable collection of elementary open (resp. closed) sets of  $X$  each element of which has property  $P$ ,  $\bigcup S_i$  has property  $P$ ; here a subset  $S$  is called elementary open (resp. closed) if there exists a continuous function  $f$  on  $X$  such that  $S = \{x; f(x) > 0\}$  (resp.  $S = \{x; f(x) = 0\}$ ).

*K. Morita.*

**Banaschewski, Bernhard:** Überlagerungen von Erweiterungsräumen. Arch. der Math. 7, 107—115 (1956).

Un filtre est dit ouvert s'il a une base constituée d'ouverts. Un tel filtre  $\mathfrak{A}$  est dit connexe s'il n'existe pas deux filtres ouverts  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{C}$  avec  $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = \mathfrak{A}$  et  $B \in \mathfrak{B}$ ,  $C \in \mathfrak{C}$ ,  $B \cap C = \emptyset$ .  $E^*$  est un prolongement de l'espace topologique  $E$ , si  $E$  est un sous-espace partout dense de  $E^*$ . L'A. établit: un prolongement localement connexe d'un espace simplement connexe, tel que pour tout  $x \in E^* - E$ , la trace  $\mathfrak{V}_E^*(x)$  sur  $E$  du filtre  $\mathfrak{V}^*(x)$  des voisinages de  $x$  dans  $E$  soit connexe, est lui-même simplement connexe. Si  $E^* - E$  est réduit à un point, la condition relative à  $\mathfrak{V}_E^*(x)$  est nécessaire et suffisante pour que  $E^*$  localement connexe soit simplement connexe en même temps que  $E$ . Tout revêtement  $(W^*, f^*)$  de  $E$  [ $W^*$ : espace topologique,  $f^*$ : application continue de  $W^*$  sur  $E^*$  telle que tout point de  $E^*$  possède un voisinage ouvert  $0$  pour lequel  $f^{1*}$  est une homéomorphie de  $0$  sur chaque composante connexe dans  $W^*$  de  $f^{1*}(0)$ ] est le prolongement d'un revêtement  $(W, f)$  de  $E$  ( $W^*$  prolongement de  $W$ ,  $f$  restriction de  $f^*$  à  $E$ ). Inversement tout revêtement de  $E$  est prolongeable à un revêtement de  $E^*$  si tout  $\mathfrak{V}_E^*$  contient un ensemble pour lequel  $f^{-1}$  est une homéomorphie sur chacune des composantes connexes de son image réciproque dans  $W$ . Applications: bouts premiers, complétion d'un groupe simplement connexe, ....

*A. Revuz.*

**Fujiwara, Kaichirô:** Une note sur l'espace produit d'un espace topologique par lui-même. *Math. J. Okayama Univ.* **5**, 121—125 (1956).

Für gewisse Untersuchungen ist folgende Eigenschaft eines topologischen Raumes  $E$  wichtig: (I) Zu je zwei abgeschlossenen Teilmengen  $A, B$  von  $E$  und zu jeder offenen Menge  $W$  von  $E \times E$  mit  $A \times B \subseteq W$  existieren in  $E$  zwei offene Mengen  $U$  und  $V$  mit  $A \times B \subseteq U \times V \subseteq W$ . Verf. zeigt: ist  $E$  separiert, so ist diese Eigenschaft (I) gleichwertig damit, daß  $E$  normal ist und folgende Eigenschaft besitzt: (II) Zu jedem Punkt  $a \in E$  und zu jeder offenen Menge  $W \subseteq E \times E$  mit  $\{a\} \times E \subseteq W$  existiert eine Umgebung  $U$  von  $a$  in  $E$  mit  $U \times E \subseteq W$ . — Es sei  $\mathfrak{F}$  ein Filter in  $E$ . Verf. nennt dann eine offene Überdeckung  $\mathfrak{R}$  von  $E$  dem Filter  $\mathfrak{F}$  folgend, wenn es zu jeder Filtermenge  $U \in \mathfrak{F}$  eine Menge  $G_U \in \mathfrak{R}$  gibt, so daß aus  $U \subseteq V$  stets  $G_U \supseteq G_V$  folgt. Weiter wird der Raum  $E$  von kompaktem Charakter genannt, wenn für jeden Punkt  $x \in E$  und jede offene Überdeckung  $\mathfrak{R}$  von  $E$  gilt: Folgt  $\mathfrak{R}$  dem Nachbarschaftsfilter  $\mathfrak{B}(x)$  des Punktes  $x$ , so enthält  $\mathfrak{R}$  eine endliche Überdeckung von  $E$ . Verf. zeigt: Jeder topologische Raum von kompaktem Charakter besitzt die Eigenschaft (II). Besitzen die Nachbarschaftsfilter aller Punkte von  $E$  total geordnete Filterbasen, so ist die Eigenschaft (II) sogar gleichwertig damit, daß  $E$  von kompaktem Charakter ist. Schließlich gilt: Ist  $E$  ein uniformer Raum, und erfüllt jede binäre offene Überdeckung des uniformen Produktraumes  $E \times E$  die Eigenschaft von Lebesgue, so besitzt  $E$  die Eigenschaft (I). H.-J. Kowalsky.

**Iséki, Kiyoshi:** On the Lebesgue property in uniform spaces. *Publ. math. Debrecen* **4**, 239—241 (1956).

Some simple remarks about finite Lebesgue Property essentially contained in previous notes by the author [this Zbl. **66**, 411]. M. M. Peixoto.

**Polak, A. I.:** Über den Mechanismus der gleichmäßigen Approximationen im Bereich der stetigen Abbildungen von Kompakten. *Uspechi mat. Nauk* **11**, Nr. 4 (70), 149—154 (1956) [Russisch].

If a sequence  $f_n$  of continuous mappings of a compact  $X$  onto a compact  $Y$  converges uniformly to an open mapping  $f$ , then to every  $\varepsilon > 0$  there exists an integer  $N(\varepsilon)$  such that  $\sup \varrho(x, f^{-1}(y)) < \varepsilon$ , ( $x \in f_n^{-1}(y)$ ) for every  $y \in Y$  and every integer  $n > N(\varepsilon)$  (Th. 1). Here  $\varrho$  denotes the metrics in  $Y$ . Let  $F$  be an open mapping of  $X$  into  $Y$ ; to every  $\varepsilon > 0$  is associated a  $\delta(\varepsilon)$  such that every continuous function  $F: X \rightarrow Y$  satisfying  $\sup_{x \in X} \varrho(F(x), f(x)) < \delta$  is representable in the form

$f(x) = F(\varphi_\varepsilon(x))$ ; here  $\varphi_\varepsilon$  denotes a mapping of  $X$  for which  $\varrho(x, \varphi_\varepsilon(x)) < \varepsilon$  for each  $x \in X$  (Th. 2). In order that a uniform convergence of open mappings  $f_n$  to open mapping  $f$  of  $X$  onto  $Y$  implies the uniform convergence of  $\lim f_n^{-1}(y)$  to  $f^{-1}(y)$  ( $y \in Y$ ) it is necessary and sufficient that for every  $x \in X$ ,  $n$  and every  $\varepsilon > 0$  there exists a  $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$  such that the  $f_n$ -map of the  $\varepsilon$ -sphere of  $x$  covers the  $\delta$ -sphere of  $f_n(x)$  (Th. 3). This theorem is applied to linear equations in topological groups. D. Kurepa.

**Gorman, Charles David:** A note on recurrent flows. *Proc. Amer. math. Soc.* **7**, 142—143 (1956).

Let  $R$  be a metric space and let  $T$  be the real line. A flow  $f: R \times T \rightarrow R$  is said to be recurrent if, for all positive  $\varepsilon, s$ , there exists  $t > s$  such that  $\varrho(x, f(x, t)) < \varepsilon$ , all  $x$  in  $R$ . The author proves a theorem which characterizes recurrent flows if  $R$  is compact and answers a question raised by Nemyckij [this Zbl. **38**, 70 = *Amer. math. Soc.*, *Translat.* Nr. **103** (1954)]. P. J. Hilton.

**Dowker, Yael Naim:** On minimal sets in dynamical systems. *Quart. J. Math., Oxford II. Ser.* **7**, 5—16 (1956).

Il s'agit du système dynamique engendré par les itérés d'un homéomorphisme  $H$  de l'espace métrique compact  $X$  sur lui même. L'objet de l'article est l'étude de l'espace  $\mathcal{Q}$  des ensembles minimaux, muni d'une topologie convenable. L'A. établit



moyennant des hypothèses peu restrictives (par exemple:  $X$  est connexe) l'existence d'ensembles minimaux chevelus. (Un ensemble minimal  $M$  est chevelu s'il existe une trajectoire  $\gamma \nsubseteq M$  telle que  $M$  soit l'ensemble  $\omega$ -limite de  $\gamma$ .) *G. Reeb.*

**Whyburn, G. T.: Topological analysis.** Bull. Amer. math. Soc. **62**, 204—218 (1956).

Viele Sätze der Analysis und insbesondere der Funktionentheorie, die gewöhnlich mit analytischen Hilfsmitteln bewiesen werden, sind ihrem Wesen nach rein topologischer Natur. Verf. behandelt die Herausstellung dieser topologischen Grundlagen, die einen wesentlichen Einblick in die tieferen Zusammenhänge gestatten, und knüpft in der vorliegenden Arbeit besonders an den Begriff der offenen (bzw. abgeschlossenen) Abbildung und an verwandte Begriffsbildungen an. — Im folgenden sind alle auftretenden Räume  $T_1$ -Räume. Eine (stetige) Abbildung  $f$  des topologischen Raumes  $X$  in den topologischen Raum  $Y$  heißt bekanntlich offen (abgeschlossen), wenn das Bild jeder offenen (abgeschlossenen) Teilmenge von  $X$  ebenfalls offen (abgeschlossen) ist. Ist  $Y$  in einen umfassenderen Raum  $Y_0$  eingebettet, und faßt man  $f$  als Abbildung von  $X$  in  $Y_0$  auf, so gehen diese Eigenschaften im allgemeinen verloren. Die Abbildung  $f$  heißt streng offen (streng abgeschlossen), wenn sie offen (abgeschlossen) bleibt bei jeder Einbettung von  $Y$  in einen Oberraum. Nach einem Satz von Brouwer ist jeder Homöomorphismus eines euklidischen Raumes in sich streng offen. Verf. wirft die bisher unbeantwortete Frage nach der Kennzeichnung derjenigen Räume auf, die ebenfalls diese Eigenschaft besitzen. Eine Teilmenge  $M \subset X$  heißt eine zur Abbildung  $f$  gehörende inverse Menge, wenn  $f^{-1}f(M) = M$  gilt. Die Abbildung  $f$  heißt quasi-kompakt, wenn das Bild jeder zu ihr gehörenden offenen inversen Menge ebenfalls offen ist. Eine gleichwertige Kennzeichnung erhält man, wenn man in dieser Definition „offen“ durch „abgeschlossen“ ersetzt. Es gilt der Satz: Eine stetige Abbildung  $f$  von  $X$  auf  $Y$  ist genau dann offen (abgeschlossen), wenn sie quasi-kompakt ist und wenn die Vereinigung aller Punktinversen  $f^{-1}(y)$  ( $y \in Y$ ), die in einer abgeschlossenen (offenen) Teilmenge  $M \subset X$  enthalten sind, stets selbst abgeschlossen (offen) ist. Über Bekanntes hinaus zeigt sich, daß die Eigenschaft des lokalen Zusammenhanges invariant gegenüber quasi-kompakten Abbildungen ist. Eine Abbildung  $f$  von  $X$  auf  $Y$  heißt quasi-offen, wenn für jeden Punkt  $y \in Y$  und jede offene Menge  $U \subset X$ , die eine kompakte Komponente von  $f^{-1}(Y)$  enthält, gilt, daß  $y$  ein innerer Punkt von  $f(U)$  ist. Entsprechend der vorangehenden Begriffsbildung wird „streng quasi-offen“ definiert. Die Abbildung  $f$  heißt licht, wenn für alle  $y \in Y$  das Urbild  $f^{-1}(y)$  total unzusammenhängend ist. Für lichte Abbildungen fallen Offenheit und Quasi-Offenheit zusammen. Eine Abbildung  $f$  des ebenen Gebiets  $X$  auf die Teilmenge  $Y$  der Ebene  $\pi$  ist genau dann quasi-offen, wenn für jedes Elementargebiet  $R \subset X$  mit dem Rand  $C \subset X$  gilt:  $f(R \cup C)$  ist Vereinigung aus  $f(C)$  und der Vereinigung einer Menge beschränkter Komponenten von  $\pi - f(C)$ . Unter einem Elementargebiet wird dabei eine beschränkte zusammenhängende offene Menge verstanden, deren Rand aus einer endlichen Anzahl punktfremder einfacher geschlossener Kurven besteht. Dieser Satz wird bei der Untersuchung der topologischen Eigenschaften differenzierbarer Abbildungen der komplexen Ebene in sich benutzt. Jede solche Abbildung ist licht und streng offen. Andererseits sind diese beiden Eigenschaften aber auch charakteristisch in folgendem Sinn: Jede lichte und offene Abbildung einer orientierbaren, triangulierbaren 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit in die komplexe Ebene oder in die 2-Sphäre ist topologisch äquivalent zu einer analytischen Funktion. Alle topologischen Eigenschaften analytischer Funktionen lassen sich daher aus diesen charakteristischen Eigenschaften herleiten. Als direkte Folgerungen aus diesen topologischen Eigenschaften ergeben sich viele fundamentale Sätze der Funktionentheorie wie z. B. der Satz vom Maximum des Betrages, der Hauptsatz der Algebra und der Satz von Rouché. Es folgen Sätze über die Erhaltung von „streng quasi-offen“ und „licht“

bei gleichmäßiger Konvergenz, Dimension und Nicht-Dichtigkeit und Anwendungen, die insbesondere den Begriff des Pols betreffen. *H.-J. Kowalsky.*

**Polak, A. I.:** On the extension of the covering theorems in the theory of analytical functions to sufficiently broad classes of continuous mappings. Doklady Akad. Nauk SSSR 106, 970—972 (1956) [Russisch].

Some analogues of the covering theorem of Koebe are proved for families of mappings which conserve only partially the properties of analytic functions. Typical theorem: Let be  $\{f\} \subset R'^R$  a compact (in  $R'^R$ ) family of open mappings where  $R, R'$  are metric, the first being locally compact and the second locally connected. Suppose  $\{f\}$  contains no constant mapping. Then, if the limits of uniform sequences of mappings  $\in \{f\}$  are light, it follows that for each  $x \in R$  and  $\varepsilon > 0$ , there exists a  $\delta > 0$ , such that for each  $f \in \{f\}$ , the image of the  $\delta$ -sphere with center in  $x$ , covers completely the  $\varepsilon$ -sphere with center in  $f(x)$ . Necessary and sufficient conditions for normal families of analytic functions to possess the above property are given.

*I. Berstein.*

**Jacobsthal, Ernst:** Über den Borelschen Überdeckungssatz. Arch. der Math. 7, 197—200 (1956).

Verf. beweist eine Verallgemeinerung des Überdeckungssatzes von Heine-Borel, die gleichzeitig eine Aussage über die Anzahl der Mengen einer endlichen Überdeckung gestattet. —  $M$  sei eine beschränkte (nicht notwendig abgeschlossene) Teilmenge des  $p$ -dimensionalen Euklidischen Raumes. Eine offene Überdeckung von  $M$  heißt dann eine  $d$ -Überdeckung ( $d > 0$ ), wenn es zu jedem Punkt  $P \in M$  in der Überdeckung eine Menge  $\Omega$  mit  $P \in \Omega$  gibt, so daß  $P$  von dem Rand von  $\Omega$  mindestens den Abstand  $d$  besitzt. Verf. zeigt: Ist  $D$  der Durchmesser des kleinsten abgeschlossenen räumlichen Intervalles, das  $M$  umfaßt, so enthält jede offene  $d$ -Überdeckung von  $M$  eine endliche Überdeckung von  $M$  aus höchstens  $n^p$  Mengen; dabei ist  $n = \left\lceil \frac{D}{d} \right\rceil + 1$ . Weiter gilt: Ist die Menge  $M$  beschränkt und abgeschlossen, so ist jede offene Überdeckung von  $M$  bei passender Wahl von  $d$  eine  $d$ -Überdeckung.

*H.-J. Kowalsky.*

**Alexandroff (Aleksandrov), P. S.:** Über Cantorsche Mannigfaltigkeiten. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 5 (71), 233—234 (1956) [Russisch].

**Araki, Shôrô:** On the Steenrod's reduced powers in singular homology theories. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A 9, 159—173 (1956).

The cyclic reduced power operations are defined explicitly for the simplicial and cubical singular homology theories of a space. The Cartan-Eilenberg-MacLane equivalence between the two homology theories is then used to show that the two definitions are equivalent.

*S. Stein.*

**Adams, J. F.:** On products in minimal complexes. Trans. Amer. math. Soc. 82, 180—189 (1956).

An example space of the  $n$ -th kind is a space with precisely  $n$  non-vanishing homotopy groups. For  $n = 1$ , one has the spaces of Eilenberg-MacLane. Following a suggestion of J. C. Moore, the author considers the introduction of a product in the minimal complexes of example spaces of the 2nd kind. In particular, let  $X =$  space of loops of  $Y$  (i. e.  $\{r, w\} | r \geq 0, w: [0, r] \rightarrow Y$ ). The main result, indicating that certain minimal complexes admit desirable products, is: If  $\pi_r(X) = 0$  for  $r \neq n, n+1$ , and (1)  $n > 1$  or (2)  $n = 1$  and  $k_3(X) = 0$ , then the minimal complex of  $X$  admits the structure of a minimal group complex in which the products are  $A$ -related to those in  $X$ . (The terms „minimal group complex“ and „ $A$ -related“ are defined in the paper.)

*S. Stein.*

**Suzuki, Haruo:** On the Eilenberg-MacLane invariants of loop spaces. J. math. Soc. Japan 8, 93—101 (1956).

Sei  $X$  ein einfach-zusammenhängender topologischer Raum, dessen Homotopie-

gruppen  $\pi_i = \pi_i(X)$  für  $p < i < q$  ( $2 < p < q$ ) verschwinden. Verf. vergleicht die Eilenberg-MacLane Invariante  $k_p^{q+1}(X)$  (vgl. Eilenberg-MacLane, dies. Zbl. 36, 126) mit der entsprechenden Invarianten  $k_{p-1}^q(\Omega_X)$  des Loopraumes  $\Omega_X$  von  $X$ . Er zeigt, daß letztere das Bild der ersteren ist beidem von Eilenberg-MacLane (dies. Zbl. 50, 393) definierten Einhängungshomomorphismus  $S: H^{q+1}(\pi_p, p; \pi_q) \rightarrow H^q(\pi_p, p-1; \pi_q)$ . Für den Fall  $q < 2p-1$  und  $\pi_i = 0$  ( $0 < i < p$ ) wird also der  $(q+1)$ -Homotopietyp von  $X$  durch den  $q$ -Homotopietyp von  $\Omega_X$  bestimmt. Umgekehrt sind die Loopräume von homotopie-äquivalenten Räumen ebenfalls homotopie-äquivalent. Ferner zeigt Verf. noch ein ähnliches Ergebnis für die von J. H. C. Whitehead (dies. Zbl. 52, 398) eingeführten Invarianten wie das oben für die Eilenberg-MacLane-Invarianten angegebene.

*E. Burger.*

● **Blanchard, A., A. Borel, H. Cartan, J. P. Serre et Wu Wen-tsun: Espaces fibrés et homotopie.** (École Normale Supérieure. Séminaire Henri Cartan, 2e année 1949/1950). 2e éd. multigraphiée, revue et corrigée. Paris: Secrétariat mathématique 1956. Nr. 1—20.

Es handelt sich um Vervielfältigungen von 18 der 20 Protokolle des in der Überschrift genannten Seminars von Cartan. Es wird in knapper und prägnanter Weise ein großer Teil der Homotopietheorie und der Theorie der Faserräume entwickelt, wobei zahlreiche damals neue Ergebnisse zur Sprache kommen. Die Beweise sind allerdings gelegentlich nur angedeutet oder auch ganz weggelassen. In den Protokollen 1 und 2 gibt Serre eine Einführung in die Grundbegriffe: Fortsetzung einer Abbildung, Homotopie, Homotopiegruppen mit wichtigsten Eigenschaften. In den Protokollen 3 und 4 gibt Cartan eine Übersicht über die Obstruktionstheorie von Eilenberg sowie eine Übertragung dieser Theorie auf den Fall der Abbildungen lokal-kompakter Räume in Polyeder. Im Protokoll 5 (Blanchard) folgt dann als Einführung in die Theorie der Faserräume eine vorläufige Definition der Faserräume, die an mehreren Beispielen erläutert und durch Probleme und Ergebnisse aus der Theorie der Faserräume illustriert wird. Mit Protokoll 6 (Cartan) beginnt dann die systematische Theorie der Faserräume: allgemeine Faserräume, Prinzipalfaserräume, Faserbündel. Protokoll 7 und 8 (Cartan): Querschnitte, Erweiterung und Einschränkung der Strukturgruppe, Hochheben einer Homotopie, klassifizierende Bündel, differenzierbare Faserbündel. In den Protokollen 9 und 10 betrachtet Serre die relativen Homotopiegruppen und die exakte Homotopiesequenz, insbesondere die Homotopiesequenz eines Faserraumes mit den wohlbekannten Anwendungen auf Überlagerungen, homogene Räume, Produkträume, Stiefel-Mannigfaltigkeiten, Klassifikationstheorem für Sphärenbündel, Fundamentalgruppen der klassischen Gruppen, Homotopiegruppen der Sphären, Faserung von Sphären durch Sphären. Naturgemäß besteht in dem behandelten Stoff weitgehend Übereinstimmung mit dem Lehrbuch von Steenrod (dies. Zbl. 54, 71). In den Protokollen 12 und 13 gibt A. Borel eine Übersicht über die damals bekannten Ergebnisse über die Homotopiegruppen von Lieschen Gruppen, insbesondere über die ersten fünf Homotopiegruppen der klassischen Gruppen sowie über seine Ergebnisse (dies. Zbl. 41, 522) über die Ausnahmegruppen  $G_2$  und  $F_4$ . In den Protokollen 14 und 15 entwickelt Cartan eine axiomatische Theorie der Steenrod-Quadrate. Es handelt sich um eine ausführlichere Darstellung seiner Ergebnisse (dies. Zbl. 41, 99). Diese beiden Protokolle nehmen im Gesamtaufbau des Seminars eine etwas isolierte Stellung ein. Vielleicht war das fortgelassene Protokoll 16 für die homotopietheoretischen Anwendungen der Steenrod-Quadrate vorgesehen. Die Protokolle 17 und 18 (Wu Wen-tsun) bringen die Theorie der charakteristischen Klassen eines Faserraumes: Kohomologiering mod 2 der Grassmann-Mannigfaltigkeiten, charakteristische Klassen für Faserbündel mit orthogonaler Strukturgruppe, Dualitätssatz von Whitney, Obstruktionsdefinition der charakteristischen Klassen, Stiefel-Whitney-Klassen. Zu den hier behandelten Punkten vgl. man auch das Buch des Verf. (dies. Zbl. 49, 126). In den



letzten beiden Protokollen 19 und 20 gibt Cartan eine Darstellung des Inhalts seiner beiden Arbeiten (dies. Zbl. 45, 306 und 307) über die Kohomologie in differenzierbaren Prinzipalbündeln. *E. Burger.*

**Haefliger, André:** Sur l'extension du groupe structural d'un espace fibré. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 558—560 (1956).

Soit une suite exacte de groupes topologiques (non abéliens)  $e \rightarrow N \rightarrow H \xrightarrow{f} G \rightarrow e$ . Alors à tout espace fibré principal  $E'(B, H)$  correspond  $fE' = E(B, G)$  associé à  $E'$  par l'homomorphisme  $f$ . Le problème d'extension du groupe structural consiste à retrouver  $E'$  à partir de  $E$ . Cette question qui peut être traitée par la cohomologie non abélienne est ici abordée par la méthode des espaces classifiants. Utilisant une construction de Borel-Serre, l'A. remarque que l'on peut s'arranger pour que le classifiant  $B_H$  de  $H$  soit fibré de base le classifiant  $B_G$  de  $G$ , la projection  $p: B_H \rightarrow B_G$  étant canoniquement associée à  $f$ . Le problème d'extension devient alors le problème de relèvement dans  $B_H$  d'une application  $B \rightarrow B_G$ . L'A. obtient des obstructions explicites dans les cas suivants:  $H$  est un revêtement de  $G$  et  $H$  est un groupe de Lie connexe. Une théorie globale des spineurs n'est possible que sur les variétés sur lesquelles la classe  $w^2$  de Stiefel-Whitney est nulle. *P. Dedecker.*

**Kudo, Tatsuji:** A transgression theorem. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A 9, 79—81 (1956).

Let  $(E_r)$  be the cohomology spectral sequence associated with a fibre space. If  $x \in E_s^{a,b}$  and  $d_s(x) = 0$  then  $x$  represents an element of  $E_{s+1}^{a,b}$ , denoted  $K_{s+1}^s(x)$ . If  $d_{s+1}(K_{s+1}^s(x)) = 0$  then  $K_{s+1}^s(x)$  represents an element of  $E_{s+2}^{a,b}$ , denoted  $K_{s+2}^s(x)$ . Similarly define  $K_{s+3}^s(x)$ , etc. An element  $\alpha \in E_{r+1}^{a,b}$  is transgressive if  $d_{q+1}K_{q+1}^{r+1}(\alpha) = 0$ ,  $q = r, r+1, \dots, b-1$ . For such an  $\alpha$  there is  $\beta \in E_2^{a+b+1,0}$  such that  $d_{b+1}K_{b+1}^{r+1}(\alpha) = K_{b+1}^2(\beta)$ . For a transgressive  $\alpha \in E_2^{0,2k}$  several relationships between  $\alpha$  and  $\beta$ , involving the  $d_s$ , the Bockstein operator, and the  $p^{\text{th}}$  powers, are obtained. It is also shown that  $\alpha^p$  and  $\beta \cdot \alpha^{p-1}$  are transgressive. *S. Stein.*

**Kudo, Tatsuji, Shunji Mukohda and Shiroshi Saito:** Reduction formulas for Steenrod's  $D_i$  in the cubic singular cohomology theory. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A 9, 101—110 (1956).

The cyclic reduced power operations for a cell complex  $K$  depend upon a set of operation  $D_i: K \rightarrow (K)^n$ . Serre (this Zbl. 52, 195) introduced such  $D_i$  into the singular theory of a space. Here, the authors, working only with rectangular matrices with entrees 0, 1, or  $t$ , introduce the  $D_i$  into the cubical singular theory of a space. Using their definition of the  $D_i$  they obtain the following theorem concerning filtrations associated with a fibre space: If  $f_j \in A^{*aj}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) we have  $D(f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n) \in A^{*\max} [(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - i, 0]$ . *S. Stein.*

**Ozeki, Hideki:** Infinitesimal holonomy groups of bundle connections. Nagoya math. J. 10, 105—123 (1956).

L'A. étend à des connexions quelconques des résultats de Nijenhuis (ce Zbl. 51, 132; 55, 407) sur les connexions linéaires; ces généralisations ont aussi été annoncées par Nijenhuis [Bull. Amer. math. Soc. 61, 169 (1955), Abstract 334]. Soit  $P = P(M, G, \pi)$  une fibration principale différentiable d'espace total  $P$  connexe, base  $M$ , projection  $\pi$ , groupe structural  $G$ , munie d'une connexion  $\Gamma$ ;  $H^0(x)$ , ( $x \in P$ ), désigne le groupe d'holonomie restreinte de  $\Gamma$ , relatif à  $x$ ,  $H^*(x)$  le groupe d'holonomie local en  $x$ , c'est à dire l'intersection des groupes d'holonomie des connexions induites sur les ouverts saturés contenant  $x$ , et  $H'(x)$  le groupe d'holonomie infinitésimal. Ce dernier est le sous-groupe analytique de  $G$  dont l'algèbre de Lie est engendrée par les éléments  $Y_1 \cdot Y_2 \cdot \dots \cdot Y_k \Omega(X, Y)$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ), où  $\Omega$  est le tenseur de courbure de  $\Gamma$  et où  $Y_i, X, Y$  sont des champs de vecteurs horizontaux (dans la terminologie de Ambrose-Singer, ce Zbl. 52, 180). On a toujours  $H^0(x) \supset H^*(x) \supset$

$\supset H'(x)$ . En utilisant notamment le théorème d'Ambrose-Singer (loc. cit.) l'A. montre que  $H^0(x)$  est engendré par les groupes  $H'(y)$ , où  $y$  parcourt l'ensemble des points de  $P$  qui peuvent être reliés à  $x$  par des courbes horizontales, que l'on a  $H^0(x) = H^*(x)$ , (resp.  $H^0(x) = H'(x)$ ), si la dimension de  $H^*(x)$ , (resp.  $H'(x)$ ) est constante sur  $P$ , et que cette dernière condition est toujours remplie lorsque la fibration et la connexion sont analytiques. Enfin, il est montré que si la connexion est linéaire,  $H'(x)$  est engendré par les dérivées covariantes successives des tenseurs  $\Omega(X, Y)$  où  $X, Y$  sont des champs de vecteurs sur  $M$ .

A. Borel.

**Gugenheim, V. K. A. M. and D. C. Spencer:** Chain homotopy and the de Rham theory. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 144—152 (1956).

The main purpose of the paper is to give a rule for constructing chain-homotopy operators appropriate to the de Rham cohomology theory (over the reals  $R$ ) of a differentiable manifold (differentiable henceforth means „differentiable of class  $C^\infty$ “). That is to say, given a differentiable homotopy  $f_i: V \rightarrow W$  of maps from the differentiable manifold  $V$  to the differentiable manifold  $W$ , a chain-homotopy  $\lambda: \Phi^{p+1}(W) \rightarrow \Phi^p(V)$  such that  $f_1^* - f_0^* = d\lambda + \lambda d$  is constructed, where  $\Phi(\ )$  is the exterior algebra of differential forms,  $f_i^*: \Phi(W) \rightarrow \Phi(V)$  is induced by  $f_i$ ,  $i = 0, 1$ , and  $d$  is the exterior derivative in  $\Phi(\ )$ . The definition of  $\lambda$  proceeds as follows. For any differentiable manifold  $U$ , let  $T(U)$  be the bundle of exterior algebras of tangent vectors  $U$  and let  $R(U)$  be the ring of differentiable maps  $U \rightarrow R$ . Then

$$\Phi^p(U) = \text{Hom}_{R(U)}(\times T^p(U), R(U)),$$

where  $\times T^p(U)$  is the  $R(U)$ -module of cross-sections of  $T^p(U)$ . If  $\varphi \in \Phi^{p+q}(U)$ ,  $v \in \times T^p(U)$ , the contraction  $v \lrcorner \varphi \in \Phi^q(U)$  is defined by

$$(v \lrcorner \varphi) v' = \varphi(v \wedge v'), \quad v' \in \times T^q(U).$$

Let  $U, V$  be differentiable manifolds,  $\varphi \in \Phi^{p+q}(U \times V)$ ,  $c$  a singular  $p$ -chain of  $U$ . Define  $\varphi/c \in \Phi^q(V)$  by  $(\varphi/c)(v)(y) = (-1)^{pq} [j_y^* (v \lrcorner \varphi)] \cdot c$ ,  $v \in \times T^q(V)$ ,  $y \in V$ . On the right hand side  $v$  may evidently be regarded as belonging to  $\times T^q(U \times V)$  so that  $v \lrcorner \varphi$  is defined, and  $j_y: U \rightarrow U \times V$  is given by  $j_y(x) = (x, y)$ ,  $x \in U$ . Let  $F: U \times V \rightarrow W$  be a differentiable map. The authors define  $\lambda: \Phi^{r+s}(W) \rightarrow \Phi^s(V)$  by

$$\lambda\psi = (-1)^{r+1} (F^* \psi)/c, \quad \psi \in \Phi^{r+s}(W),$$

and prove that

$$(d\lambda + (-1)^{r+1} \lambda d)\psi = (F^* \psi)/\partial c.$$

From this general result the theorem on chain-homotopies is immediately deduced. The authors also consider almost complex and complex structures and close with an example (due to Kodaira) showing that no such result is possible in the  $\hat{\delta}$ -cohomology for complex manifolds and analytic homotopies.

P. J. Hilton.

**Ehresmann, Charles et Shih Weishu:** Sur les espaces feuilletés: théorème de stabilité. C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 344—346 (1956).

Une structure feuilletée [généralisation de la notion de variété feuilletée Wu, Wen-Taun et Georges Reeb (ce Zbl. **49**, 126)] est essentiellement définie par la donnée d'une famille  $\varrho_i$  de relations d'équivalence ouvertes dans les ouverts  $O_i$  d'un recouvrement de l'espace topologique  $E$ . Ces  $\varrho_i$  sont assujetties à des conditions de compatibilité naturelles. Les feuilles sont les classes de la relation d'équivalence  $\varrho$  engendrée par les  $\varrho_i$ . Le Théorème de stabilité affirme que, moyennant quelques conditions de régularité imposées aux  $\varrho_i$  et à  $E$ , les feuilles voisines d'une feuille compacte et simplement connexe sont également compactes. La démonstration utilise les propriétés du groupe d'holonomie d'une feuille.

G. Reeb.

**Jacoby, Robb:** One-parameter transformation groups of the three-sphere. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 131—142 (1956).

Let  $S^3$  be the unit sphere in Euclidean 4-space given by  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ . Given relatively prime integers  $k', k''$ , let  $\pi_{(k', k'')}(t)$  be the rotation of  $S^3$  which con-

sists of a rotation through  $2\pi k't$  in the  $(x_1, x_2)$ -plane together with a rotation through  $2\pi k''t$  in the  $(x_3, x_4)$ -plane. Then  $\pi_{(k', k'')}(t)$  certainly represents an effective action of  $R_1$  (reals mod 1) on  $S^3$  without fixed point. The author proves, conversely, that if  $R_1$  operates effectively on  $S^3$ , so that  $tx \in S^3$  for  $t \in R_1$ ,  $x \in S^3$ , and if moreover  $R_1$  operates without fixed points then there are relatively prime integers  $k', k''$  and a homeomorphism  $\Phi: S^3 \rightarrow S^3$  such that

$$tx = \Phi^{-1} \pi_{(k', k'')}(t) \Phi x, \text{ for all } x \in S^3.$$

Thus the orbits are precisely the fibres described by Seifert (this Zbl. 6, 83) in his classification of fibrations of  $S^3$ . The orbit space is  $S^2$ . Let  $p(x)$  be the smallest positive  $t$  such that  $tx = x$ . Then  $p$  is a lower-semicontinuous function from  $S^3$  to  $R$  (reals). Moreover  $p$  is constant on orbits. Those orbits on which  $p$  is continuous are called ordinary (they fill out an open set in  $S^3$ ), the rest are exceptional. The author proves that there are at most two exceptional orbits and completes the proof by transforming these orbits into the intersections of  $S^3$  with the  $(x_1, x_2)$ - and  $(x_3, x_4)$ -planes.

P. J. Hilton.

**Weier, Joseph:** Beitrag zur Theorie der Abbildungen von  $(n+1)$ -Sphären in  $n$ -Sphären. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 16, 72–81 (1956) [Spanisch].

Das Hauptresultat der Arbeit besagt: Es sei  $f$  eine wesentliche, stetige Abbildung und  $g$  eine unwesentliche, stetige Abbildung der  $(n+1)$ -Sphäre  $S^{n+1}$  in die  $n$ -Sphäre  $S^n$  (mit  $n \geq 3$ ). Dann existiert eine natürliche Zahl  $\zeta$  mit folgenden Eigenschaften: für jedes Paar  $f', g'$  von zu  $f$  bzw.  $g$  homotopen, stetigen Abbildungen von  $S^{n+1}$  in  $S^n$  besitzt die Gleichung  $f'(p) = g'(p)$  mindestens  $\zeta$  Lösungspunkte  $p \in S^{n+1}$ ; für mindestens ein Paar solcher Abbildungen  $f', g'$  besitzt diese Gleichung genau  $\zeta$  Lösungspunkte. — Nicht bewiesen werden Bemerkungen, wonach  $\zeta = 1$  ist und die Voraussetzung  $n \geq 3$  zu  $n \geq 1$  abgeschwächt werden kann.

H. Bauer.

**Milnor, John:** On the immersion of  $n$ -manifolds in  $(n+1)$ -space. Commentarii math. Helvet. 30, 275–284 (1956).

Unter Immersion einer geschlossenen, orientierten, differenzierbaren,  $n$ -dim. Mannigfaltigkeit  $M$  in den euklidischen Raum  $E^{n+1}$  wird eine differenzierbare Abbildung  $f: M \rightarrow E^{n+1}$  vom Range  $n$  verstanden. Die Orientierungen von  $M$  und  $E^{n+1}$  legen positiv orientierte Normalen von  $f(M)$  fest, vermöge deren die sphärische Abbildung  $N: f(M) \rightarrow S^n$  auf die Einheitssphäre  $S^n$  des  $E^{n+1}$  definiert wird. Es wird nach den Graden  $d$  gefragt, die  $N$  für alle möglichen Immersionen von  $M$  annehmen kann. Für gerades  $n$  gilt das Resultat von Hopf:  $d = \frac{1}{2} \chi(M)$ , wobei  $\chi(M)$  die Eulersche Charakteristik ist. Für ungerades  $n$  gibt Verf. die folgenden Resultate: (1) Wenn  $M$  eine Immersion mit Grad  $d$  besitzt, so auch mit jedem Grad, der kongruent  $d \bmod 2$  ist. (2) Besitzt  $M$  eine Immersion mit Grad null (bei beliebigem  $n$ ), so ist  $M$  parallelisierbar. (3) Ist  $M$  nicht parallelisierbar und besitzt  $M$  eine Immersion, so besitzt  $M$  Immersionen mit beliebigem ungeradem Grad, aber keine mit geradem Grad. (4) Ist  $M$  sphärenähnlich im Sinne von Puppe und parallelisierbar, aber  $S^n$  nicht parallelisierbar, und besitzt  $M$  Immersionen, so sind Immersionen mit beliebigem geradem Grad, aber nicht mit ungeradem Grad möglich. (5) Der projektive Raum  $P^3$  besitzt Immersionen. Wenn eine 3-dim. Mannigfaltigkeit Immersionen besitzt, so mit jedem beliebigen Grad. — Für Einbettungen (topologische Immersionen) gilt:

$$d \equiv \frac{1}{2} \sum (M) \bmod 2, \quad |d| \leq \frac{1}{2} \sum (M),$$

wobei  $\sum (M)$  die Summe der Bettischen Zahlen von  $M$  für beliebigen Koeffizientenkörper ist.

Horst Schubert.

**Bing, R. H.:** A simple closed curve that pierces no disk. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 35, 337–343 (1956).

Verf. konstruiert eine einfache geschlossene Kurve  $J$  im euklidischen Raum  $E^3$  mit folgender Eigenschaft: Ist  $D$  ein Elementarflächenstück, dessen Rand  $J$  nicht.



trifft und kein zu  $J$  punktfremdes Elementarflächenstück berandet, so ist der Durchschnitt von  $J$  und  $D$  ein Cantorsches Diskontinuum. *Horst Schubert.*

**Denjoy, Arnaud:** *Les ensembles parfaits cartésiens totalement discontinus.* C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 2195—2198 (1956).

Ausführlicher Beweis zu einem im Jahre 1910 vom Verf. angezeigten Satze, wonach jede perfekte, total unzusammenhängende Punktmenge im  $n$ -dimensionalen Zahlenraum auf einem Jordanbogen liegt. *G. Aumann.*

## Theoretische Physik.

● **Shamos, Harris H. and George M. Murphy (edited by):** *Recent advances in science: physics and applied mathematics.* New York: University Press; New York-London: Interscience Publishers 1956. XI, 384 p.

Vorliegendes Buch ist Ergebnis eines Symposiums über Fortschritte der Wissenschaft (abgehalten im Frühjahr 1954 von der Universität New York). Obwohl bis zur Herausgabe der Vortragsmanuskripte gute 2 Jahre vergingen, und obwohl in diesen 2 Jahren auf fast allen behandelten Gebieten weitere, zum Teil wesentliche Fortschritte zu verzeichnen waren, trägt das Buch seinen Titel noch zu Recht. Das liegt nicht zuletzt daran, daß hier bedeutende, produktiv tätige Wissenschaftler ihre Meinungen frei von speziellen Problemen darlegten, wobei sie natürlich auch auf ganz neue, in der Entwicklung begriffene Dinge zu sprechen kamen, deren Weiterführung man in der jüngsten Vergangenheit verfolgen konnte. Die Artikelserie beginnt mit 2 Beiträgen über angewandte Mathematik. R. Courant und P. M. Morse versuchen, an Hand ausgewählter Beispiele zu zeigen, welche Aufgaben die Mathematik in der Vergangenheit zu bewältigen hatte und welchen sie sich in Zukunft gegenüberstellen wird. Einzelheiten werden nicht angegeben. Nach Courant beginnen seit B. Riemann erst heutzutage wieder die Mathematiker, sich weniger auf nur reine oder nur angewandte Mathematik zu spezialisieren. Die anderen 10 Beiträge sind physikalischer Natur. Davon befassen sich 4 mit Atom-, Kern- und Elementarteilchenphysik, 2 mit der Physik fester Körper, einer ist speziell tiefen Temperaturen gewidmet, einer den Mikrowellen (z. B. Radar) und schließlich sprechen 2 Artikel mehr den Ingenieur an. Man darf in diesem Buch keine Sammlung von „Originalarbeiten“ vermuten. Die einzelnen Arbeiten dürften auch dem, der nie mit den entsprechenden Gebieten zu tun hatte, nicht so viel geben, wie dem, dem sie helfen können, seine Vorstellungen abzurunden. Besonderes Interesse verdienen aus diesem Grunde die Beiträge zur Kernphysik von H. A. Bethe, I. I. Rabi, V. F. Weisskopf. Der Artikel zur Tieftemperaturphysik enthält als einziger der Reihe zahlreiche (54) analytische Ausdrücke, ohne eigentlich mehr zu bringen, als in den beiden Londonschen Bänden (F. London, *Superfluids I, II*; New York 1952, 1954) enthalten ist. Der Transistor-Artikel von W. Shockley ist im Prinzip natürlich auch im Shockleyschen Buch (W. Shockley, *Electrons and Holes in Semiconductors*, New York 1950) enthalten. Bei der Lektüre des Artikels von R. M. Bozorth (Ferromagnetismus) kann man erkennen, daß abseits vom öffentlichen Interesse auch andere wesentliche Fortschritte gemacht wurden. Wem das Buch in die Hand kommt — der sollte die Gelegenheit benutzen, sich in knapper Form von interessanten Fortschritten der Physik unterrichten zu lassen. *W. Klose.*

● **Langhaar, H. L.:** *Analyse dimensionnelle et théorie des maquettes.* Traduit de l'Américain par C. Charcosset. Paris: Dunod, Editeur, 1956. XVII, 230 p. 18 fig. Broché 1 900 F.

Dies ist eine gründliche Darstellung der Dimensionsanalyse und ihrer Anwendungen besonders in der Theorie der Modelle, der Elastizitätstheorie, der Hydrodynamik, der Theorie der Wärme und der Elektrizitätslehre. Das Buch enthält viele Beispiele aus der Praxis und viele Aufgaben. *G. Heber.*

Lampariello, Giovanni: Von Galilei zu Einstein. Arbeitsgemeinschaft Forsch. Nordrhein-Westfalen 53a, 84 S. (1956).

● Jeffreys, Sir Harold and Bertha Swirles: *Methods of mathematical physics*. 3. ed. Cambridge: At the University Press 1956. IX, 714 p. £ 4,4 s. net.

Das bewährte inhaltsreiche Werk, dessen zweite Auflage in dies. Zbl. 37, 317, besprochen wurde, ist kaum verändert. Einige Druckfehler sind berichtigt, einige Kleinigkeiten verbessert. Geringfügige Änderungen finden sich im ersten Kapitel über reelle Variable und im 17. Kapitel, wo die Airyschen Integrale für komplexe Argumente etwas ausführlicher diskutiert sind. Abgesehen von einer Erweiterung der Anhänge von 6 auf 11 Seiten ist der Umfang des Werkes erhalten geblieben.

J. Meixner.

● Atkin, R. H.: *Mathematics and wave mechanics*. London: William Heinemann, Ltd. 1956. XV, 348 p. 30 s.

Das Buch beginnt mit der Erklärung einer reellen Variablen und schließt mit der Berechnung von Streuvorgängen in der Quantenfeldtheorie. Dazwischen wird Analysis, Differentialgleichungs-Theorie, klassische Mechanik, klassische Feldtheorie, Theorie der Wellen, Quantenmechanik (relativistisch und nicht-relativistisch inklusive Störungstheorie), Quantenchemie und Statistik, und schließlich Quantenfeldtheorie betrieben. Angesichts der Fülle des Aufgezählten und der relativ geringen Seitenzahl muß man sich fragen, ob das gut geht? Die Anhäufung des Materials wird erkaufte durch praktisch vollständigen Verzicht auf physikalische Erklärung, durch geschickte Auswahl des Stoffes und prinzipielles Fortlassen auch komplizierter Zwischenrechnungen. Immerhin ist man erstaunt, eine Darstellung der LCAO-Methode vorzufinden. Das Buch ist für Physik-Nebenfachstudenten gedacht, die nicht über die nötige mathematische Vorbildung verfügen. Es eignet sich aber auch gut als Nachschlagwerk für den mathematischen Gehalt eines physikalischen Problems.

W. Klose.

● Budak, B. M., A. A. Samarskij und A. N. Tichonov: *Aufgabensammlung zur mathematischen Physik*. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 684 S. R. 14,45 [Russisch].

Diese Aufgabensammlung ist aus einem Lehrbuch von Samarskij und Tichonov (dies. Zbl. 44, 93) und einer kleineren Aufgabensammlung von Budak (B. M. Budak, *Aufgabensammlung zur mathematischen Physik*, Moskau 1952) entstanden. Dieses Material wurde aber noch erweitert, besonders in ausführlicherer Weise dargestellt. 130 Seiten stehen für die Aufgaben und Fragen, 520 Seiten für Lösungen und Lösungsanleitungen zur Verfügung. Es werden nur Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt. Die Kenntnis der allgemeinen Theorie wird vorausgesetzt. In drei Kapiteln werden die drei Typen der Gleichungen behandelt, die Kapitel sind nach den anzuwendenden Methoden unterteilt. Darauf folgen nochmals drei Kapitel mit der gleichen Einteilung, die wesentlich schwierigere Fragen behandeln. Ein wichtiger Teil der gestellten Aufgabe besteht darin, aus dem gegebenen physikalischen Problem die Differentialgleichung und ihre Randbedingungen herzuleiten. Meist wird der Lösungsweg so ausführlich geschildert, daß ein Selbststudium für ältere Studierende möglich ist. Dies Buch stellt eine Fundgrube für den angewandten Mathematiker wie auch für den theoretischen Physiker dar, so daß eine weite Verbreitung wünschenswert wäre.

W. Haacke.

## **Mechanik:**

● Kabal'skij, M. M., V. D. Krivošej, N. I. Savickij und G. N. Čajkovskij: *Typische Aufgaben zur theoretischen Mechanik und ihre Lösungsmethoden*. Unter Redaktion von P. M. Varvak. Kiev: Staatsverlag für technische Literatur 1956. 511 S. R. 11,90 [Russisch].

The main purpose of this volume is to be useful to the students of the technical universities and to those who propose to devote their attention to the problems of mechanics. The book is divided into three parts: statics (12 chapters, 220 pages, 58 examples), kinematics (6 ch., 137 p., 62 ex.) and dynamics (13 ch., 154 p., 94 ex.). The covered topics are on the level of the undergraduate courses in accordance with the Russian books for these schools. In the beginning of each chapter a short abstract of the theory is given, afterwards the methodical instructions and the proposed row of the solving procedure. The typical examples of the technical character are taken from Mestcherski's wellknown book, this Zbl. 41, 525, but certain examples are due to the authors. Analytic, geometric and vector methods are used for the theoretical treatement; in the solving procedure the elementary mathematical operations are often detailed (elementary differentiation and integration). Statics is based on seven axioms formulated in a somewhat different way from the usual one, but dynamics on three ones (for which the Newton name is not joined). The book has many shortcomings. In statics the central axis, the reduction of a system of forces to two forces having nonintersecting lines of action, the equilibrium of a body supported by six hinged bars and the center of gravity of bodies are not very clear explained. The main object of kinematics is the plane motion and the elements of the mechanisms; little attention is dedicated to the motion of a body about a fixed point. In dynamics the presentation of the fundamental theorems and their roles lacks of clearness. The central motion, the conservative forces and the Lagrange equations of the first kind are not discussed. The problems of dynamics of systems and of rigid bodies are mixed; the elementary theory of a gyroscope is given very insufficiently. There are much inconsequences in the notation: vectors are represented with the symbol  $r$  but somewhere is indicated that  $\bar{r} = f(t)$  or  $\bar{t} = t - \tau$  where  $t$  is a scalar; for the distances are used the marks  $OA, OB, R, l$ , etc. In statics the moment is indicated with  $M$  but in dynamics with  $L$ . The symbol  $T$  represents: the force (page 366), the time of motion (p. 372), the period of vibration (p. 396) and the kinetic energy (p. 381). The impuls has the mark  $S$  or  $J$ , but somewhere  $S$  is the displacement (and  $s$  too),  $J$  is the inertia force ( $F_i$  also). The potential function is indicated with  $U$  and  $II$ ;  $\varepsilon$  is the angular acceleration and the virtual displacement;  $N$  is the force and the power. There are many missprints (without erratum) and much indolence in printing, especially in the dimensions and units. Some formulas are not correct (XIV, 5; XX, 6; XX, 10; XX, 14; 1 on the p. 257, etc.). Some designs are not correct (for example; ex. 124— the acceleration is directed into the impossible direction; ex. 141— the wrong mode on the vector addition;  $r$  in the text but  $r$  on the design,  $S$  and  $s$  too). In certain examples the numerical data are given but the solution is in general form (ex. 123) and contrary. In ex. 67 is not marked that the relation  $C_0 C = \widehat{P M}$  represents the condition of the pure rolling without sliding what is the main characteristic of rollers. The nomenclature is not equalized (the Coriolis acceleration or supplementary acceleration but late in the text is rotational acceleration). On the contrary to other known Russian authors here the Newton axioms are not mentioned, D'Alembert's principle is „Petersburg's principle“; Carnot's theorem is Ostrogradski-Carnot's theorem. The general impression is that the method has more formal character then intuitive. The reader may easily get the idea that the mathematical procedure is the main object, what is often the case of the student's attention, since he does not, with a treatement given in this manner, see clearly the connection between mathematical procedure and the true physical problem, especially when the obtained results are not discussed. The formal mathematical explanation can not help the student to bridge the gap between mere cognizance of the general principles and the ability to apply them to concrete problems, what is the true goal of engineering education. D. Rašković.

• **Banach, Stefan**: **Mechanik.** (Bibl. Mat., T. 13.) 4. umgearb. Aufl. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1956. 558 S. zl. 32,— [Polnisch].

Vgl. die Besprechung der engl. Ausgabe in dies. Zbl. 43, 181.

• **Beer, Ferdinand D. and E. Russell Johnston**: **Mechanics for engineers.** London and New York: McGraw-Hill Co. 1956. 700 p. 56 s 6 d (\$ 7,50).

• **Szabó, István** (nach Vorlesungen von): **Einführung in die Technische Mechanik.** Zweite, verbesserte u. erweiterte Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1956. XII, 397 S. 492 Abb.

Die zweite Auflage des Buches (1. Aufl. vgl. dies. Zbl. 56, 423) erscheint schon knapp zwei Jahre nach der ersten und enthält neben zahlreichen kleinen Änderungen auch einige umfangreichere Ergänzungen. In vier Abschnitten wird ein geschlossener Überblick über diejenigen Teile der technischen Mechanik gegeben, deren Kenntnis bei der Lösung der grundlegenden Konstruktionsaufgaben wohl für jeden Studierenden der technischen Wissenschaften unentbehrlich ist. Nach einem einführenden Kapitel über Vektorrechnung wird deshalb zuerst die Statik des starren Körpers gebracht, die dann im dritten Abschnitt noch durch die wichtigsten Sätze über die



Statik der meist vorkommenden Stabsysteme vervollständigt wird. Der zweite Abschnitt behandelt die technische Statik elastischer Körper und gibt vor allem einen geschlossenen Überblick über die Festigkeitslehre des geraden Stabes. Im letzten Abschnitt, der etwa die Hälfte des Werkes einnimmt, werden nach einer Einführung in die Kinematik zunächst die Grundgleichungen der Dynamik eines starren Körpers entwickelt. Da bei allen Ausführungen immer von der räumlichen Ausdehnung des Körpers ausgegangen wird, kommt danach die sogenannte Punktdynamik als Kinetik des Schwerpunktes zur Behandlung. Es folgen dann noch Ausführungen über Bewegungswiderstände, über Schwingungen und über die Stoßvorgänge. Der Abschnitt wird mit einer Einführung in die Hydromechanik der wichtigsten Strömungsvorgänge und mit den Grundgesetzen der Ähnlichkeitsmechanik beschlossen. Die Stoffauswahl berücksichtigt wohl alle wichtigen Fragen der technischen Mechanik und zeugt von der reichen Erfahrung des Verfassers. Die Darstellung ist zwar im allgemeinen etwas knapp und erfordert ständige Mitarbeit, dafür erstreckt sie sich aber auch auf viele, scheinbar nebensächliche Fragen, deren Kenntnis für eine erfolgreiche Anwendung der allgemeinen Sätze auf praktische Fälle unersetzlich ist. Die durchgerechneten 83 Übungsaufgaben sind sehr geschickt gewählt und werden wohl viel zum besseren Verständnis der Theorie beitragen.

*A. Kuhelj.*

● Szabó, István: *Höhere Technische Mechanik*. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1956. XII, 427 S., 402 Abb. DM 31,50.

Das Buch ist als Fortsetzung der „Einführung in die Technische Mechanik“ desselben Verfassers (dies. Zbl. 56, 423) gedacht und behandelt in vier Hauptabschnitten die Prinzipien der Mechanik und die Mechanik der deformierbaren Körper. Vorausgesetzt wird nur die Kenntnis der einfachsten Lehren der Technischen Mechanik und der gewöhnlich an Technischen Hochschulen vorgetragenen Sätze der höheren Mathematik. Der Inhalt des Buches ist außerordentlich reichhaltig, so daß auf ein Eingehen von Einzelheiten verzichtet werden muß. Überall werden nach kurzer Darlegung der wichtigsten allgemeinen Beziehungen die Anwendungen auf zahlreiche Probleme der technischen Mechanik gebracht. So werden z. B. im Abschnitt über die Prinzipien der Mechanik die Arbeitssätze der Elastizitätslehre und die Schwingungen der Saiten, Membranen und Stäbe aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten bzw. aus dem D'Alembertschen Prinzip abgeleitet. Aus der Elastizitätstheorie wird der ebene und achsensymmetrische Spannungszustand, die Kirchhoffsche Plattentheorie, die Torsion, Instabilitätsprobleme und die Schalentheorie behandelt. Auch beim Überblick über die Plastizitätstheorie behandelt der Verfasser außer den Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen sehr viele praktisch wichtige Fragen. Dasselbe gilt auch vom Abschnitt über die Theorie der Flüssigkeiten und Gase, wo vor allem die ebene Bewegung idealer Flüssigkeiten, die schleichende Bewegung um die Kugel und die Hauptergebnisse der Grenzschicht-Theorie behandelt werden. Von der Gasdynamik werden erörtert die linearisierte Theorie der Strömungen um schlanke Körper und einige Fragen über Druckstöße. — Bei der Fülle des Stoffes ist die Darstellung notgedrungen knapp und erfordert deshalb vom Lernenden ständige Mitarbeit. Alle wichtigen Beziehungen werden auch mathematisch begründet und wenn nötig, sind entsprechende mathematische Ergänzungen eingeschaltet; aber bei der Darstellung mechanischer Zusammenhänge stehen doch oft physikalische Erörterungen im Vordergrund. So wird die virtuelle Verrückung zuerst anschaulich erklärt, und erst später werden die verallgemeinerten Koordinaten explizite eingeführt. In bezug auf die Stoffauswahl wird man dem Verfasser wohl überall zustimmen; nur bei der einen oder anderen der nur vorübergehend genannten Näherungsmethoden wären vielleicht einige ergänzende Bemerkungen doch am Platze. Wegen seiner Reichhaltigkeit und Behandlungsart wird das vorliegende Buch den Zugang zur Forschung auf diesem Gebiete gewiß wesentlich erleichtern.

und darüber hinaus Vertretern der theoretischen Richtung die Probleme und Methoden der höheren technischen Mechanik näherbringen.

*A. Kuhelj.*

**Krall, Giulio:** Sul problema centrale della dinamica sui ponti. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 19, 373—381 (1956).

Contraria a risultati di altri autori (Stokes, Zimmerman, Timoshenko, Bleich) in questo lavoro, tenendo in rilievo il teorema di Coriolis, l'A. tratta il problema centrale della dinamica sui ponti, con riguarda ad una distribuzione di carichi diffusi su un intervallo ed a strutture più complesse (attuali dal punto di vista aerodinamico). L'equazione per le oscillazioni trasversali è  $B w'''' + \mu \ddot{w} = p(x - vt) [1 - (v^2 w'' + 2v \dot{w}' + \ddot{w}) g^{-1}]$ ,  $p = p(x, t) = p(x - vt)$  è il carico dinamico che si muove da un estremo verso altro d'asta appoggiata agli estremi con velocità uniforme ( $v$ ),  $B = EI$ . Donando a questa equazione un aspetto integro-differenziale alcuni soluzioni particolari sono pervenuti. 1. Il caso  $p(x - vt) = p_0 = \text{cost.}$  2. Il caso d'un carico di massa trascurabile, mobile con velocità  $v$  su un binario di lunghezza infinita corrente su un suolo elastico. 3. Come in 2. ma si consideri anche la massa del carico. 4. Un treno continuo indefinito  $p_0 = \text{cost.}$  corre con velocità  $v$  su un binario indefinito. In questo caso la velocità critica è  $v_{cr} = 2g p_0^{-1} \sqrt{B\beta}$ ,  $-\beta w$  è reazione elastica,  $w_0 = p_0/\beta$ . Questa relazione segnala l'effetto d'inerzia del carico mobile contraria a risultato da Timoshenko (dove interviene la massa per unità di lunghezza del binario).

*D. Rašković.*

**Adler, Fred P.:** Missile guidance by three-dimensional proportional navigation. J. appl. Phys. 27, 500—507 (1956).

Bei der ebenen Proportionalnavigation ist die Winkelgeschwindigkeit der Bahntangente des Flugkörpers stets proportional zur Winkelgeschwindigkeit der Visierlinie vom Geschloß zum Ziel. Im Raum muß man diese Definition sinngemäß abändern. Das geschieht hier unter Berücksichtigung der Forderung, die Bahn möglichst schnell auf den Kollisionskurs zu bringen. Setzt man nur verhältnismäßig geringe Abweichungen von diesem voraus, so erhält man ein System von linearen Differentialgleichungen. Die beigelegten Beispiele zeigen, daß diese Annäherung in den meisten Fällen genügen dürfte. Wenn die Querschleunigungen der Geschloßbahn beschränkt bleiben sollen, muß eine neu eingeführte effektive Navigationskonstante  $> 2$  sein.

*H. Molitz.*

**Oswald, Telford W.:** Dynamic behaviour during accelerated flight with particular application to missile launching. J. aeronaut. Sci. 23, 781—791 (1956).

Der Verf. behandelt die Bewegung gesteuerter Projektile, die außer vom Düsen Schub und der Schwerkraft noch von aerodynamischen Kräften beeinflusst wird. Insbesondere wird das Verhalten bei rascher Beschleunigung des Flugkörpers untersucht. Bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen wird merkwürdigerweise bei der Translation in der Hauptbewegungsrichtung kein Bewegungswiderstand eingeführt, obwohl für die anderen Bewegungskomponenten die wesentlichen Auftriebs- und Widerstandsglieder erscheinen. Auf diese Weise erhält der Verf. in der Hauptbewegungsrichtung eine gleichförmig beschleunigte Translation. Für die Drehung um die horizontale Querachse des Flugkörpers ergibt sich nach üblicher Linearisierung eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten, die auf eine Bessel-Gleichung zurückgeführt werden kann. Verf. entwickelt die allgemeine und numerische Lösung dieser Gleichung und wertet sie für die Durchrechnung eines praktischen Falles aus.

*G. Heinrich.*

**Hunter, M. W., A. Shef and D. V. Black:** Some recent aerodynamic techniques in design of fin-stabilized free-flight missiles for minimum dispersion. J. aeronaut. Sci. 23, 571—577 (1956).

**Gazarchi, L. A.:** Über ein neues bezüglich der Geschwindigkeit algebraisches Integral des verallgemeinerten Dreikörperproblems. Ukrain. mat. Žurn. 8, 5—11 (1956) [Russisch].

Im Anschluß und als Weiterführung der Arbeiten von Ju. D. Sokolov [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 46, 95—98 (1945)] und E. Egervary (dies. Zbl. 29, 234) betrachtet der Verf. ein verallgemeinertes räumliches Dreikörperproblem. Es handelt sich um drei gleiche Massenpunkte  $m_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ), die sich unter der Einwirkung der Kräfte vom Betrage  $m_i m_j |A r_k + B r_k^2|$  befinden, wobei  $A$  und  $B$  Konstanten und  $r_k$  ( $k = 0, 1, 2$ ) die Entfernung der Massenpunkte  $m_i$  und  $m_j$  bedeutet. Verf. leitet das Integral

$$x \xi' - \xi x' + y \eta' - \eta y' + z \zeta' - \zeta z' = \text{const}$$

ab; dabei sind  $x, y, z$  die Koordinaten des Punktes  $m_1$  in bezug auf ein System von rechtwinkligen Achsen fester Richtung mit dem Ursprung in  $m_0$ , während  $\xi, \eta, \zeta$  die Koordinaten des Punktes  $m_2$  sind in bezug auf ein zum vorigen parallelen System, Achsen mit dem Ursprung im Massenmittelpunkt der Punkte  $m_0$  und  $m_1$ . Dieses Integral ist nicht ableitbar aus den Integralen, die den klassischen entsprechen.

T. P. Angelitch.

**Schubart, J.: Numerische Aufsuchung periodischer Lösungen im Dreikörperproblem.** Astron. Nachr. 283, 17—22 (1956).

Im sogenannten problème restreint, das von E. Strömgren (Kopenhagen) und seinen Mitarbeitern ausführlich numerisch untersucht worden ist, umlaufen sich zwei gleich große Massen mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einer Kreisbahn. Die 3. Masse ist so klein, daß ihre Anziehung auf die großen Körper vernachlässigt werden kann. Es ist zweckmäßig, hierbei ein rotierendes Koordinatensystem einzuführen. — J. Schubart erweitert das Problem, und nimmt an, daß die beiden gleich großen Massen eine elliptische Bewegung besitzen, beschränkt sich aber ebenfalls auf die Ebene. Die Bewegung kann dann nur in einem ruhenden Koordinatensystem untersucht werden. Strömgrens periodische Lösungen ergeben sich dann als Spezialfall für  $e = 0$ . — Als Ausgang für die numerische Behandlung wählt Schubart den Grenzfall einer unendlich schlanken Ellipse. Darauf wird eine periodische Lösung für den Exzentrizitätswinkel  $\varphi = 25^\circ$  nachgewiesen, und schließlich wird der Übergang bis zum Kopenhagener problème restreint als sehr wahrscheinlich nachgewiesen. — Diese neue Art von periodischen Lösungen ist geeignet, unsere Kenntnisse erheblich zu erweitern. Sie wird aber auch praktische Bedeutung haben, z. B. bei Doppelsternsystemen mit einem kleinen Begleiter. K. Schütte.

**Ziegler, Hans: Der symmetrische Kardankreisell unter einem Moment an der Achse des äußeren Rings.** Z. angew. Math. Phys. 7, 253—256 (1956).

**Grammel, Richard und Hans Ziegler: Der schnelle symmetrische Kardankreisell mit Lagerreibung.** Z. angew. Math. Mech. 36, 278—279 (1956).

• **Merkin, D. R.: Gyroskopsysteme.** Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 299 S. R. 9,45 [Russisch].

The book contains the systematic explanations of the gyroscopic problems in the spirit of the W. Thomson and P. Tait allusions given in the known book „Treatise on Natural Philosophy“ (1897). The main object of the book are the consideration about the general properties of these systems and the possibility to simplify the equations of motion. The theoretical explanations are followed with the usual examples in the field of this matter. The book is divided into six chapters with appendix. In the first chapter the author deals with the general properties of the gyroscopic forces in the case of a system with cyclic coordinates and nonstationary constraints or with nonholonomic systems. The 2<sup>nd</sup> Ch. is dedicated to the gyroscopic forces which depend on the parameter and to the conditions for the simplification of the differential equations of motion. The 3<sup>rd</sup> Ch. deals with the motions under the influence of the gyroscopic forces only. In the next two chapters the author considers the influence of these forces on the motion of conservative or non-conservative systems. The last chapter deals with the problems of the stationary motions of gyroscopic systems and the criterions for the stability of these motions.



In the Appendix one discusses the stability problem of the motion of a linear system the characteristic equation of which has the multiple roots with real parts equal zero. The book shall be useful to complete the emptiness in the theoretical treatment of these problems.

*D. Rašković.*

**Eckhardt, Homer D.:** Graphical aids for frequency response analysis. *J. aeronaut. Sci.* **23**, 83—86 (1956).

**Rašković, Danilo P.:** On some characteristics of the frequency equations of small vibrations of some particular holonomic conservative systems. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **9**, 334—344 (1956).

Vengono svolte varie considerazioni sulla determinazione delle frequenze proprie nelle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio di un sistema di masse accoppiate elasticamente e vincolate elasticamente con l'esterno, e nelle piccole vibrazioni torsionali di un albero con  $n$  volani. La determinazione viene in ogni caso ricondotta a quella relativa ad un caso fondamentale, nel quale l'A. calcola esplicitamente i coefficienti dell'equazione secolare. Utile impiego trova pure il metodo delle differenze finite.

*T. Manacorda.*

**Benz, G.:** Die mechanische Bedeutung des instabilen Zweiges der Frequenz-Amplituden-Kurve bei parametererregten Schwingungen. *Z. angew. Math. Mech.* **36**, 273—274 (1956).

**Paslay, P. R. and A. Slibar:** Optimale Auslegung von Salomon-Schwingungstilgern. *Ingenieur-Arch.* **24**, 182—187 (1956).

**Basch, A.:** Eine konstruktive Bestimmung der Haupttrichtungen und Eigenfrequenzen der Schwingungen eines Systems von zwei Freiheitsgraden. *Österreich. Ingenieur-Arch.* **10**, 119—124 (1956).

In einer früheren Arbeit ordnet Verf. einem linearen Schwingungssystem von zwei Freiheitsgraden in der Ebene der Lagekoordinaten eine „Trägheits-“ und eine „Elastizitätsellipse“ zu (dies. Zbl. **56**, 174). Hier werden die Lagen der Hauptachsen beider Ellipsen rechnerisch und zeichnerisch bestimmt und abschließend die Lagebeziehungen mechanisch gedeutet.

*W. Haacke.*

**Reissig, Rolf:** Über die Stabilität erzwungener Bewegungen. *Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, math.-naturw. R.* **5** (1955/56), 103—104, dtsh., russ., engl. und französ. Zusammenfassg. 105 (1956).

Dem Sinne nach gleichwertiger Abdruck einer an anderer Stelle erschienenen Arbeit des Verf. [*Math. Nachr.* **13**, 309—312 (1955)].

*W. Haacke.*

**Reissig, Rolf:** Neue Methoden der nichtlinearen Mechanik von Krylow und Bogoljubow. *Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, math.-naturw. R.* **5** (1955/56), 99—101, deutsche, russ., engl. und französ. Zusammenfassg. 101—102 (1956).

Verf. gibt einen kurzen Überblick über die Anwendung der Methode von Krylov-Bogoljubow auf autonome quasilineare Systeme unter Berücksichtigung neuerer Ergebnisse.

*W. Haacke.*

**Wagner, H.:** Eine Näherungsformel für die Schwingungsdauer eines Pendels. *Elemente Math.* **11**, 82—86 (1956).

**Seibert, Peter:** Über unstetige Regelungen dynamischer Systeme mit mehreren Freiheitsgraden. *Z. angew. Math. Mech.* **36**, 288—289 (1956).

**Derwidué, L.:** Sur un théorème de Tait et Thomson. *Mathesis* **65**, 196—201, (1956).

Verf. knüpft an ein Theorem von Tait und Thomson an, wonach das Gleichgewicht eines Systems von  $n$  Freiheitsgraden, das unter dem Einfluß konservativer Kräfte steht, stabil bleibt, wenn dissipative und gyroskopische Kräfte hinzutreten, sofern die ersteren gewisse Bedingungen erfüllen. Beurteilt man die Stabilität nach der Methode der kleinen Schwingungen, dann muß nämlich die Koeffizientenmatrix der dissipativen Glieder positiv definit bzw. semidefinit sein. In einer vorangehenden Arbeit des Verf. wurde gezeigt, daß stets dann Stabilität gewährleistet ist, wenn die

drei nunmehr als komplex vorausgesetzten Koeffizienten-Matrizen der Beschleunigungsglieder, der Dissipationsglieder und der Potentialglieder positiv definit und hermitesch sind. In Erweiterung dieses Ergebnisses zeigt nun der Verf., daß die Realteile der Wurzeln der Säkulargleichung stets negativ oder Null sein müssen, wenn die Koeffizientenmatrix der dissipativen Glieder positiv semidefinit und hermitesch ist. Tritt eine  $p$ -fache rein imaginäre Wurzel auf, so erniedrigt sich der Rang der Säkularmatrix um  $p$  Einheiten. In Erweiterung eines anderen Satzes von Tait und Thomson zeigt der Verf. schließlich, daß die Säkulargleichung nur Wurzeln mit negativem Realteil besitzt, wenn von den komplexen Koeffizientenmatrizen der Beschleunigungs- und der Potential-Glieder eine der beiden positiv definit, die andere positiv semidefinit ist und wenn die Koeffizientenmatrix der dissipativen Glieder positiv definit, die der gyroskopischen Glieder schief-hermitisch ist. Ist hingegen die Koeffizientenmatrix der dissipativen Glieder positiv semidefinit oder Null, besitzt die Säkulargleichung nur Wurzeln mit negativem oder verschwindendem Realteil und die Säkularmatrix erniedrigt ihren Rang um  $p$  Einheiten, falls eine  $p$ -fache rein imaginäre Wurzel auftritt.

G. Heinrich.

**Rašković, Danilo:** A statical property of the Pythagorean and the cosine theorems. Tehnika Organ Saveza Inženjera i Tehničara FNRJ 11, 477—479, engl. Zusammenfassg. 479 (1956) [Serbisch].

The author shows that the Pythagorean theorem and the theorem of the cosine have also a very interesting statical property explained with a new theorem as follows: „The centre of gravity of a triangle whose vertices are the centres of gravity of the surfaces, symmetrical, similar and similarly drawn on the sides of the triangle, satisfying above theorems, coincides always with the centre of the gravity of the basic triangle (rectangular or scalenous)“.

**Pailloux, Henri:** Charges roulantes. Bull. Sci. math., II. Sér. 80, Partie I 46—61 (1956).

Le problème des charges roulantes sur un pont a été longuement étudié. Il a donné lieu à de nombreux développements, sans que, semble-t-il, une solution rigoureuse ait été tentée. L'A. donne ici une mise en équation correcte de ce problème. Dans le cas d'une charge roulante montée sur ressort, la solution du problème résulte de la résolution d'une équation de Volterra de seconde espèce, possédant une solution unique; on démontre donc l'existence d'une telle solution. S'il existe différentes charges roulantes, on rencontre autant d'équations de Volterra, formant ainsi un système possédant une solution unique lorsque les charges sont montées sur ressorts. L'A. donne encore la mise en équation du problème dans le cas d'une ou plusieurs charges roulantes adhérentes au pont. On rencontre alors une ou plusieurs équations de Volterra de première espèce dans un cas non classique et l'existence de la solution reste à démontrer.

R. Gran Olsson.

**Valentine, F. A.:** The motion of a particle constrained to move on a rough convex curve. Amer. math. Monthly 63, 16—20 (1956).

Richiamata la nozione di curva convessa differenziabile, l'A. studia i moti di un punto costretto a muoversi lungo la curva chiusa e sollecitato dalla sola reazione del vincolo con attrito. Se  $\mu$  è il coefficiente di attrito, si è condotti all'equazione differenziale  $d^2s/dt^2 = -\mu v^2/\rho$ . Se  $v_0 > 0$ , la soluzione di quest'equazione che soddisfa alle condizioni iniziali  $s = s_0$ ,  $v = ds/dt = v_0 > 0$  per  $t = 0$  si deduce dall'equazione  $dv/ds = -\mu v/\rho$  finchè si ha  $v \neq 0$ . Se  $\Phi$  è l'angolo che la tangente alla curva nel generico punto forma con una direzione orientata fissa, talchè si ha lungo la curva  $1/\rho = d\Phi/ds$ , la legge della velocità è espressa dalla formula  $v = v_0 e^{\mu(\Phi_0 - \Phi)}$ . Se ne deduce che, quando il punto ritorna dopo un giro nella posizione iniziale, la velocità è data da  $v(\Phi_0 + 2\pi) = v_0 e^{-2\pi\mu}$ , cioè è indipendente dalla curva. Inoltre se  $L$  è la lunghezza della curva, si trova per il tempo  $T(\Phi_0)$  impiegato dal punto a compiere un giro nel senso levogiro la formula  $T(\Phi_0) = \frac{e^{-\mu\Phi_0}}{v_0} \int_{s_0}^{s_0+L} e^{\mu\Phi} ds$ ,

dove  $\Phi$  lungo la curva è una determinata funzione  $\Phi(s)$  dell'arco  $s$ . L'A. dimostra che affinché  $T(\Phi_0)$  sia indipendente da  $\Phi_0$  è necessario e sufficiente che la curva sia una circonferenza, nel qual caso si ha  $T = (r/\mu v_0) (e^{2\pi\mu} - 1)$ . Per  $\mu \rightarrow 0$ , quest' espressione di  $T$  tende a  $2\pi r/v_0$ , come dev'essere. Il recensore osserva che i risultati si possono leggere in forma più generale considerando l'andamento qualitativo delle soluzioni di una equazione differenziale del tipo  $d^2y/dx^2 = (dy/dx)^2 f'(y)$ , essendo  $f(y)$  una qualunque funzione derivabile di  $y$ , la cui derivata sia integrabile.

*G. Lampariello.*

**Meyer zur Capellen, W.:** Harmonische Analyse bei der Kurbelschleife. Z. angew. Math. Mech. **36**, 151—152 (1956).

**Rosenauer, N.:** Anwendung von komplexen Veränderlichen zur Synthese einer Kurbelschwinge mit vorgeschriebenen Grenzen der Abtrieb-Winkel-Geschwindigkeit. Ingenieur-Arch. **24**, 43—46 (1956).

Das Erscheinen der Arbeit von K. H. Sieker [Konstruktion, Heft 9 (1954)] hat Verf. angeregt, die Anwendung der komplexen Veränderlichen zur Lösung eines anderen Problems zu zeigen. Eine Lösung des im Titel gekennzeichneten Problems wurde vom Verf. bereits vor Jahren veröffentlicht [Maschinenbau und Getriebetechnik **12**, 25—27 (1944)]. Da aber nach Ansicht des Verf.'s von der betreffenden Auflage kaum etwas erhalten geblieben sein dürfte, hält Verf. es für zweckmäßig, eine verbesserte Lösung des Problems zu zeigen, in der wesentliche Vereinfachungen eingeführt sind. — [Einen anderen Beweis dafür, daß die erhaltenen Getriebelagen den extremen Abtriebs-Winkel-Geschwindigkeiten entsprechen, liefert die von F. Freudenstein [Trans. Amer. Soc. Mech. Engineers, Paper No. **55** —SA—20 (1955)] festgestellte Eigenschaft, daß in den genannten Lagen die Kollineationsachse zur Koppel senkrecht steht. Bem. des Ref.].

*R. Gran Olsson.*

**Heinrich, G.:** Zur Stabilität der Strickleiter. Österreich. Ingenieur-Arch. **10**, 175—189 (1956).

Ref. hat 1951 die Gleichgewichtsformen einer Strickleiter untersucht, die aus einer Anzahl von starren, gleich langen Sprossen besteht, deren Enden in gleichen Abständen an zwei undehnbaren Schnüren gelenkig befestigt sind (dies. Zbl. **43**, 369). Verf. behandelt nun unter der Annahme, daß die erste Sprosse festgehalten wird und an den Enden der letzten Sprosse zwei gegebene Kräfte  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$  konstanter Richtung und Größe angreifen, den kontinuierlichen Grenzfall als Variationsproblem. Sind  $\mathfrak{x}_1(s)$  und  $\mathfrak{x}_2(s)$  die auf die Bogenlänge  $s$  bezogenen Ortsfunktionen der beiden Holmkurven und bezeichnet  $l$  deren Länge,  $a$  die Länge der Sprossen, dann ist das

Potential  $U = - \int_0^l (\mathfrak{P}_1 \mathfrak{x}'_1 + \mathfrak{P}_2 \mathfrak{x}'_2) ds$  unter den Nebenbedingungen  $\mathfrak{x}'_1 = \mathfrak{x}'_2 = 1$

und  $(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)^2 = a^2$  zu einem Minimum zu machen. Nullsetzen der 1. Variation liefert analytische Ausdrücke für die vom Ref. auf geometrischem Wege gefundenen Gleichgewichtsbedingungen (die Sprossen bilden eine Strahlfläche konstanter Dralls, für welche die Holmkurven zwei Schmieglinien konstanter Torsion abgeben; die beiden Holmspannungen an den Enden einer Sprosse bilden mit dieser gleiche Winkel und haben längs der Leiter eine feste Summe). — Die Auswertung führt bald auf elliptische Integrale (es bestehen Zusammenhänge mit den geodätischen Linien des Drehellipsoids), so daß sich Verf. im folgenden auf die Betrachtung des schraubensymmetrischen Spezialfalls beschränkt (Sprossenfläche = Wendelfläche, Holmkurven = gewöhnliche Schraublinien). Die Untersuchung der 2. Variation liefert für diesen Fall ein recht einfaches Stabilitätskriterium. *W. Wunderlich.*

### Elastizität. Plastizität:

● **Sokolnikoff, I. S.:** Mathematical theory of elasticity. 2<sup>nd</sup> edition. New York, Toronto, London: Mc Graw-Hill Book Company Inc. 1956. XI, 476 p. 73 Fig. 71/6 s.



Diese 2. Auflage ist im Vergleich zur ersten (1946) umgearbeitet und bedeutend erweitert. Sie enthält neu als Einführung einen geschichtlichen Überblick vor allem über die ersten Anfänge der Elastizitätstheorie (S. 1—4). Kap. I (S. 5—34) behandelt die Deformationen, Kap. II (S. 35—55) die Spannungen, Kap. III (S. 56—90) allgemeine Elastizitätsgleichungen, Kap. IV (S. 91—248) die Dehnung, Torsion und Biegung von Balken. Diese vier Kapitel sind nur etwas umgearbeitet und wenig, insbesondere Kap. IV, erweitert. Die Kap. V (S. 249—327) und VI (S. 328—376), in welchen die ebenen und räumlichen Probleme der Elastizitätstheorie behandelt werden, sind ganz neu. Endlich ist Kap. VII (S. 328—465) das gründlich umgearbeitete Kap. V der I. Aufl. und bezieht sich auf die verschiedenen Variationsmethoden, die in der Elastizitätstheorie verwendet werden. Die guten Vorzüge dieses Buches, schon von der ersten Aufl. her bekannt, kommen in dieser Aufl. noch stärker zum Vorschein. Diese neue Aufl. ist schon an anderen Stellen günstig besprochen, daher will ich mich hier auf folgendes beschränken: Dieses Buch ist in der Wahl des gebotenen Materials und noch mehr methodisch sehr nahe der russischen Literatur über den gleichen Gegenstand. Diese ist aber der klassischen weit überlegen. Einen weiteren Vorzug bildet jedenfalls die Einführung von kartesischen Tensoren und ihre etwas breitere Verwendung als es sonst der Fall ist. In dieser Hinsicht ist zu wünschen, das in der nächsten Aufl. auch allgemeine Tensoren zur Verwendung kommen.

*T. P. Angelitch.*

**Matschinski, Matthias:** *Introduction des moyennes dans les équations de la mécanique et principe de Saint-Venant.* C. r. Acad. Sci., Paris **243**, 1273—1276 (1956).

**Soule, J. W.:** *The solution of multiple-branch piping-flexibility problems by tensor analysis.* J. appl. Mech. **23**, 176—180 (1956).

A general method of flexibility analysis is presented which, by the use of tensors, makes it possible to derive the equations of performance of highly complex piping systems by a routine procedure.

Zusammenfassg. des Autors.

**Soule, J. W.:** *Tensor-flexibility analysis of pipe-supporting systems.* J. appl. Mech. **23**, 181—184 (1956).

A general tensor method of analysis is used to derive the equations of performance of a complete piping system, including effect of pipe weight, supports, and thermal expansion.

Zusammenfassg. des Autors.

**Ericksen, W. S.:** *Bending and torsion of circular cylinder cantilever beams of cylindrically aeolotropic material.* J. appl. Mech. **23**, 185—190 (1956).

L'A. risolve, nell'ambito della teoria classica, il problema della torsione e contemporanea flessione di un cilindro cavo dotato di anisotropia a simmetria cilindrica. Il metodo consiste nello scegliere opportunamente l'espressione in coordinate cilindriche di alcune componenti dello stress e nel determinare le altre in modo da soddisfare le rimanenti equazioni indefinite e condizioni al contorno. Viene anche precisata l'espressione esplicita delle componenti di spostamento e formulate alcune osservazioni sulla soluzione trovata.

*T. Manacorda.*

**Levi, Franco:** *Sul calcolo degli effetti di bordo nelle volte sottili cilindriche.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **20**, 342—346 (1956).

**Theocaris, P. S.:** *The stress distribution in a strip loaded in tension by means of a central pin.* J. appl. Mech. **23**, 85—90 (1956).

**Sadowsky, Michael:** *Stress concentration caused by multiple punches and cracks.* J. appl. Mech. **23**, 80—84 (1956).

**Moskvitin, V. V.:** *Die wiederholte elastisch-plastische Torsion von Stäben.* Vestnik Moskovsk. Univ. **11**, Nr. 3 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk 2), 31—40 (1956) [Russisch].

After the unloading of a bar twisted beyond the elastic range, residual stresses and strains due to the plastic deformation remain in the bar. This paper is concerned with the deformation and stresses in such a bar subjected to repeated twist. Using Hencky stress-strain equations and neglecting Bauschinger effect, the author shows

that if the problem of elastic-plastic torsion during the first loading process is solved, the evaluation of strains and stresses during the repeated loading is reduced to simple algebraic operations. The discussion is illustrated by a numerical example (torsion of the bar of quasi-elliptic cross-section). *D. Radenković.*

Cox, H. L.: The deflexion of a sprung rail. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 9, 294—305 (1956).

Formulae are derived for the deflexion under a concentrated load of a flexible rail supported on sprung chairs uniformly spaced. *Zusammenfassg. des Autors.*

Horvay, G., C. Linkous and J. S. Born: Analysis of short thin axisymmetrical shells under axisymmetrical edge loading. *J. appl. Mech.* 23, 68—72 (1956).

Sonntag, G.: Lange Zylinderschale mit nicht achsensymmetrischer Randbelastung durch Kräfte in Zylinder-Längsrichtung. *Z. angew. Math. Mech.* 36, 289—291 (1956).

Nagel, Felix E.: Column instability of pressurized tubes. *J. aeronaut. Sci.* 23, 608—609 (1956).

Huffington jr., N. J.: Theoretical determination of rigidity properties of orthogonally stiffened plates. *J. appl. Mech.* 23, 15—20 (1956).

Hijab, Wasfi A.: The effect of shape on the orthotropic characteristics of a rectangular plate. *J. aeronaut. Sci.* 23, 696—697 (1956).

Symonds, Malcolm F.: Minimum weight design of a simply supported transversely stiffened plate loaded in shear. *J. aeronaut. Sci.* 23, 685—694 (1956).

Sonntag, G.: Einfluß einer Nachgiebigkeit der Randeinspannung bei Membranen oder bei Platten großer Durchbiegung unter gleichmäßiger Belastung. *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.* 22, 21—26 (1956).

Wu, Ching-Sheng: Bending of rectangular plate with clamped edges. *J. aeronaut. Sci.* 23, 601—602 (1956).

Weil, N. A. and N. M. Newmark: Large deflections of elliptical plates. *J. appl. Math.* 23, 21—26 (1956).

Rüdiger, D.: Spannungen und Verschiebungen der krummen Flächen mit elliptischem Grundriß. *Österreich. Ingenieur-Arch.* 10, 66—74 (1956).

Die vorliegende Arbeit enthält Lösungen für die Membranspannungen und Verschiebungen krummer Flächen mit elliptischem Grundriß. Die Ermittlung der Spannungen wird auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung einer Spannungsfunktion zurückgeführt; diese Gleichung ist — abgesehen von der Störungsfunktion — mit derjenigen identisch, die A. Pucher [Beton u. Eisen 33, 298—304 (1934)] zur Berechnung des Spannungszustandes in doppelt gekrümmten Flächen mit kreisförmigen Grundrissen ermittelt hat, und geht im Sonderfall gleicher Halbachsen in diese über. Die Berechnung der Verschiebungen der elliptischen Flächen wird durch Einführung der senkrechten Verschiebung auf dieselbe partielle Differentialgleichung transformiert. Zur Ermittlung der endgültigen Gleichungen wird die allgemeine Theorie der Schalen, wie sie von H. Neuber aufgestellt wurde, zugrunde gelegt (dies. Zbl. 33, 29). Für eine Anzahl besonderer Flächen und Belastungen sind explizite Ausdrücke für die Längskräfte in der Schale angegeben. *R. Gran Olsson.*

Tungl, E.: Membranspannungszustand im elliptischen Paraboloid. *Österreich. Ingenieur-Arch.* 10, 308—314 (1956).

Die grundlegenden Gleichungen für die Bestimmung des Spannungszustandes in gekrümmten Flächen wurden 1934 von A. Pucher abgeleitet [„Über den Spannungszustand in gekrümmten Flächen“. Beton und Eisen 33, 298 (1934)]. Diese Ergebnisse werden hier auf eine elliptische Paraboloidschale angewandt, mit einer speziellen, aber einfachen Belastung pro Grundrißflächeneinheit. Die Schale hat rechteckigen Grundriß. Als Sonderfall wird das Rotationsparaboloid über quadratischem Grundriß und bei rotationssymmetrischer Belastung behandelt.

*E. Hardtwig.*

Schnell, W.: Zur Berechnung der Beulwerte von längs- oder querversteiften rechteckigen Platten unter Drucklast. Z. angew. Math. Mech. 36, 36—51 (1956).

Das Lösungsverfahren, das in dieser Arbeit für die exakte Untersuchung der elastischen Knickung gedrückter, längs- und querversteifter Platten angewandt wird, erhält zunächst eine sehr allgemeine Darstellung: Gegeben sei eine homogene, lineare Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{\mu=0}^4 a_{\mu} v^{(\mu)}(z) = 0, \quad v^{(\mu)} = \frac{\partial^{\mu} v}{\partial z^{\mu}}. \quad \text{Mit dem Exponentialansatz } v(z) = C_i e^{2iz}$$

erhält man aus der charakteristischen Gleichung  $\sum_{\mu=0}^4 a_{\mu} \lambda^{\mu} = 0$  die Wurzeln  $\lambda_1$

bis  $\lambda_4$  und damit die Lösung der Gleichung in der Form: (1)  $v(z) = \sum_{i=1}^4 C_i e^{2iz}$ .

Die Idee der angewandten Methode ist, an Stelle der mathematischen Koeffizienten  $C_i$  die bei dem jeweiligen Problem vorhandenen mechanischen Randwerte für  $x=0$  einzuführen, für die in der allgemeinen Lösung die Folge der Ableitungen  $v(0) = v_0$ ,  $v'(0) = v'_0$ ,  $v''(0) = v''_0$ ,  $v'''(0) = v'''_0$  gewählt wird, entsprechend der Durchbiegung, Neigung, Krümmung (Biegemoment) und Querkraft. Aus dem inhomogenen

Gleichungssystem  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i^{\mu} C_i = v_0^{(\mu)}$  ( $\mu = 0$  bis 3) können dann die  $C_i$  durch  $v_0^{(\mu)}$  ausgedrückt werden, womit an Stelle von (1) die Lösung in der Form erhalten wird:

$$v(z) = \sum_{\mu=0}^3 v_0^{(\mu)} R_{\mu}(z), \quad \text{wo } R_{\mu}(z) \text{ lineare Funktionen der Eigenlösungen sind, die}$$

sich zwangsläufig beim Ordnen der Lösung nach den neuen Koeffizienten ergeben.

Es werden auch für  $v'(z)$ ,  $v''(z)$ ,  $v'''(z)$  ähnliche Ausdrücke wie für  $v(z)$  erhalten, deren Lösungen als Komponenten eines Vektors  $\bar{v}(z)$  aufgefaßt, die endgültige Lösung als

Matrizengleichung zu schreiben gestatten:  $\bar{v}(z) = \bar{R}(z) v_0$ . Darin ist  $\bar{R}(z)$  die vierreihige quadratische Matrix der sechzehn Funktionen vom Typus  $R_{\mu}(z)$ , die die Randwerte  $v(0)$  in die Werte  $\bar{v}(z)$  an beliebiger Stelle überführt. Von den sechzehn

Elementen der Matrix  $\bar{R}$  sind nur zehn verschieden, da die Matrix bei richtiger, d. h. mechanisch sinnvoller Wahl der Komponenten von  $\bar{v}$  symmetrisch zur Nebendiagonalen wird. — Stoßen mehrere Bereiche aneinander, für die verschiedene

Differentialgleichungen gültig sind, kann für jeden Bereich eine Matrix  $\bar{R}$  erhalten werden. Indem aus statischen Gründen ein stetiger Übergang von  $\bar{v}$  zwischen zwei

Nachbarbereichen gefordert wird, erhält man z. B. für vier Bereiche  $\bar{R}_0$  bis  $\bar{R}_6$  mit den Außenrändern 0 und 7 durch (2)  $\bar{v}_7 = \bar{R}_6 \cdot \bar{R}_4 \cdot \bar{R}_2 \cdot \bar{R}_0 v_0 = \bar{S} \cdot v_0(z)$ , d. h.

durch das Matrizenprodukt  $\bar{S}$ , unmittelbar einen Zusammenhang zwischen den Randvektoren. Dabei müssen in  $R_i$  für  $z_i$  die Längen der jeweiligen Plattenbereiche eingesetzt werden. — Werden die vier homogenen Randbedingungen in (2) eingesetzt, so daß jeweils zwei Komponenten von  $\bar{v}_0$  und  $\bar{v}_7$  verschwinden, so ergeben die beiden

Bedingungen für  $\bar{v}_7$  ein homogenes Gleichungssystem für die noch zwei unbekannten Komponenten von  $\bar{v}_0$ . Die Bedingung, daß ihre Determinante  $s_{ik} s_{mn} - s_{in} s_{mk} = 0$

verschwinden muß, liefert den gesuchten Eigenwert, der über  $\lambda_i$  und  $R_i$  in  $\bar{S}$  steckt. Das Nullsetzen einer zweireihigen Unterdeterminante der Produktmatrix  $\bar{S}$  ergibt den exakten Eigenwert, da der angegebene Weg zur Lösung keinerlei Vernachlässigung enthält. — Da die Matrizenmethode von einer gewöhnlichen Differentialgleichung ausgeht, werden nur solche Randbedingungen zugelassen, die eine Überführung einer partiellen in eine gewöhnliche Differentialgleichung gestatten, d. h. Randbedingungen, die sich durch den Ansatz von M. Lévy befriedigen lassen. — Auf S. 36 und 37 ist je ein kleiner Druckfehler vorhanden.

R. Gran Olsson.

Seide, Paul: On the torsion of rectangular sandwich plates. J. appl. Mech. 23, 191—194 (1956).



In this paper the torsional rigidity of rectangular sandwich plates of constant thickness is calculated, with cross sections assumed free to warp. The faces are isotropic and of equal thickness while the core may be orthotropic, the axes of orthotropic coinciding with co-ordinate axes of the structure. The investigation came about as a result of a request for information on the torsional rigidity of sandwich beams and plates for correlation with the results of torsion tests of balsa-core sandwich beams. While the twisting stiffness of solid rectangular isotropic plates is given adequately by the expression  $GJ = G t^3 c / 3$ , (where  $GJ$  = torsional rigidity,  $G$  = shear modulus of isotropic faces,  $c$  = the width of sandwich plate,  $t$  = individual thickness of sandwich plate), provided the ratio  $c/t$  is larger than about 10 and the ratio  $l/c$  ( $l$  = length of sandwich plate) larger than about 4 (S. Timoshenko and J. N. Goodier, Theory of Elasticity, this Zbl. 45, 234] it was not obvious that the stiffness of sandwich plates could be calculated accurately from the corresponding expression for sandwich plates with equal thickness isotropic  $GJ = \frac{8}{3} G t^3 c / A [(1 + (1 + h/t)^3 - (h/t)^3)]$  ( $h$  = half depth of core) or that the same limits of validity would hold. Accordingly the analysis of the present paper is carried out. Unfortunately, it was found that no realistic comparison between theory and experiment seems possible because of excessive experimental errors owing to a faulty test setup, so that only the theoretical analysis is reported herein. It should be noted that the analysis is for a core which extends to the edges of the plate, corresponding to the test specimens.

*R. Gran Olsson.*

**Hodge jr., P. G.: Stress functions for rotating plates.** J. appl. Mech. 23, 273—276 (1956).

Die allgemeine Theorie des Spannungszustandes elastischer Körper, die als eben aufzufassen und die räumlich verteilten Kräften unterworfen sind, kann als wohlbekannt angesehen werden. Abgesehen von wenigen Fällen, bei denen die Schwerkraft die räumlich verteilte Kraft darstellt und verschiedene Beispiele der rotations-symmetrischen rotierenden Scheibe [siehe z. B. I. Malkin, Festigkeitsberechnung rotierender Scheiben, Berlin 1935; R. Gran Olsson, Ingenieur-Archiv 8 270—275, 373—380 (1937), C. B. Biezeno u. R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin (dies. Zbl. 52, 407) Bd. 2, S. 5—29] scheint wenig in bezug auf diese Theorie getan zu sein. — Die vorliegende Arbeit wendet die Theorie auf den allgemeinen Fall einer ebenen dünnen Platte an, die um eine Achse in ihrer Ebene rotiert. Als besondere Beispiele werden um ihre Durchmesser rotierende Kreisplatten sowie Dreiecksplatten, die um eine ihrer Seiten rotieren, betrachtet. Für den Fall einer langgestreckten Dreiecksplatte wird durch einen Grenzübergang dasselbe Ergebnis erzielt wie bei der Rotation eines Stabes, bei dem die Annahmen aus der Theorie des Balkens der Untersuchung zugrunde gelegt werden.

*R. Gran Olsson.*

**Pearson, Carl E.: Remarks on the centre of shear.** Z. angew. Math. Mech. 36, 94—96 (1956).

**Wegner, Udo: Bestimmung der Randverschiebungen bei ebenen Spannungsproblemen.** Z. angew. Math. Mech. 36, 192—198 (1956).

Verf. weist darauf hin, daß bei vielen Spannungsproblemen randbelasteter Scheiben die Kenntnis der Verschiebungen am Rande von besonderer Bedeutung ist. Der gewöhnlich beschrittene Weg ist der, daß man aus der Differentialgleichung der Airyschen Spannungsfunktion  $\Delta \Delta F = 0$  die Funktion  $F(x, y)$  ermittelt. Danach werden die Komponenten der Verschiebungen aus dem Hookeschen Gesetz erhalten, in dessen Gleichungen die zweiten Ableitungen von  $F(x, y)$  auftreten. Diese Methode der Festlegung einer biharmonischen Funktion erweist sich als sehr umständlich und bei angenäherter Festlegung der Airyschen Spannungsfunktion außerdem als sehr ungenau. — In dieser Arbeit wird gezeigt, wie durch angenäherte Ermittlung einer Potentialfunktion  $\Delta F$  unmittelbar, d. h. ohne Bildung von weiteren Ableitungen, die Verschiebungen am Rande erhalten werden können. Dabei wird wieder das

Variationsprinzip benutzt, das in einigen früheren Arbeiten des Verf. sich für die technische Praxis als sehr nützlich erwiesen hat [dies. Zbl. 28, 324; Forschungsh. d. Stahlbaues 6, 183—189 (1943); Z. angew. Math. Mech. 29, 23—25 (1949); dies. Zbl. 37, 401]. Als Anwendung werden die Randverschiebungen an einem Kreisring ermittelt, der am äußeren Rand durch eine konstante Spannung in einer Richtung belastet wird.

*R. Gran Olsson.*

**Arakeljan, T. T.:** Die Verbiegung eines unendlichen Balkens auf einem kontinuierlichen Boden. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz-mat. estestv. techn. Nauk 9, Nr. 3, 45—61 (1956) [Russisch].

**Seide, Paul:** Elasto-plastic bending of beams on elastic-foundations. J. aeronaut. Sci. 23, 563—570 (1956).

**Plainevaux, J. E.:** Mouvement de tangage d'une suspension élémentaire sur lames élastiques. Nuovo Cimento, X. Ser. 4, 1133—1141 (1956).

**Frederick, Daniel:** On some problems in bending of thick circular plates on an elastic foundation. J. appl. Mech. 23, 195—200 (1956).

Verf. wendet die von E. Reißner aufgestellte verbesserte Plattentheorie auf den Fall der elastischen Stützung an, wobei er die Winklersche Annahme benutzt, nach der der Stützdruck der Einsenkung proportional ist. Als Beispiele werden untersucht: eine Kreisplatte vom Radius  $r = a$  mit gleichmäßiger Belastung auf einer Kreisfläche vom Radius  $r = b < a$  und eine unendliche Platte mit einem starren kreisförmigen Einschuß, auf den ein Biegemoment wirkt. Die Lösung beider Probleme führt auf Besselsche Funktionen von komplexem Argument. Das erste Beispiel wird für  $\mu = \text{Poissonsche Zahl} = 1/3$  und  $b/a = 0, 1$  durchgerechnet; auch für die zweite Aufgabe wird ein Zahlenbeispiel angegeben. Die Arbeiten von J. Szabó über achsensymmetrisch belastete dicke Kreisplatten auf elastischer Unterlage (dies. Zbl. 44, 394; 46, 411; 48, 179) werden nicht erwähnt. *A. Weigand.*

**Das, Sisir Chandra:** On the effect of a rigid spherical inclusion in a semi-infinite elastic solid under stresses produced by a couple on the plane boundary. Z. angew. Math. Mech. 36, 73—74 (1956).

Die in der Überschrift genannte Kugel wird als nahe der ebenen Begrenzungsfläche des Mediums vorausgesetzt. Berechnet wird die Spannungsverteilung. Als der Fragestellung adäquat erweisen sich Bipolarkoordinaten. In ihnen lassen sich die Spannungskomponenten relativ einfach darstellen.

*E. Hardtwig.*

**Hoff, N. J.:** Approximate analysis of the reduction in torsional rigidity and of the torsional buckling of solid wings under thermal stresses. J. aeronaut. Sci. 23, 603—604 (1956).

**Chmelka, Fritz:** Wärmespannungen in einem Prandtl-Reußschen Körper. Österreich. Ingenieur-Arch. 10, 133—140 (1956).

In this paper the influence of a temperature field on a homogeneous isotropic body is incorporated as follows. Consider the plastic domain of an elastic medium. The usual Prandtl Reuss equations are (1)  $2G \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{s}_{ij} + \lambda s_{ij}$ , (2)  $\dot{\epsilon}' = \dot{s}/3K$ . Here  $G$  and  $K$  are shear modulus and bulk modulus,  $s_{ij}$  are the tensions,  $\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$ ,  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma$ ; points denote differentiation with respect to time,  $v_i$  the velocity,  $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}$  where  $\dot{\epsilon} = \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{ii}$ . Also  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} + \epsilon'_{ij}$  where ' denote elastic, '' plastic contributions. If now  $T$  is the temperature and  $\alpha$  an appropriate coefficient the author sets in case of a temperature field

$$\epsilon_{ij} = \epsilon'_{ij} + \epsilon''_{ij} + \alpha T \text{ hence } \epsilon = \epsilon' + \epsilon'' + \alpha T = \epsilon' + \alpha T.$$

It follows that the left side of the Prandtl Reuss equations, which contains only deviators  $\dot{\epsilon}_{ij}$  is not influenced by the appearance of the temperature field and the six equations (1) — five of which only are independent — remain exactly the same as above. But Eq. (2) is replaced by  $\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}/3k + \alpha' T$ . The equilibrium equations are used in the usual way, as long as the time changes are slow enough. — A problem has been computed on the basis of this theory.

*H. Geiringer.*

**Denke, Paul H.:** The matrix solution of certain nonlinear problems in structural analysis. *J. aeronaut. Sci.* **23**, 231—236 (1956).

Indem die Matrizendarstellung der Elastizitätsgleichungen bei Behandlung statisch unbestimmter Systeme auf ein nichtlineares Elastizitätsgesetz ausgedehnt wird, ergibt sich ein nichtlineares Gleichungssystem in Matrixform für die inneren Kräfte, das nach dem Newtonschen Iterationsverfahren für Gleichungssysteme auflösbar ist. Als nichtlineares Elastizitätsgesetz wird eine Formel von Ramberg-Osgood zugrunde gelegt. Die Methode wird auf ein statisch unbestimmtes System eines Pfeiltragflügels angewandt, wobei das Iterationsverfahren gut konvergiert.

*R. Zurmühl.*

**Conway, H. D.:** The non-linear bending of thin circular rods. *J. appl. Mech.* **23**, 7—10 (1956).

**Truesdell, C.:** Das ungelöste Hauptproblem der endlichen Elastizitätstheorie. *Z. angew. Math. Mech.* **36**, 97—103 (1956).

Für die Frage, welche Funktionen  $\Sigma$  als Formänderungsarbeitsdichte eines vollkommen elastischen Stoffes dienen dürfen, wird eine Reihe einschränkender Bedingungen von Hadamard, Baker, Ericksen, Toupin und vom Verf. selbst erörtert. Verf. hält seine eigenen Bedingungen, die auf der Forderung beruhen, daß  $\Sigma$  bei Belastung wächst, für notwendig, nicht aber für hinreichend. *J. Pretsch.*

**Kačanov (Kachanov), L. M.:** Stability of thin-walled bars in the elasto-plastic range. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **107**, 803—806 (1956) [Russisch].

The paper is concerned with the inelastic buckling of thin-walled bars loaded at the ends by axial forces and couples acting in the plane of symmetry of the cross-sections. The assumptions concerning the deformation are the same as in Vlassov's theory (V. Z. Vlassov: Elastic thin-walled bars, Moscow, 1940), especially the contour of the cross-sections is supposed to remain rigid during the deformation. The increase of loading during the buckling (Shanley) is taken into account. The author concludes that solutions concerning elastic buckling under axial forces remain valid if tangent modulus  $E'$  is introduced instead of  $E$ , and the elastic shear modulus  $G$  is kept unchanged. The theory leads to the same result in the special case of pure bending of an I-beam, in accordance with an earlier paper by A. R. Flint [*J. Mech. Phys. of Solids* **1**, Nr. 2 (1953)]. The author notes that the assumption about the symmetry of the cross-sections is not essential.

*D. Radenković.*

**Garr, L., E. H. Lee and A. J. Wang:** The pattern of plastic deformation in a deeply notched bar with semicircular roots. *J. appl. Mech.* **23**, 56—58 (1956).

**Green, A. E.:** Hypoelasticity and plasticity. II. *J. rat. Mech. Analysis* **5**, 725—734 (1956).

Die von Truesdell 1955 entwickelte Theorie der Hypo-Elastizität enthält plastische Körper als Sonderfall. In Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verf., in der dieser die Differentialgleichungen für den plastischen Fluß inkompressibler Körper ableitete, wird hier das Analoge für den Fall kompressibler Körper geleistet. Darüber hinaus wird das Verhalten nicht-energieverzehrender Medien untersucht. Verf. kommt auf Gleichungen, die in der Plastizitätstheorie bereits verwendet wurden (Hill, 1950 sowie Prager & Hodge 1951), allerdings mit dem Unterschied, daß er den Begriff der „Spannungsänderung“ in tensorieller Form verwendet.

*E. Hardtwig.*

**Green, A. E.:** Simple extension of a hypo-elastic body of grade zero. *J. rat. Mech. Analysis* **5**, 637—642 (1956).

In einer früheren Arbeit hat Verf. die Theorie des von Truesdell eingeführten hypo-elastischen Körpers studiert und dabei insbesondere das Problem der einfachen Dehnung für den Fall inkompressibler Körper vollständig gelöst. In vorliegender Note wird die Fragestellung wieder aufgegriffen und für den allgemeineren Fall kompressibler Körper gelöst.

*E. Hardtwig.*



Huber, A.: Eine Näherungslösung für das Erstarrungsproblem. Z. angew. Math. Mech. 36, 301 (1956).

● Bolotin, V. V.: Die dynamische Stabilität elastischer Systeme. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 600 S. R. 16,50 [Russisch].

Dieses Buch gibt einen guten Überblick über den heutigen Stand der Forschung auf dem Gebiet der zeitveränderlichen Beanspruchung elastischer Systeme. Forschungsergebnisse aus Ost und West werden in gleicher Weise berücksichtigt. Am Beispiel des längsbeanspruchten Stabes wird einleitend gezeigt, auf welche mathematischen Probleme diese Untersuchungen führen. Diese mathematischen Theorien werden ausführlich bereitgestellt: Mathieusche Gleichung und ihre Verallgemeinerungen, nichtlineare Mathieusche Gleichung, von dort ausgehend wesentliche Teile der Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen, Matrizentheorie, lineare Integralgleichungen, Variationsrechnung, Stabilitätstheorie für Systeme nichtlinearer Differentialgleichungen, Modifikationen bei Berücksichtigung der Dämpfung. — Bei dieser Darstellung wird laufend der Zusammenhang mit der eigentlichen Fragestellung gewahrt und parallel die benötigte Theorie der Mechanik entwickelt. Durch Beispiele und Berichte über experimentelle Ergebnisse wird die Darstellung weiter aufgelockert. So werden bereits in den ersten beiden Teilen wichtige mechanische Fragen abschließend behandelt. Der dritte Teil (200 Seiten) befaßt sich mit der Anwendung auf gerade und gekrümmte Stäbe, statisch unbestimmte Rahmen, Platten und Membranen. Diese Untersuchungen werden an vielen Beispielen bis zu numerischen Ergebnissen geführt. Ein Sachverzeichnis und ein ausführliches Namenverzeichnis, das auf die in Fußnoten angegebene Literatur hinweist (gute Lösung), schließt das Buch ab. Die Forschung auf diesem Gebiet wird kaum an diesem Werk vorbeigehen können, so daß eine baldige Übersetzung wünschenswert erscheint.

W. Haacke.

Anliker, Max: Biegeschwingungen verwundener, einseitig eingespannter und am andern Ende gelenkig gelagerter Stäbe. Z. angew. Math. Phys. 7, 248—253 (1956).

Weidenhammer, F.: Stabquerschwingungen schwach vorgekrümmter Stäbe mit pulsierender Axiallast. Z. angew. Math. Mech. 36, 235—238 (1956).

Mise, K. and S. Kunii: A theory for the forced vibrations of a railway bridge under the action of moving loads. Quart. J. Mech. appl. Math. 9, 195—206 (1956).

Chilver, A. H.: A note on the Mise-Kunii theory of bridge vibrations. Quart. J. Mech. appl. Math. 9, 207—211 (1956).

Ekstein, H. and T. Schiffman: Free vibrations of isotropic cubes and nearly cubic parallel-epipeds. J. appl. Phys. 27, 405—412 (1956).

Die strenge Lösung dynamischer Probleme aus der Elastizitätstheorie ist bis jetzt nur in wenigen Fällen bekannt. Die Verf. untersuchen mittels des Ritzschen Verfahrens und der Störungsrechnung die freien Schwingungen eines Würfels und eines wenig von ihm abweichenden Quaders; für beide Probleme wurde noch keine strenge Lösung angegeben. Die Arbeit enthält nur einen Auszug; Zwischenrechnungen sind fast ganz weggelassen. Um Ordnung in die Vielfalt der Schwingungsmöglichkeiten zu bekommen, werden auch gruppentheoretische Hilfsmittel benutzt; durch sie gelingt es, die komplizierte Frequenzgleichung auf einfachere zurückzuführen.

A. Weigand.

Vodička, Václav: Longitudinal vibrations of a composite bar. Z. angew. Math. Phys. 7, 345—349 (1956).

The problem of the longitudinal vibrations of a composite cantilevered bar of length  $l = \sum l_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  with constant area ( $q$ ) and different  $E_k$ ,  $\rho_k$  under the action of a constant axial force at the free end is discussed. Using the Laplace integrals for the system of partial differential equations  $\ddot{u}_k = a_k^2 u_k''$ , where  $a_k^2 = E_k/\rho_k$ , with the initial and boundary conditions for each span, one obtains the subsidiary equations  $U_k'' = (p^2/a_k^2) U_k$ ,  $U = U(x, p)$ , with the new boundary conditions.

and the problem is reduced to the Laplace transforms of the wanted functions  $u_k(x, t)$ . The special case when  $E_k \varrho_k = \text{const.}$  is treated as one example when the solution can be expressed in closed form. The obtained formula for  $n = 1$  agrees with the known expression for longitudinal vibrations of a homogeneous bar.

*D. Rašković.*

**Heidenhain, H.:** Über den Einfluß einer Endmasse und Endfeder auf die Frequenz-Amplituden-Abhängigkeit längerer Saitenquerschwingungen. *Z. angew. Math. Mech.* **36**, 280—282 (1956).

**Fuhrke, H.:** Bestimmung von Rahmenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls. *Ingenieur-Arch.* **24**, 27—42 (1956).

Durch Hinzunahme von Längs- und Torsionsschwingungen werden die in einer vorangegangenen Arbeit (dies. Zbl. **66**, 192) behandelten Schwingungen mehrfeldriger Balken nach dem dort entwickelten Matrizenverfahren auf Schwingungen ebener Rahmen erweitert, und zwar auf Schwingungen in und senkrecht zur Rahmenebene sowie Kopplung beider Schwingungsarten. Auch einfach und mehrfach geschlossene Rahmen sind auf diese Weise behandelbar. Der Rechnungsgang wird für die verschiedenen in Betracht kommenden Fälle ausführlich dargelegt.

*R. Zurmühl.*

**Marguerre, K.:** Vibration and stability problems of beams treated by matrices. *J. Math. Physics* **35**, 28—43 (1956).

Verf. gibt einen zusammenfassenden und vergleichenden Überblick über die Behandlung von Biegeschwingung und Knickung mit Hilfe eines Matrizenverfahrens, das in Arbeiten von Fuhrke (dies. Zbl. **66**, 192) und Schnell (dies. Zbl. **64**, 186) am Institut des Verf. entwickelt worden ist. Die Bestimmung des Eigenwertes erfordert in jedem Falle nur die Auswertung einer zweireihigen Determinante. Das Einarbeiten elastischer und starrer Stützen oder Gelenke mit Hilfe sogenannter Determinantenmatrizen wird beschrieben. Das Verfahren wird hier zur Methode von Myklestad [*J. aeronaut. Sci.* **11**, 153—162 (1944)] in Beziehung gesetzt.

*R. Zurmühl.*

**Dengler, Max A.:** Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung. *Österreich. Ingenieur-Arch.* **10**, 39—66 (1956).

Nach einer Übersicht über bereits vorliegendes Schrifttum des im Titel genannten Gegenstandes wird die lineare inhomogene Differentialgleichung vierter Ordnung für die Ausbreitung von Biegungswellen in Stäben hergeleitet, und es werden die Randbedingungen für stoßweise Belastung formuliert. Bei der Berücksichtigung der vom Verf. als von zweiter Ordnung bezeichneten Größen (Einfluß der Schubspannung sowie der Normalspannung von etwa derselben Größenordnung und der rotatorischen Trägheit) wird mit einer Verhältniszahl  $\lambda$  gerechnet, die nach Timoshenko [*Philos. Mag.*, VI. Ser. **41**, 744—746 (1921), **43**, 125—133 (1922)] gleich der maximalen zur mittleren Schubspannung über den Querschnitt gesetzt und als ausschließlich von diesem abhängig angenommen wird. Die Lösung der Gleichung der Biegungswelle wird dann für einen Fall gelöst, dem physikalisch zwar keine Bedeutung zukommen kann, der aber mathematisch interessant erscheint. In der Gleichung tritt nämlich ein Parameter  $c$  auf,  $c = E/\lambda G$ ,  $E$  = Elastizitätsmodul,  $G$  = Schubmodul, der den Einfluß von Größen zweiter Ordnung darstellt und gleich 1 gesetzt wird ( $c = 0$  entspricht einer Vernachlässigung dieser Größen, also der reinen Biegeformänderung nach der Navierschen Annahme). Die Lösung der Bewegungsgleichung wird durch Anwendung der Laplaceschen Transformation sowie durch analytische Fortsetzung und Integration in der komplexen Ebene erreicht. Die Wellengleichung wird danach für den allgemeinen Fall ( $c = E/\lambda G$  beliebig) gelöst und die zeitliche Laplacesche Transformation der Lösung ermittelt. Die Lösung dieses Biegestoßproblems bezieht sich zunächst auf den Grenzfall des mathematischen Stoßes, kann aber für den physikalischen Stoß daraus nach den Integral-

sätzen von Duhamel aufgebaut werden. Die zahlenmäßige Auswertung dieser Lösung geschieht für den Parameterwert  $c = 3$ , der im Gegensatz zu  $c = 1$  im Bereich praktisch vorkommender Werte liegt, (für Rechteckquerschnitte entspricht dies der Querdehnungszahl  $\mu = 0,4$ ). — [Bei der Diskussion von  $c$  möchte Ref. bemerken, daß für den Rechteckquerschnitt  $c = 2,4 + 1,5\mu$  gesetzt werden kann, weshalb  $c$  im Bereich  $2,4 \leq c \leq 3,15$  liegt, statt  $c$  zwischen 3 und 4, wie vom Verf. auf S. 57 angegeben. Die Zahl  $\lambda$  ist nämlich dann gleich  $(1 + \mu)/(6/5 + 3/4\mu)$  und stimmt für  $\mu = 0,2$  mit dem von R. D. Mindlin (dies. Zbl. 44, 401) zwischen 0,8 und 0,9 vermuteten, von R. S. Ayre und L. S. Jacobsen [J. appl. Mech. 18, 217—218 (1951)] berechneten Wert  $\lambda = 0,87$  überein; es ist  $5/6 \leq \lambda \leq 20/21$  (statt  $0,8 \leq \lambda \leq 0,9$ ). — Bei der elastischen Platte werden die vom Mittelpunkt weglaufenden elastischen Wellen betrachtet, wobei zur Vereinfachung radiale Symmetrie des Vorganges angenommen wird. Als Bewegungsgleichung ergibt sich eine lineare partielle Differentialgleichung mit veränderlichen Beiwerten. Da die Laplacesche Transformation in bezug auf die Diracsche Deltafunktion gewisse Vorteile besitzt, wird sie auch in diesem Fall zur Lösung herangezogen. Die Darstellung der Lösungen gelingt nur mit Hilfe von Reihenentwicklungen, die mit Rücksicht auf relativ günstige Konvergenz der numerischen Auswertung zugänglich angenommen werden. — (Auf S. 42 ist der Name Timoshenko in einer sonst nicht üblichen Weise geschrieben).

*R. Gran Olsson.*

**Philipzik, W.:** Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung. Z. angew. Math. Mech. 36, 51—60 (1956).

Die Reynoldssche Theorie wird auf das halbgeschlossene zylindrische Lager endlicher Breite für konstante und veränderliche Zähigkeit des Schmiermittels angewandt. Die partielle Differentialgleichung wird bei konstanten Randwerten nach dem Differenzenverfahren gelöst, die Gleichungssysteme nach dem Relaxationsverfahren von Gauß-Southwell. Numerische Rechnungen zeigen, daß der axiale Druckverlauf durch eine Parabel angenähert werden kann. Abschließend wird ein Minimalatz der Lagerreibung aufgestellt.

*W. Wuest.*

**Kochanowsky, W.:** Die Brauchbarkeit der Reynoldsschen Theorie der Schmiermittelreibung für die Berechnung des Ölbedarfs eines Gleitlagers. Z. angew. Math. Mech. 36, 212—221 (1956).

## Hydrodynamik:

**Hill, R. and G. Power:** Extremum principles for slow viscous flow and the approximate calculation of drag. Quart. J. Mech. appl. Math. 9, 313—319 (1956).

In analoger Weise wie bei Torsionsproblemen der Elastizitätstheorie kann man auch bei der Strömung sehr zäher Flüssigkeiten Extremalprinzipien zur Berechnung oberer und unterer Grenzen für den Widerstand heranziehen. Man geht dabei von einer angenommenen Geschwindigkeitsverteilung aus, die der Kontinuitätsgleichung und den Randbedingungen am Körper und im Unendlichen genügt und berechnet die Dissipationsenergie, womit man eine obere Grenze erhält. Ebenso werden auch für den Spannungszustand Ansätze gemacht, die ein Gleichgewichtssystem bilden, aber nicht notwendig aus einem Geschwindigkeitsfeld ableitbar sind. Durch Integration erhält man dann eine untere Grenze für den Widerstand. Das Verfahren wird am Beispiel einer in einer unendlich ausgedehnten zähen Flüssigkeit bewegten Kugel und an einem Torus erläutert.

*W. Wuest.*

**Batchelor, G. K.:** On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. J. Fluid Mechanics 1, 177—190 (1956).

Es wird eine Integralbedingung abgeleitet, welche von der Wirbelverteilung auch bei beliebig kleiner Zähigkeit der Strömung erfüllt werden muß. Sie besagt, daß der Beitrag der Zähigkeitskräfte zur Änderung der Zirkulation um eine beliebige Stromlinie identisch verschwindet.

*J. Pretsch.*



**Narasimhan, M. N. L.:** On the steady laminar flow of certain non-Newtonian liquids through an elastic tube. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **43**, 237—246 (1956).

Die Strömung einer zähen Flüssigkeit durch ein Kreisrohr mit elastischen Wandungen ist von Rashevsky (1945) und Morgan (1952) untersucht worden. In der vorliegenden Arbeit wird dies auf nichtnewtonsche Flüssigkeiten mit nicht-linearem Zähigkeitsgesetz erweitert. Neben der wie üblich definierten Reynoldsschen Zahl treten als weitere dimensionslose Parameter das Verhältnis der linearen und der nichtlinearen Zähigkeit zu den elastischen Kräften auf. Die Näherungsrechnung gilt nur für beschränkte Wertebereiche dieser Parameter und liefert dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Effekte wie bei linearer Zähigkeit. *W. Wuest.*

**Ibrahim, Ali A. K. and Abdel Monem I. Kabil:** A graphical method for determining the coefficient of viscosity of Newtonian liquids using an oscillating cylinder viscometer. *Z. angew. Math. Phys.* **7**, 343—345 (1956).

**Prakash, Prem:** Harmonic analysis of the axially symmetrical incompressible viscous flow. *J. math. Soc. Japan* **8**, 102—117 (1956).

Die Differentialgleichungen der Fourier-Transformierten der Geschwindigkeitskomponenten, der Stromfunktion und der Wirbelstärke werden unter Benutzung der Kontinuitätsgleichung und der Randbedingungen hergeleitet. Im zweiten Teil wird die Spektralverteilung der kinetischen Energie in Abhängigkeit von der Stromfunktion und der Wirbelstärke betrachtet. Die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen werden in eine Integrodifferentialgleichung für die transformierten Größen umgeformt und die abgeleiteten Beziehungen auf zwei Sonderfälle angewandt. Eine Vereinfachung ergibt sich für den Fall, daß die Strömung sich auf eine Halbebene erstreckt und die Flüssigkeit im Unendlichen ruht. Auch für eine besondere Klasse von Wirbelströmungen vereinfachen sich die Beziehungen durch Fortfall der nicht-linearen Glieder. *W. Wuest.*

**Rao, S. K. Lakshmana:** Harmonic analysis of the spatial flow of an incompressible viscous fluid. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **44**, 6—14 (1956).

Für die harmonische Analyse der zähen dreidimensionalen Strömung werden Beziehungen zwischen den Fourier-Transformierten der Geschwindigkeits- und Drehungskomponenten sowie Schranken für die Spektralfunktion der kinetischen Energie der Strömung aufgestellt. Der Vektor der Drehungstransformierten wird durch eine nichtlineare Integrodifferentialgleichung beschrieben, die als Verallgemeinerung einer von Kampé de Fériet (dies. Zbl. **29**, 425) angegebenen Beziehung ausgelegt werden kann. *J. Pretsch.*

**Tomotika, S. and H. Yosinobu:** The flow of a viscous liquid past a flat plate at small Reynolds numbers. *J. Math. Physics* **35**, 1—12 (1956).

Der Reibungswiderstand einer längs angeströmten ebenen Platte in sehr zäher Strömung ist in zweiter („Oseenscher“) Näherung von mehreren Verfassern mit voneinander abweichenden Ergebnissen berechnet worden. Eine sorgfältige Nachprüfung hat ergeben, daß die von Piercy und Winnie (1933) mitgeteilten Formeln richtig sind. Aber auch wenn man der Theorie von Davies (1941) folgt und zur Lösung der dabei auftretenden modifizierten Mathieuschen Differentialgleichung die schneller konvergenten Funktionen  $FEK_n$  und  $GEK_n$  an Stelle von  $Fek_n$  und  $Gek_n$  benutzt, die beide als Produkte von Besselfunktionen eingeführt werden, erhält man die richtigen Formeln für die Oberflächenreibung. *W. Wuest.*

**Bader, W.:** Zum Reibungseinfluß auf die Düsenströmung. *Z. angew. Math. Mech.* **36**, 233—234 (1956).

**Sanyal, Lakshmi:** On the flow of a viscous liquid between two co-axial circular cylinders under a periodic pressure-gradient. *J. Technol.* **1**, 43—47 (1956).

Zu den wenigen exakten Lösungen der instationären Bewegung einer zähen Flüssigkeit gehört die eindimensionale Strömung durch ein Kreisrohr unter der Wirkung eines periodischen Druckgradienten. Die von Sexl (1930) berechnete

Lösung wird in der vorliegenden Arbeit auf die periodische Strömung zwischen zwei koaxialen Zylindern erweitert. Die Amplitude der axialen Bewegung ist in Abhängigkeit vom Radius durch Hankelsche Zylinderfunktionen darstellbar. Für niedrige Frequenzen geht diese Lösung in die Form der stationären zähen Strömung bei konstantem Druckgradienten über, während sich bei großen Frequenzen nur dünne Wandgrenzschichten ausbilden und die Strömung im Innern sich reibungslos verhält.

*W. Wuest.*

**Sanyal, Lakshmi:** The flow of a viscous liquid in a circular tube under pressure-gradients varying exponentially with time. *Indian J. Phys.* **30**, 57—61 (1956).

Bei Untersuchungen von Luftschwingungen in Helmholtzischen Resonatoren hatte E. G. Richardson [*Proc. phys. Soc. London* **42**, 1—15 (1929)] gefunden, daß entgegen allen Erwartungen die Amplituden für Radien, die von dem Zentrum des Resonators entfernt waren, weit größer waren als im Zentrum selbst und daß diese Amplituden ein Maximum in der Nähe der Resonatorwände erreichten, um dann gegen Null an der Wand selbst herabsinken. Dieser von dem Entdecker sog. „Annulareffekt“ konnte von Th. Sexl [*Z. Phys.* **61**, 349 (1930)] auf Grund der Stokes-Navierschen Grundgleichungen der Hydrodynamik, als für eine oszillierende Laminarströmung in einem Kreisrohr charakteristisch, hergeleitet werden. Legt man die Achse eines Zylinderkoordinatensystems in die Achse des durchströmten kreisförmigen Rohres vom Radius  $a$ , so ergibt sich unter der Annahme eines Druckgefälles von der Form  $-\varrho^{-1} \partial p / \partial z = \varphi e^{i\beta t}$  eine Geschwindigkeitsverteilung

$$w = -i C / \beta \cdot \left[ 1 - J_0 \left( \sqrt{-i \beta / \nu} r \right) / J_0 \left( \sqrt{-i \beta / \nu} a \right) \right] \cdot e^{i\beta t}.$$

Für kleine Reynoldssche Zahlen  $Re \ y = \beta a^2 / \nu$  folgt daraus eine im Rohr mit der Periode der die Bewegung aufrechterhaltenden Kraft  $2\pi/\beta$  pulsierende Flüssigkeit mit der Poiseuilleschen Geschwindigkeitsverteilung  $w = C/4\nu \cdot (a^2 - r^2) \cdot \cos \beta t$ ; für große Reynoldssche Zahlen eine Grenzschichtströmung im Sinne Prandtls mit der Geschwindigkeitsverteilung  $w = -i C / \beta \cdot \left[ 1 - \sqrt{a/r} \cdot e^{-(1+i)\sqrt{\beta/2\nu}(a-r)} \right] \cdot e^{i\beta t}$ . Der gegenwärtige Verf. untersucht Strömungen in einem kreiszyllindrischen Rohr unter dem Einfluß eines exponentiell ansteigenden resp. exponentiell abklingenden Druckgefälles von der Form  $\varphi e^{\pm \nu \alpha^2 t}$ . Ersetzt man demgemäß in den von Sexl angegebenen Formeln die Größe  $\beta$  durch  $-i \alpha^2 \nu$ , so erhält man die von dem gegenwärtigen Verf. erhaltenen Resultate, nämlich 1. für ein exponentiell angefachtes Druckgefälle im Falle kleiner Reynoldsscher Zahlen eine exponentiell angefachte parabolische Geschwindigkeitsverteilung im Rohre, für große Reynoldssche Zahlen eine exponentiell angefachte Grenzschichtenströmung vom gleichen Typus wie im Falle eines periodischen Druckgefälles; 2. für ein exponentiell abfallendes Druckgefälle im Falle kleiner Reynoldsscher Zahlen eine exponentiell abklingende parabolische Geschwindigkeitsverteilung, für große Reynoldssche Zahlen hingegen keine exponentiell abfallende Grenzschichtenströmung, sondern eine Strömung, bei der wegen der Kleinheit der auftretenden Geschwindigkeiten im ganzen Rohre der Einfluß der Reibung überwiegt, so daß man es wie bei der üblichen Poiseuilleschen Strömung mit einer Grenzschicht zu tun hat, die sich über die ganze Rohrbreite erstreckt. *Th. Sexl.*

**Oudart, Adalbert:** Flux thermique provoqué par le mouvement pulsatoire d'un fluide. *C. r. Acad. Sci., Paris* **242**, 3038—3039 (1956).

**DeGroot, H. M.:** On viscous heating. *J. aeronaut. Sci.* **23**, 395—396 (1956).

Für die Couette-Strömung mit konstanter Zähigkeit und konstanter Wärmeleitfähigkeit ist nach H. Schlichting die Temperaturverteilung infolge der Reibungswärme parabolisch. In der vorliegenden Note wird für den verallgemeinerten Fall einer temperaturabhängigen Zähigkeit und Wärmeleitfähigkeit (beide proportional der absoluten Temperatur) die Differentialgleichung für die Temperaturverteilung explizit integriert.

*H. Schlichting.*

**Hillman, A. P.:** On a matrix characteristic value problem. *J. aeronaut. Sci.* **23**, 286 (1956).

Für ein in der Aerodynamik auftretendes Eigenwertproblem mit speziellen Eigenschaften wird gezeigt, daß es sich durch eine lineare Substitution auf die gewöhnliche Matrizen-Eigenwertaufgabe zurückführen läßt. *R. Zurmühl.*

**Gras, François:** Solutions trivalentes des équations réglant l'écoulement plan d'un fluide compressible. C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 991—994 (1956).

Ausgehend von der Gleichung  $\varphi_{\sigma\sigma} + k(\sigma)\varphi_{\vartheta\vartheta} = 0$  für  $\varphi(\sigma, \vartheta)$  werden mit Hilfe einer durch  $\varphi_{\vartheta} U_{\sigma\varphi} - \varphi_{\sigma} = 0$  definierten Funktion  $U(\sigma, \varphi)$  Lösungen der ebenen kompressiblen Gasströmung von der Form  $\int_C e^{in(U_{\varphi} + \vartheta)} d\varphi$  angegeben. Mehrfache Umformungen führen zu einer hypergeometrischen Differentialgleichung und zu dem Ergebnis, daß  $\varphi$  eine dreiwertige Lösung ist (3 Werte von  $\varphi_{\vartheta}$ ). *F. Cap.*

**Krzywoblocki, M. Z. E.:** Bergman's linear integral operator method in the theory of compressible fluid flow. D. Review of other methods, tables. Österreich. Ingenieur-Arch. **10**, 1—38 (1956).

Im 4. Teil seiner zusammenfassenden Darstellung (vgl. dies. Zbl. **47**, 437; **53**, 147; **57**, 178) der Bergmanschen Integraloperatorenmethode gibt Verf. einen Überblick über andere Berechnungsverfahren (157 Literaturstellen), darunter die Entwicklung nach Potenzen der Machschen Zahl nach Janzen-Raleigh, die Entwicklung nach Potenzen eines Dickenparameters (z. B. Prandtl-Glauertsche Formel), ferner Variationsmethoden, Hodographenverfahren und Theorie schlanker Körper. In weiteren Abschnitten wird eine Zusammenstellung spezieller Funktionentafeln und Formeln sowie ein Ausblick auf eine Erweiterung der Operatorenmethode auf kompliziertere Fälle (z. B. dreidimensionale Strömung) gegeben. Abschließend werden zur Erläuterung der Theorie einige Beispiele gegeben, die auch für die Berechnung mit Lochkartenmaschinen geeignet sind. *W. Wuest.*

**Oakes jr., W. J. and P. T. Holliday:** Analysis of a rolling pull-out maneuver. J. aeronaut. Sci. **23**, 517—529 (1956).

**Chažalija, G. Ja.:** Über die stationäre Bewegung einer Flüssigkeit in einem Rohr von nahezu kreiszylindrischer Form. Mat. Sbornik, n. Ser. **38** (80), 93—106 (1956) [Russisch].

Der Verf. leitet eine Formel ab für die angenäherte Lösung des Problems der Strömung der idealen Flüssigkeit mit Achsensymmetrie in einem Rohr, welches nur wenig vom Kreiszylinder abweicht. Wenn dabei die  $x$ -Achse als Symmetrieachse genommen wird und wenn  $xOy$  die Achsenschnittebene bedeutet wo die Randkurve des Achsenschnittes durch  $y = \pm y(x)$  gegeben ist, so lautet die betreffende Formel

$$V = \frac{H}{\pi y^2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} y y'' - \frac{1}{4} y'^2 \right\} + R_1.$$

Hier bedeutet  $V$  die gesuchte Strömungsgeschwindigkeit im beliebigen Punkt der Randkurve,  $H$  die Ausflußmenge der Flüssigkeit in der Zeiteinheit und  $R_1$  eine sehr kleine Restgröße, die zur Abschätzung der Annäherung dient. Die Annahmen sind: 1. bei endlicher Durchschnittsgeschwindigkeit sollen die Größen  $y(x)$ ,  $y'(x)$ ,  $y''(x)$  und  $y'''(x)$  gleichmäßig klein gegenüber  $x$  sein; und 2. bei Bestimmung von  $V$  werden nur die Glieder, die klein sind von zweiter Ordnung in bezug auf  $y(x)$ ,  $y'(x)$  und  $y''(x)$ , beibehalten. Die angewandte Methode ist die der konformen Abbildung, wobei der Verf. eine früher von M. A. Lavrent'ev [Konforme Abbildungen mit Anwendungen auf gewisse Fragen der Mechanik (russisch), Moskau (1946), S. 118, Formel 108] aufgestellte Formel verallgemeinert, die sich auf die Bestimmung von Dehnung bei der konformen Abbildung eines engen Streifens  $0 < y < y(x)$  der Ebene  $xOy$  auf einen geradlinigen Streifen  $0 < v < H/2\pi$  der Ebene  $uOv$  bezieht. Dabei bedeutet  $u(x, y)$  das Geschwindigkeitspotential und  $v(x, y)$  die Strömungsfunktion. Es soll noch erwähnt werden, daß der Verf. dieses Resultat



schon früher in einer kleinen Mitteilung [Doklady Akad. Nauk SSSR. n. Ser. 95, 465—468 (1954)] veröffentlicht hat. Hier gibt er nur eine ausführliche Herleitung und Begründung, sowie die Abschätzung der durch diese Formel erreichten Annäherung.  
*T. P. Angelitch.*

**Karpman, Gilbert:** Onde de compression dans un fluide contenu dans un tore rigide à section carrée. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 770—773 (1956).

Verf. gibt explizit die Lösungen der linearisierten nicht-stationären Potentialgleichung an, die den Strömungen in einem Torus von quadratischem Querschnitt entsprechen. Ist der innere Durchmesser des Torus klein, so lassen sich diese Lösungen weiter diskutieren, z. B. kann man die potentielle und kinetische Energie der den Grundlösungen entsprechenden Strömungen berechnen. Diese Energieniveaus werden nicht notwendig stabil sein. Hierüber will Verf. in einer weiteren Arbeit mitteilen.  
*C. Heinz.*

**Bazer, J. and S. N. Karp:** On a steady-state potential flow through a conical pipe with a circular aperture. J. rat. Mech. Analysis 5, 277—322 (1956).

Für die rotationssymmetrische Potentialströmung durch eine halbunendliche kegelförmig geöffnete Röhre mit kreisförmiger Öffnung wird das Geschwindigkeitspotential ermittelt. Nach einer Erörterung der Legendre-Funktion und verwandter Funktionen werden nach einer Variante der Wiener-Hopf-Methode Integraldarstellungen der Lösung konstruiert, welche dann zu Entwicklungen nach Eigenfunktionen führen, aus denen exakt die sog. hydrodynamische Leitfähigkeit der Öffnung gewonnen wird, worunter das Verhältnis des Flusses durch die Öffnung zum Potentialunterschied an der Innen- und Außenseite des Kegels im Unendlichen zu verstehen ist. Nahe dem Rand wird das Verhalten der Geschwindigkeit der Flüssigkeit explizit dargestellt.  
*J. Pretsch.*

**Stümke, H.:** Zur Berechnung der kritischen Geschwindigkeit der reibungs- und relaxationsfreien thermochemischen Gasströmung durch Rohr und Düse. Ingenieur-Archiv 24, 282—290 (1956).

**Kämmerer, C.:** Reibungsbeiwert und adiabater Wirkungsgrad für eine geradkegelig erweiterte Verdichtungsdüse (Unterschalldiffusor). Österreich. Ingenieur-Arch. 10, 197—200 (1956).

**Hall, I. M.:** The displacement effect of a sphere in a two-dimensional shear flow. J. Fluid Mechanics 1, 142—162 (1956).

In einer reibungslosen Flüssigkeit mit Wirbelbewegung wird der Verschiebungseffekt (displacement effect) einer Pitotröhre in einer Strömung mit dem Geschwindigkeitsprofil  $u(y) = U + Ay$  untersucht, wo  $U$  die Geschwindigkeit auf der Achse der Pitotröhre und  $y$  eine zur Achse senkrechte Koordinate bedeutet. Da eine zweidimensionale Behandlung des Problems den gewünschten Effekt nicht liefert, muß das Problem dreidimensional behandelt werden. Die Pitotröhre wird daher durch eine in die Strömung eingebettete Kugel approximiert und der gesuchte Effekt von derselben Größenordnung wie der experimentelle gefunden. (Unter dem Verschiebungseffekt einer Pitotröhre versteht man den Unterschied des mit Hilfe der endlich ausgedehnten Pitotröhre gemessenen Druckes und des Druckes, der an derselben Stelle herrschen würde, wenn man den Radius der Pitotröhre gegen Null gehen lassen könnte.)  
*Th. Sexl.*

**Cellitti, Carlo:** Velocità di efflusso di un liquido da una semisfera. Archimede 8, 142—143 (1956).

**Broer, L. J. F.:** On the theory of the ventilation of traffic tunnels. Appl. Sci. Research, A 6, 29—44 (1956).

**Lush, P. E. and T. M. Cherry:** The variational method in hydrodynamics. Quart. J. Mech. appl. Math. 9, 6—21 (1956).

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Gleichungen der stationären wirbelfreien isentropischen Gasströmung in ein Variationsproblem umzuformen. Diese beiden Möglich-

keiten und ihre Vor- und Nachteile bei der Berücksichtigung von Randbedingungen werden diskutiert. Unter Verwendung der Rayleigh-Ritzschen Methode werden für die Strömung um einen Kreiszylinder numerische Werte gewonnen. Die Arbeiten von W. Gröbner (u. a., vgl. Braun, dies. Zbl. 6, 61; Blank, dies. Zbl. 44, 214), der sich schon viel früher (auch numerisch) mit der Umströmung eines Kreiszylinders mit Hilfe von Variationsverfahren ganz ähnlicher Art befaßt hat, werden nicht erwähnt.

*F. Cap.*

Martin, A. I.: A note on the dividing stream line in hydrodynamics. Amer. math. Monthly 63, 409—410 (1956).

Bader, W.: Iteratives Näherungsverfahren zur Druckbestimmung bei stationärer ebener Unterschallströmung. Z. angew. Math. Mech. 36, 296 (1956).

Küssner, Hans Georg: Kritische Bemerkungen zur dreidimensionalen Tragflächentheorie im Unterschallgebiet. Z. Flugwissenschaften 4, 21—26 (1956).

Verf. wendet seine allgemeine Tragflächentheorie (dies. Zbl. 55, 188) auf die elliptische Tragfläche an, insbesondere im Grenzfall unendlicher Streckung bei bilinearer Abwindverteilung, und kommt dabei zu erstaunlichen Abweichungen in den explizit angegebenen Kräften und Momenten von den bisher allgemein anerkannten Werten; z. B. ergibt sich für den Auftriebsbeiwert  $c'_{\infty} = 16/3$  statt des bisherigen  $2\pi$ . Den Grund für diese Diskrepanz erblickt Verf. darin, daß in allen vorangehenden Theorien die Singularität an der Vorderkante ausdrücklich oder stillschweigend als von der gleichen Ordnung  $-1/2$  wie im ebenen Problem angenommen wurde. [Ref. kann sich eines Zweifels an diesen Ergebnissen nicht enthalten, zumal gewisse Zwischenergebnisse sicherlich nicht in Ordnung sind.]

*J. Weissinger.*

Legendre, Robert: Formation d'un remous au bord d'attaque d'un profil d'aile. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 838—840 (1956).

Un schéma d'écoulement autour d'un profil d'aile sous incidence notable est proposé pour limite de l'écoulement d'un fluide dont la viscosité tend vers zéro. Zusammenfassg. des Autors.

Anderson, Raymond F.: Notes on the calculation of the subsonic downwash and sidewash angles near wings. J. aeronaut. Sci. 23, 707—708 (1956).

Weissinger, Johannes: Zur Aerodynamik des Ringflügels in inkompressibler Strömung. Z. Flugwissenschaften 4, 141—150 (1956).!

Vgl. dies. Zbl. 65, 411.

*K. Nickel.*

Pivko, Svetopolk: Zur Abschätzung der aerodynamischen Eigenschaften dünner kreiszylindrischer, schrägangeströmter Ringflügel. Z. angew. Math. Mech. 36, 306—307 (1956).

Isay, W.-H.: Zur Berechnung der Strömung durch Voith-Schneider-Propeller. Ingenieur-Arch. 24, 148—170 (1956).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 65, 188) wird gezeigt, daß die Berechnung der Strömung durch einen Voith-Schneider-Propeller von kleinen auf beliebige Fortschrittsgrade übertragbar ist. Zur Vereinfachung wird gleichmäßige Verteilung der Zirkulationsdichte über dem Propellerumfang angenommen. Beispiele werden für den sechs- und vierflügeligen Propeller (maximale Flügelsteigung 0,25 und 0,5; Fortschrittsgrad 1,4 und 1,8) eingehend durchgerechnet. *J. Pretsch.*

Benjamin, T. Brooke: On the flow in channels when rigid obstacles are placed in the stream. J. Fluid Mechanics 1, 227—248 (1956).

Roth, H.: Pressure distribution on a wall under impact of a subsonic gas jet. Acta phys. Austr. 10, 142—148 (1956).

Die inkompressible rotationssymmetrische Strömung eines Flüssigkeitsstrahles gegen eine dazu senkrechte Wand wird mittels der Hodographenmethode (in enger Anlehnung an Arbeiten von Lighthill) in kompressiblen Strömungen ungerechnet. Für den Gasstrahl mit der Machschen Zahl der Anströmung 0,826 wird die Druckverteilung in der Wand numerisch behandelt. Am Schluß der Arbeit veranschaulicht ein Bild den Druckverlauf im inkompressiblen und kompressiblen Falle in der Wand.

Es zeigt sich, daß der Druck bei inkompressibler Strömung viel rascher seiner Asymptote zustrebt als im kompressiblen Falle. H. Wendt.

**Zierep, Jürgen:** Über den Auftrieb eines Ringflügels bei beschleunigtem oder verzögertem Überschallflug. *Z. Flugwissenschaften* 4, 269—272 (1956).

Für die Strömung um einen mit Überschallgeschwindigkeit konstanter Beschleunigung (oder Verzögerung) fliegenden angestellten Rotationskörper wird ein Charakteristikenverfahren entwickelt, welches eine Verallgemeinerung der Methode von Haack darstellt. Dabei wird die Beschleunigung als so klein angesehen, daß in der in Frage kommenden Zeit keine nennenswerte Änderung der Machzahl eintritt. Es zeigt sich, daß der Gesamtauftrieb eines Ringes bei Beschleunigung unter, bei Verzögerung jedoch über dem stationären Wert liegt. Für die in der Praxis auftretenden Geschwindigkeitsänderungen erweist sich der Effekt im allgemeinen als geringfügig. K. Oswatitsch.

**Behrbohm, Hermann:** Auftriebslöschung und Aufwindlöschung, zwei duale Methoden der linearisierten Überschalltragflächentheorie. Anwendungen auf den Doppeldreiecksflügel. *Z. Flugwissenschaften* 4, 263—268 (1956).

Den Anlaß zur Entwicklung dieser Methode gab die Frage nach den Auftriebskräften an einem Doppeldreiecksflügel mit Unterschallvorderkanten. Die Flügelspitzen sind dabei nach außen geknickt, so daß sie in das kegelige Aufwindfeld hineinragen. Zur Erfüllung der Randbedingung auf der Flügelfläche ist das Aufwindfeld zu löschen und sodann der vorgeschriebene konstante Aufwind der Oberfläche zu verifizieren. Diese Methode steht in einer Dualität zu einer älteren Methode für eingeknickte Flügel, wo der am fehlenden Flügelteil vorhanden gewesene Auftrieb gelöscht wurde. Die neue Methode wurde für zahlreiche Varianten der 3 Parameter (2 Knickwinkel und eine Knickpunktslage) ausgewertet, womit sich ein geschlossenes Bild zur praktischen Anwendung ergibt. K. Oswatitsch.

**Krzywoblocki, M. Z. v. and G. Shinosaki:** On drag of some bodies in free molecule flow. *Acta phys. Austr.* 10, 34—53 (1956).

Frühere Untersuchungen von Heinemann (dies. Zbl. 39, 428) über den Widerstand schnell fliegender konvexer Körper in einem verdünnten Gas ( $L/a \ll 1$ ;  $L$  freie Weglänge,  $a$  charakteristische Länge z. B. Durchmesser des Flugkörpers; nur Zusammenstöße der Moleküle mit der Körperoberfläche berücksichtigt) werden auf ein Rotationsparaboloid angewandt. Für eine normal zu ihrer Ebene mit hoher Geschwindigkeit bewegte Platte hat Heinemann eine zweite Näherung berechnet, bei der auch Zusammenstöße der Moleküle miteinander berücksichtigt werden. Diese Ergebnisse werden in der vorliegenden Arbeit auf eine geneigte Platte ausgelehnt. W. Wuest.

**Berndt, Sune B.:** On the drag of slender bodies at sonic speed. *Flygtekn. Försöksanstalt, Meddel.* 70, 17 p. (1956).

Am endlich angenommenen Endquerschnitt eines Körpers kleiner Spannweite wird der Widerstand durch die Impulse in einer Ebene quer zur Hauptströmungsrichtung ausgedrückt. Nach dem Äquivalenzsatz genügen die Querkomponenten dort der Laplace-Gleichung. Mit dem Gaußschen Satz können die Impulse in der Ebene auf Integrale über deren Schnittkurve mit dem Körper zurückgeführt werden. Es zeigt sich, daß äquivalente Körper gleicher Endquerschnittsform und gleicher Oberflächenneigung dort gleichen Widerstand besitzen. Im allgemeinen berechnet sich der Widerstandsunterschied zweier äquivalenter Körper aus einem Integral, wie es schon früher von Ward für lineare Überschallströmung angegeben wurde. K. Oswatitsch.

**Görtler, H.:** Eine neue und allgemeine Methode zur Berechnung laminarer Grenzschichten. *Z. angew. Math. Mech.* 36, 298 (1956).

**Mangler, Kurt Werner:** Ein Verfahren zur Berechnung der laminaren Grenzschicht mit beliebiger Druckverteilung und Wärmeübergang für alle Machzahlen. *Z. Flugwissenschaften* 4, 63—66 (1956).



Verf. transformiert die Differentialgleichungen und Randbedingungen seines Problems in eine geeignete Gestalt. Zur Lösung des umgeformten Problems wird ein Iterationsverfahren angegeben. Ein Beispiel wird nicht durchgerechnet. Es wird jedoch erwartet, daß das Iterationsverfahren verhältnismäßig gut konvergiert.

*H. Wendt.*

**Hämmerlin, Günther:** Zur Theorie der dreidimensionalen Instabilität laminarer Grenzschichten. *Z. angew. Math. Phys.* **7**, 156—164 (1956).

Für die laminaren Grenzschichten längs konkav gekrümmter Wände konnte H. Görtler 1940 erstmalig eine Instabilität gegenüber dreidimensionalen Störungen in der Form von Wirbeln mit Achsen in Richtung der Grundströmung nachweisen. Die Störungsdifferentialgleichungen dieses Problems führen auf ein Eigenwertproblem, für welches der Eigenwert in der Form  $\text{Re}(\delta/R)^{1/2}$  (= Görtler-Parameter) in Abhängigkeit von der Störungswellenlänge gefunden wird und der über die Stabilität der Strömung entscheidet. (Re ist die mit der Grenzschichtdicke gebildete Reynolds-Zahl,  $\delta$  die Grenzschichtdicke,  $R$  der Krümmungsradius der Wand.) Die in der Originalarbeit von Görtler mitgeteilte numerische Berechnung des Eigenwertes diente der größenordnungsmäßigen Abschätzung. Spätere Rechnungen von Meksyn (dies. Zbl. **38**, 115) ergaben Werte mit etwa dem zehnfachen Betrag wie bei Görtler. Die vom Verf. mit erheblich verbesserten mathematischen Methoden durchgeführte Neuberechnung ergab im wesentlichen eine Bestätigung der früheren Görtlerschen Resultate.

*H. Schlichting.*

**Napolitano, Luigi G.:** Similar solutions in compressible laminar free mixing problems. *J. aeronaut. Sci.* **23**, 389—390 (1956).

Die von Li und Nagamatsu für die kompressible laminare Grenzschicht angegebenen ähnlichen Lösungen für die Geschwindigkeits- und Energieverteilung werden auf Probleme des Freistrahles übertragen. Kurzauszug einer an anderer Stelle ausführlich veröffentlichten Diss. [Brooklyn Polytechnic Inst. PIBAL Report Nr. 267 (1954).]

*H. Schlichting.*

**Probstein, Ronald F. and David Elliott:** The transverse curvature effect in compressible axially symmetric laminar boundary-layer flow. *J. aeronaut. Sci.* **23**, 208—224, 236 (1956).

Es wird eingehend untersucht, in welcher Weise sich die kompressible laminare Grenzschicht an einem axial angeströmten Rotationskörper von derjenigen der ebenen Strömung bei gleicher Außenströmung unterscheidet. Maßgeblich für den dreidimensionalen Effekt ist der Parameter  $\delta/r_0$ , wobei  $\delta$  die Grenzschichtdicke und  $r_0$  den Radius des Rotationskörpers (in der Ebene senkrecht zur Symmetrieachse) bedeutet. Es wird gezeigt, daß das Busemannsche Energie-Integral für die Prandtl-Zahl  $\text{Pr} = 1$  auch für diese dreidimensionale Grenzschicht exakt gültig ist. Durch eine Verallgemeinerung der Mangler-Transformation wird die axial-symmetrische Grenzschicht zurückgeführt auf eine „nahezu zweidimensionale“ Form, die leichter gelöst werden kann, falls  $\delta/r_0 \gg 1$  oder  $\leq 1$  ist. Die Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit dem letzteren Fall. Insbesondere wird gezeigt, daß für diesen Fall die Zusatzglieder, welche die transformierte dreidimensionale von der zweidimensionalen Grenzschicht unterscheiden, sich wie ein Druckabfall auswirken. Die Änderung des örtlichen Reibungsbeiwertes und der örtlichen Wärmeübergangszahl durch die Wandkrümmung wird explizit angegeben.

*H. Schlichting.*

**Constantinescu, V. N.:** L'écoulement laminaire des gaz en couches minces. *Comun. Acad. Republ. popul. Romîne* **6**, 281—284 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 284 (1956) [Rumänisch].

Considérations élémentaires sur quelques cas particuliers de l'équation générale régissant la distribution des pressions dans la couche de lubrifiant. L'A. recherche des cas où les variables se séparent; ceci implique cependant une forme particulière de l'épaisseur  $\delta = \delta(x, z)$  de la couche, ce dont il ne fait aucune mention.

*C. Iacob.*

**Pai, S. I.:** On the boundary-layer equations of a very slender body of revolution. J. aeronaut. Sci. **23**, 795—796 (1956).

**Punnis, B.:** Zur Differentialgleichung der Plattengrenzschicht von Blasius. Z. angew. Math. Mech. Sonderheft 26 (1956).

**Punnis, B.:** Zur Differentialgleichung der Plattengrenzschicht von Blasius. Arch. der Math. **7**, 165—171 (1956).

Verf. untersucht (im Reellen) die Singularitäten der Lösung  $f(\eta)$  der Blasiuschen Differentialgleichung (1)  $f''' + ff'' = 0$  unter den Randbedingungen (2)  $\eta = 0: f = f' = 0; \eta \rightarrow \infty: f' \rightarrow 2$ . Durch Transformation auf eine einfachere Differentialgleichung erhält man: Es gibt im Endlichen genau eine singuläre Stelle  $\eta^* < 0$  (physikalisch gesprochen also „jenseits der Platte“) mit  $f(\eta) \rightarrow i(\eta) = 3/(\eta - \eta^*)$  bei  $\eta \rightarrow \eta^*$ . Dabei ist  $f$  selbst Lösung von (1), allerdings ohne (2) zu erfüllen. Für die Stelle  $\eta^*$  ergibt sich nach numerischer Integration von (1) die Ungleichung  $-3,13 \leq \eta^* \leq -3,11$ , diese Schranken lassen sich noch beliebig verbessern. *K. Nickel.*

**Truckenbrodt, E.:** Berechnung der laminaren Grenzschicht mit Absaugung. Z. angew. Math. Mech. Sonderheft 49 (1956).

**Stojanović, Dragutin:** Temperaturgrenzschichten in dreidimensionalen Strömungen. Z. angew. Math. Mech. Sonderheft 30—31 (1956).

Die Energiegrenzschichtgleichung einer dreidimensionalen inkompressiblen laminaren Strömung in der Nähe eines Staupunktes kann bei Nichtberücksichtigung der Dissipationsglieder mit Hilfe von Ähnlichkeitstransformationen in gewöhnliche Differentialgleichungen übergeleitet werden. Die Grenzfälle der ebenen und der rotationssymmetrischen Staupunktströmung ergeben sich daraus.

*G. Hämmerlin.*

**Gadd, G. E.:** A simple theory for interactions between shock waves and entirely laminar boundary layers. J. aeronaut. Sci. **23**, 225—230 (1956).

Eine Näherungstheorie für die gegenseitige Wirkung einer entweder von außen einfallenden oder durch einen Wandknick erzeugten Stoßwelle mit einer völlig laminaren Grenzschicht wird mit Hilfe einfacher Annahmen für die Form der Grenzschichtprofile entwickelt. Durch Verknüpfung des Druckgradienten mit der zweiten Ableitung des Geschwindigkeitsprofils an der Wand und der Verdrängungswirkung der Grenzschicht erhält man eine numerisch leicht auswertbare Differentialgleichung für die Druckverteilung, die mit Versuchsergebnissen gut übereinstimmt. Das Verfahren ist auch bei Strömungsablösung noch anwendbar, obgleich es nicht gestattet, die genaue Lage der Ablösestelle zu fixieren. *W. Wuest.*

**Mangler, K. W.:** Ein Äquivalenzsatz für laminare Grenzschichten bei Hyper-schallströmung. Z. angew. Math. Mech. Sonderheft 22—25 (1956).

Sobald bei Grenzschichtströmungen in verdünnten Gasen und bei hohen Geschwindigkeiten das Verhältnis  $M/\sqrt{\text{Re}}$  zwischen 1 und 0,01 liegt, tritt Gleiten an der Wand ein. Durch eine Transformation kann die dreidimensionale Grenzschicht mit Gleiten an der Wand in einen Teil einer anderen Grenzschicht mit Absaugen oder Ausblasen entlang der Wand übergeführt werden. Eine Abschätzung der Größenordnung der einzelnen Glieder zeigt aber, daß der Einfluß der Blasgeschwindigkeit auf die Lösungen der Grenzschichtgleichungen vernachlässigt werden kann. Die Gleitbedingung wirkt sich schließlich nur noch so aus, daß an den Grenzschichtgrößen Korrekturen angebracht werden müssen, wobei die Grenzschichtdicke und der Wärmeübergang verringert wird, während die Wandschubspannung bei Druckabfall abnimmt und bei Druckanstieg anwächst. Für den zweidimensionalen Fall wurde dieses Ergebnis auf andere Weise bereits von T. Nonweiler [Cranfield Rep. Nr. 62, (1952)] hergeleitet. *W. Wuest.*

**Becker, E.:** Beitrag zur Berechnung von Sekundärströmungen. Z. angew. Math. Mech. Sonderheft 3—8 (1956).

**Walz, A.: Näherungstheorie für kompressible turbulente Grenzschichten.** Z. angew. Math. Mech. Sonderheft 50—56 (1956).

Es wird zunächst versucht, den Einfluß der Machzahl auf die örtliche Wand Schubspannung und die Energiedissipation näherungsweise zu erfassen. Dann wird ein Gleichungssystem, bestehend aus Impuls- und Energiegleichung zur Lösung der turbulenten Grenzschicht bei beliebiger Druckverteilung angegeben, das auch für laminare Grenzschichten gültig ist. Die Gleichungen werden angewandt auf den Fall der turbulenten Reibung an der ebenen Platte. Die Ergebnisse werden mit bekannt gewordenen Messungen und Theorien anderer Verfasser verglichen.

J. Rotta.

**Walz, Alfred: Nouvelle méthode approchée pour la couche limite compressible.** C. r. Acad. Sci., Paris 243, 15—16 (1956).

Kurzbericht über die erwähnte neue Methode, ausführlicher bei: A. Walz, Nouvelle méthode approchée de calcul des couches limites laminaire et turbulente en écoulement compressible, P. S. T. Ministère de l'Air, n° 309, 1956. Parameter-Verfahren, bei dem Impuls- und Energiesatz erfüllt werden; die Wandtemperatur kann vorgeschrieben werden. Ein Druckgefälle senkrecht zur Wand — wie es z. B. in der Nähe eines Verdichtungsstoßes auftritt — wird noch näherungsweise durch Korrekturen aus den vollen Navier-Stokesschen Differentialgleichungen berücksichtigt.

K. Nickel.

**Coles, Donald: The law of the wake in the turbulent boundary layer.** J. Fluid Mechanics 1, 191—226 (1956).

**Yen, K. T.: On the energy balance in a compressible boundary layer.** J. aeronaut. Sci. 23, 274—276 (1956).

Die Differentialgleichungen einer turbulenten kompressiblen Grenzschicht werden erneut abgeleitet, um die Annahmen zu prüfen, die von anderen Autoren benutzt worden sind. Im Fall  $Pr = 1$  werden einige einfache Beziehungen für das Energiegleichgewicht zwischen der mittleren Strömung und den turbulenten Schwankungen gewonnen. Bei wärmeisolierter Wand ist die Summe der totalen Temperatur der mittleren Strömung und diejenige der turbulenten Schwankung in der Grenzschicht konstant.

W. Wuest.

**Tani, Itiro: Energy dissipation in turbulent boundary layers.** J. aeronaut. Sci. 23, 606—607 (1956).

**Struminskij (Struminsky), V. V.: A three-dimensional boundary layer on an arbitrary surface.** Doklady Akad. Nauk SSSR 108, 595—598 (1956) [Russisch].

Le mémoire est consacré à l'étude de mouvement fluide dans la couche limite en trois dimensions. L'A. ne se contente pas des équations obtenues par Levi-Civita et par Howarth et donne une forme nouvelle à ces équations où l'influence de la courbure est mise en évidence et où la forme de la surface peut être arbitraire. Les équations obtenues présentent le cas limite des équations de Navier-Stokes quand le nombre de Reynolds tend vers l'infini.

C. Woronetz.

**Bruniak, R.: Über die Ablösung der Grenzschicht beim Verdichtungsstoß.** Österreich. Ingenieur-Arch. 10, 129—133 (1956).

Auf Grund von Impulsüberlegungen nach der Methode von v. Kármán-Pohlhausen wird die Frage der Ablösung der Grenzschicht durch einen senkrechten Stoß studiert. Unter anderem ergibt sich für Machzahlen vor dem Stoß  $M_1 > \sqrt{2,5}$  stets Ablösung. Das entspräche einem Anstieg des Druckkoeffizienten, der etwas über den Erfahrungswerten liegt. Die Annahme eines exakt senkrecht in die Grenzschicht hineinragenden Stoßes sollte bei Weiterentwicklung der Theorie einer Prüfung unterzogen werden, da bereits geringe Abweichungen von der Senkrechten starke Änderungen des Druckbildes hinter dem Stoß bedingen.

K. Oswatitsch.

**Rannie, W. D.: Heat transfer in turbulent shear flow.** J. aeronaut. Sci. 23, 485—489 (1956).



Die Wärmeübertragung in turbulenten Grenzschichten wird auf Grund eines von v. Kármán stammenden Modells studiert, das die Analogie zwischen Reibung und Wärmeübertragung betrifft.

K. Oswatitsch.

Chandrasekhar, S.: Theory of turbulence. Phys. Review, II. Ser. 102, 941—952 (1956).

La turbulence est supposée homogène, isotrope, stationnaire;  $2\psi(r, t)$  désigne la moyenne de  $(u'_1 - u''_1)^2$ , où  $u'_1, u''_1$  sont les composantes de la vitesse en deux points à la distance  $r$ , en deux instants séparés de  $t$ . La théorie de Kolmogoroff indique que (notations classiques)  $\psi(r, 0) = (\varepsilon \nu)^{1/2} \psi_1[r(\varepsilon/\nu^3)^{1/4}]$ ,  $\psi_1$  fonction universelle, et que, si  $\nu \rightarrow 0$ ,  $\psi_1(x)$  devient équivalent à  $C_1 x^{2/3}$ , donc non borné, ce qui est contradictoire. De même  $\psi(0, t) = (\varepsilon \nu)^{1/2} \psi_2[t(\varepsilon/\nu)^{1/2}]$ , et, si  $\nu \rightarrow 0$ ,  $\psi_2(x)$  devient équivalent à  $C_2 x$ , donc non borné. Il en résulte que  $\psi(r, t)$  n'est pas vraiment une caractéristique universelle de la turbulence. Si l'on pose  $f(r, t) = \langle u_1(0, 0, 0; 0) u_1(r, 0, 0; t) \rangle_{Ar}$ , la fonction  $\chi(r, t) = -\partial f / \partial r$  ne présente pas les mêmes défauts que  $\psi(r, t)$ . Le principe de similitude de Kolmogoroff, appliqué à  $\chi(r, t)$ , montre que

$$\chi(r, t) = (\varepsilon^3/\nu)^{1/4} X[r(\varepsilon/\nu^3)^{1/4}, t(\varepsilon/\nu)^{1/2}],$$

$X(x, y)$  fonction universelle, et que, si  $\nu \rightarrow 0$ ,  $X(x, y)$  devient équivalent à  $x^{-1/2} \sigma(y/x^{2/3})$ . Pour étudier  $\chi(r, t)$ , l'A. applique au tenseur

$$Q_{ij;k} = \partial Q_{ij} / \partial \xi_k = \langle u'_i \cdot \partial u'_j / \partial x'_k \rangle_{Av}$$

les méthodes qu'il a développées pour l'étude de  $Q_{ij}$  [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 229, 1 (1955)] et qui, grâce à une hypothèse purement statistique, permettent de relier les moments d'ordre 4 aux moments du second ordre. Si  $\chi = 2 \partial Q / \partial r$  est le scalaire associé au tenseur  $Q_{ij;k}$ , on trouve que

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{(\partial^2 / \partial t^2 - \nu^2 \partial / \partial r D_5 D) \chi}{\partial / \partial r D \chi} \right] = -\chi$$

où  $D_5 = \partial^2 / \partial r^2 + 4 \partial / \partial r$ ,  $D = \partial / \partial r + 4/r$ . Cette équation devient sans dimensions si  $\chi, r, t$  s'expriment respectivement en unités de  $(\varepsilon^3/\nu)^{1/4}$ ,  $(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ ,  $(\nu/\varepsilon)^{1/2}$ . Lorsque  $\nu = 0$ ,

$$\chi = r^{-1/3} \sigma(x), \quad x = \frac{t}{r^{2/3}}, \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[ \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \left/ \frac{\partial}{\partial^2} \right. \right] D \chi = -\chi.$$

$\sigma$  vérifie une équation différentielle ordinaire, dont on cherche des solutions paires bornées et positives à l'origine, nulles à l'infini, et ayant une dérivée nulle pour  $x = 0$ . Par des transformations analytiques, on obtient une équation du second ordre non linéaire entre les deux variables

$$u = x^2 \Phi, \quad v = x^3 \Phi', \quad \text{où} \quad \Phi = 9 \sigma'' / (44 \sigma + 10 x \sigma' - 4 x^2 \sigma'').$$

On montre que  $\Phi$  est développable suivant les puissances de  $x^2$  au voisinage de l'origine, et  $\Phi/x$  suivant les puissances de  $1/x^3$  au voisinage de l'infini. Les premiers coefficients de ces développements sont calculés. Il existe une solution  $\Phi$  et une seule ayant ces caractéristiques, continue ainsi que sa dérivée, et satisfaisant aux conditions  $\Phi = 1$ ,  $\Phi' = 0$  pour  $x = 0$ ,  $\Phi - x \Phi' \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow \infty$ . Une résolution numérique a permis de tracer les courbes représentatives de  $\sigma(x)$  en fonction de  $x$ , et de  $\chi(r, t)$  en fonction de  $r$  pour diverses valeurs de  $t$ , ainsi que diverses courbes de corrélation relatives au tourbillon. Après discussion des résultats, l'étude du problème général ( $\nu \neq 0$ ) est ébauchée.

J. Bass.

● Townsend, A. A.: The structure of turbulent shear flow. (Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics.) Cambridge: At the University Press 1956. XII, 320 p. 40 s net.

Das Phänomen der turbulenten Strömung ist die letzte Erscheinung im Bereiche der althergebrachten Mechanik, welche der Wissenschaft noch immer grundsätzliche Rätsel aufgibt und einer befriedigenden Behandlung durch die Theorie bis heute

getrozt hat. Einen hervorragenden Platz auf dem Gebiete der Turbulenzforschung behauptet seit über 30 Jahren die Englische Schule Sir Geoffrey Taylor's und seiner Mitarbeiter im berühmten Cavendish-Laboratorium zu Cambridge, wo insbesondere während der letzten 10 Jahre das Team Batchelor-Townsend große Erfolge experimenteller wie theoretischer Art erzielt hat. Nachdem bereits 1953 G. K. Batchelor über den engeren Fragenkreis der homogenen und isotropen Turbulenz, wo die Hauptschritte seit Mitte der dreißiger Jahre lagen, eine Monographie in derselben Sammlung veröffentlicht hat, legt nun A. A. Townsend das zu besprechende Werk vor, welches die allgemeinere Klasse der mit Querkraften behafteten turbulenten Strömungen zum Gegenstand hat, also Strömungserscheinungen, die nicht nur für die engeren Anwendungsgebiete der Strömungslehre wichtig sind, sondern auch für Meteorologie, Ozeanographie, Astrophysik und Verfahrenstechnik. Mit diesen beiden Werken besitzt die Fachwelt nunmehr einen bewunderungswürdigen Bericht über den derzeitigen Stand der Erkenntnis auf dem Turbulenzgebiet. — Es liegt in der Natur der Sache, daß in diesem Buche die mathematischen Abschnitte einen kleineren Raum einnehmen als in dem Werke von Batchelor, auf das man beim Studium öfters zurückgreifen wird. In seinem Großteil hat dieses Werk das Gepräge eines auf Grund umfassender und tiefer Sachkenntnis geschriebenen Physikbuches, in welchem eine Fülle experimenteller Ergebnisse geboten und zugleich die zum Verständnis der Vorgänge erforderlichen Grundvorstellungen meisterhaft entwickelt werden. Das Werk ist in zwölf Abschnitte gegliedert, von denen die ersten sechs die Grundlagen und die physikalischen Einzelerscheinungen behandeln, während dann in den folgenden Abschnitten die speziellen Verhältnisse und Probleme der turbulenten Nachlaufströmung, der Flüssigkeitsstrahlen, der Strömung in Rohren und Kanälen, der turbulenten Grenzschichten ohne und mit Druckgefälle und der Strömung zwischen zwei konzentrischen Zylindern zur Sprache kommen. Ein Gedankengang, der bis zum sechsten Kapitel nach und nach herausgearbeitet und dann bei den speziellen Problemen wiederholt angewandt wird, sei hier eingehender genannt. Es ist eine Besonderheit der turbulenten Querkraftströmung, daß der turbulenten Bewegung aus der nichtgleichförmigen Grundströmung dauernd Bewegungsenergie zugeführt werden muß. Townsend betrachtet als Träger dieses Umwandlungsprozesses große Wirbel, die sich von den kleinen Wirbeln der turbulenten Hauptbewegung deutlich unterscheiden und etwa den fünften Teil der turbulenten Energie tragen. Sie werden selbst von der Grundströmung gespeist und geben Energie an die turbulente Hauptbewegung weiter, so daß diese erhalten bleibt. Diese gewissermaßen katalytisch wirkenden Wirbel entstehen zufällig, behaupten sich aber nur im Falle einer bestimmten, vom System abhängigen Größe und Intensität, weil sie nur dann sich in einem stabilen energetischen Gleichgewicht befinden. Durch die Berechnung dieses Gleichgewichts erhält Townsend einen Lösungsweg für das Problem der turbulenten Grundströmung, bei dem keine willkürlichen Konstanten einzuführen sind. Sowohl der an den möglichen Anwendungen wie der an der Entwicklung der Theorie interessierte Leser wird es zu schätzen wissen, durch dieses Werk so hervorragend nicht nur über die physikalischen Tatbestände unterrichtet zu werden, sondern auch über die dazugehörigen Meßergebnisse, die, soweit sie nicht überhaupt neu sind, bisher im Schrifttum weit zerstreut und nur schwer überschaubar vorlagen.

*H. Gebelein.*

Reid, W. H.: On the approach to the final period of decay in isotropic turbulence according to Heisenberg's transfer theory. Proc. nat. Acad. Sci. USA 42, 559—563 (1956).

L'A. définit la période finale de décroissance de la turbulence comme étant celle pendant laquelle, avec les notations classiques,  $u^2 \propto (t - t_0)^{-5/2}$ . Le nombre de Reynolds décroît alors suivant la loi  $R_\lambda \propto (t - t_0)^{-3/4}$ . Pour résoudre l'équation fondamentale  $\partial E / \partial t = T - 2\nu k^2 E$ , on lui adjoint l'équation intégrale d'Heisen-

berg, et on utilise la loi de similitude

$E = \nu^{3/2} (t - t_0)^{-1/2} R_\lambda^2 F(x, R_\lambda), \quad T = \nu^{3/2} (t - t_0)^{-3/2} R_\lambda^2 U(x, R_\lambda),$   
 $x = (\nu k^2 t)^{1/2}$ . On développe  $F$  et  $U$  suivant

$$F(x, R_\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) (\kappa R_\lambda)^n, \quad U(x, R_\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) (\kappa R_\lambda)^n.$$

On obtient des expressions explicites pour  $F_0$  et  $U_1$ . On en déduit que le facteur de distorsion (skewness)  $S$  ne tend pas vers 0 dans la période finale, mais vers 0,5764  $\kappa$ .

*J. Bass.*

**Phillips, O. M.:** The final period of decay of non-homogeneous turbulence. Proc. Cambridge philos. Soc. **52**, 135—161 (1956).

Die Arbeit befaßt sich theoretisch mit dem Verhalten einer allgemeinen örtlichen Störung in einem unendlich ausgedehnten Strömungsfeld, welches anfänglich in Ruhe ist. Für das Verhalten in großer Entfernung vom Zentrum der Störung sind 2 Invarianten wesentlich, die physikalisch den linearen Impuls und den Winkelimpuls darstellen. Wenn der lineare Impuls von Null verschieden ist, entspricht die Bewegung im Endstadium dem Typus von zähen Wirbelringen. Das Verhalten irgend-einer turbulenten Bewegung (in Abwesenheit von festen Wänden) im Endstadium kann daher durch Überlagerung von zähen Wirbelringen gefunden werden. Als Beispiel wird das Endstadium homogener Turbulenz erwähnt. Als weiteres Beispiel wird der axial-symmetrische turbulente Nachlauf behandelt.

*J. Rotta.*

**Stuart, J. T.:** On the effects of the Reynolds stress on hydrodynamic stability. Z. angew. Math. Mech. Sonderheft 32—38 (1956).

In der vorliegenden Arbeit werden Ergebnisse einer Theorie der hydrodynamischen Stabilität gegenüber endlichen zweidimensionalen Störungen diskutiert (Meksyn-Stuart). In dieser Theorie finden die bei endlichen Störungen auftretenden Reynoldsschen Kräfte (scheinbaren Spannungen) Berücksichtigung; es ergeben sich kritische Reynoldssche Zahlen, die mit wachsender Stör-Amplitude stark abnehmen. Dies und die ungewöhnliche Tatsache, daß die von Davies-White beim laminar-turbulenten Umschlag der ebenen Kanalströmung beobachtete Reynoldssche Zahl beträchtlich unter der kritischen Re-Zahl infinitesimaler Störungen liegt, führt den Verf. zur Annahme, daß es hier endliche Störungen sind, die nicht aus infinitesimalen erwachsen, welche die laminare Strömung zum Zusammenbrechen bringen. Die Betrachtungen werden auch auf das Turbulenzmodell von Burgers ausgedehnt.

*G. Hämmerlin.*

**Stern, Marvin:** The rolling-up of a vortex sheet. Z. angew. Math. Phys. **7**, 326—342 (1956).

In Übereinstimmung mit vorangegangenen Arbeiten (vgl. vor allem mit Kaden, dies. Zbl. **2**, 78), wird beim Aufrollen des Wirbelbandes langsame Änderung in Strömungsrichtung und keine gegenseitige Beeinflussung der Wirbelbandränder vorausgesetzt. Das Problem kann dann als ein instationär ebenes, im Zeitmaßstab ähnliches aufgefaßt werden. Die Lösung stimmt für den Spiralkern mit jener von Kaden überein. Differentialgleichungen für den Mittelwert und den Sprung des komplexen Potentials an der Trennfläche werden abgeleitet, welche zur Beschreibung des gesamten Strömungsfeldes benutzt werden können, leider aber nicht benutzt werden.

*K. Oswatitsch.*

**Szablewski, W.:** Turbulente Vermischung ebener Heißluftstrahlen. Z. angew. Math. Mech. **36**, 311 (1956).

**Hoff, N. J.:** Comparison of radiant and conductive heat transfer in a supersonic wing. J. aeronaut. Sci. **23**, 694—696 (1956).

**Brieden, K.:** Anwendung der Herzkurvenmethode auf anisentrope Überschallströmungen. Z. angew. Math. Mech. **36**, 297—298 (1956).



**Fowell, L. R.:** Exact and approximate solutions for the supersonic delta wing. *J. aeronaut. Sci.* **23**, 709—720, 770 (1956).

**Keune, Friedrich:** Ergebnisse einer Näherungstheorie für die schallnahe Strömung um verwundene und gewölbte dünne Flügel. *Z. Flugwissenschaften* **4**, 276—280 (1956).

**Biot, M. A.:** The divergence of supersonic wings including chordwise bending. *J. aeronaut. Sci.* **23**, 237—251, 271 (1956).

Zusammenfassender Bericht über die in den letzten Jahren im Cornell Aeronautical Laboratory durchgeführten Untersuchungen über die statische aeroelastische Stabilität bei dünnen Überschallflügeln, wobei nicht nur Biegung und Moment in Spannweitenrichtung sondern auch die Biegung in Tiefenrichtung berücksichtigt wird. Die Theorie wird in aufeinanderfolgenden Stufen des Schwierigkeitsgrades entwickelt, angefangen mit der zweidimensionalen Instabilität der Vorderkante eines Flügels von trapezförmigem Querschnitt bis zur näherungsweise Behandlung des dreidimensionalen Falles nach der „Streifenmethode“. In einem weiteren Abschnitt werden die Gleichungen auf der Grundlage der Theorie der Platte konstanter Dicke streng gelöst. Der Doppeltrapezflügel wird ferner nach einer Methode verallgemeinerter Koordinaten behandelt, wobei sich ein erheblicher Einfluß der Poissonschen Querkontraktion bemerkbar macht. Die frühere Streifenmethode wird dann auf endliche Deformation (von der Größenordnung der Flügeldicke) ausgedehnt, wobei der durch die Querkontraktion hervorgerufene antiklastische Effekt berücksichtigt wird.

*W. Wuest.*

**Miles, John W.:** On linearized transonic flow theory for slender bodies. *J. aeronaut. Sci.* **23**, 704—705 (1956).

**Miles, John W.:** A first-order formulation of the unsteady supersonic flow problem for finite wings. *J. aeronaut. Sci.* **23**, 578—582 (1956).

Die Überschallströmung um einen Flügel endlicher Spannweite, der „langsamer“ harmonische Schwingungen ausführt, wird unter den üblichen Voraussetzungen der linearen Theorie der Überschallströmungen behandelt. Die Frequenz der Schwingung soll so klein sein, daß sie nur linear berücksichtigt zu werden braucht. Während bei früheren Bearbeitungen dieses Problems stets nur Überschallkanten zugelassen wurden, wird in der vorliegenden Arbeit das Problem auch für Flügel gelöst, die teilweise von Unterschallkanten begrenzt sind. Die Aufgabe wird auf die Lösung zweier Probleme der stationären Strömung zurückgeführt. Beim ersten Problem wird die stationäre Strömung um den gegebenen Tragflügel mit entsprechend modifizierter lokaler Anstellung bestimmt. Beim zweiten Problem handelt es sich um eine stationäre Strömung, bei der der Nachlauf vernachlässigt wird und das Potential längs der Unterschallkanten verschwinden soll. Als Beispiel wird der Trapezflügel durchgerechnet.

*R. Sauer.*

**Li, Ta:** Aerodynamic influence coefficients for an oscillating finite thin wing in supersonic flow. *J. aeronaut. Sci.* **23**, 613—622 (1956).

**Kogan Abraham:** On inviscid flow near an airfoil leading edge or an ogive tip at high supersonic Mach numbers. *J. aeronaut. Sci.* **23**, 794—795 (1956).

**Schäfer, Manfred:** Über die stetige Rückkehr gestörter Überschallströmungen in den Unterschallbereich bei gemischten Strömungsfeldern. *J. rat. Mech. Analysis* **5**, 217—250 (1956).

Mit Hilfe der „einheitlichen Charakteristikenmethode“ (s. Verf., dies. Zbl. **50**, 414) wird die Frage nach stoßfreien Nachbarlösungen in gemischten Unter-Überschallströmungen untersucht. Dabei wird vom exakten ebenen gasdynamischen Differentialgleichungssystem ausgegangen, nach einem Änderungsparameter entwickelt, dabei nur das erste Glied genommen, und außerdem werden die charakteristischen Grundkurven der Grundströmung beibehalten. Im Gegensatz zu Ergebnissen von Guderley und von Busemann findet der Verf. Nachbarlösungen und

vermutet, daß die Ergebnisse von Guderley und Busemann auf der Verwendung der vereinfachten gasdynamischen Gleichung beruhen. Der Ref. nimmt an, daß es sich bei der Frage nach stoßfreien Nachbarlösungen nicht um Stöße der ausgedehnten, kräftigen Art handelt, wie sie größere lokale Überschallgebiete abzuschließen pflegen, sondern um äußerst kurze und schwache Überschneidungen der Charakteristiken, wie sie von einigen exakten Lösungen her bekannt sind. Dies erfordert sehr genaue Untersuchungen. Ohne sich bezüglich der Ergebnisse festzulegen, glaubt der Ref., daß es sich um ein allgemeines Problem gemischt elliptisch-hyperbolischer Felder handelt. In der Vereinfachung der gasdynamischen Gleichung, der im übrigen ein durchaus präziser Grenzübergang zugrunde liegt, wäre danach keine Ursache für Diskrepanzen zu sehen. Bedenklicher erscheint dagegen das Beibehalten der charakteristischen Grundkurven, die durch eine Störung zum Überschneiden gezwungen werden könnten.

*K. Oswatitsch.*

**Marschner, Bernard W.:** The flow over a body in a choke wind tunnel and in a sonic free jet. *J. aeronaut. Sci.* **23**, 368—376 (1956).

Symmetrischer Doppelkeil mit dem Anstellwinkel Null in zweidimensionaler, stationärer und reibungsfreier Strömung. Vergleich der Druckverteilungen unter Freiflugbedingungen bei Schallgeschwindigkeit einerseits mit denjenigen bei offenem und geschlossenem Windkanal andererseits. Entwicklung nach einem Parameter, der die Abweichung von den Bedingungen des freien Flugs bei Machzahl Eins angibt. Die Abweichungen der Druckverteilungen von denen des freien Flugs sind für geschlossenen Kanal und für Freistrahle von derselben Größe, besitzen jedoch entgegengesetztes Vorzeichen. In dem speziellen Beispiel eines Doppelkeiles mit dem Dickenverhältnis 10% und einem Verhältnis von 13% zwischen Keillänge und Kanalhöhe liegen die Unterschiede zwischen den drei Druckverteilungen in der Größe der üblichen Meßfehler.

*K. Nickel.*

**Hain, Klaus:** Wechselwirkung zweier starker eindimensionaler Stoßwellen. *Z. Naturforsch.* **11a**, 329—339 (1956).

Zusammenstoß und Überholen zweier ebener, paralleler, starker Stoßfronten wird numerisch durch Charakteristikenverfahren berechnet. Beim Zusammenstoß wird für beide Fronten, beim Überholen für die überholte Front vorausgesetzt, daß sie sich bereits im asymptotischen Zustand der „Standardfront“ befinden. Die Ergebnisse sind in zahlreichen Figuren dargestellt. Beim Überholen stellt sich nach kurzer Zeit wieder eine Standardfront ein, wodurch deren Stabilität erneut veranschaulicht wird. Beim Zusammenstoß hat es den Anschein, als würden alle Fronten stets nach Erreichen des gleichen homologen Abstandes von der Stoßstelle auf  $M = 1$  abgeklungen sein, was auch hier die Möglichkeit einer einheitlichen Beschreibung ergäbe. Eine so einfache Beschreibung wie die durch Standardfronten ist hier jedoch nicht möglich, da die Fronten nach dem Stoß im allgemeinen nicht mehr stark sind.

*S. v. Hoerner.*

**Howard, L. N. and D. L. Matthews:** On the vortices produced in shock diffraction. *J. appl. Phys.* **27**, 223—231 (1956).

Es wurde der durch Brechung eines Verdichtungsstoßes an einem senkrecht zur Strömung stehenden Keil erzeugte Wirbel experimentell und theoretisch untersucht. Zur Deutung der versuchsmäßig durch Interferenz-Aufnahmen gefundenen Ergebnisse wurde eine für den zentralen Teil des Wirbels geltende Theorie entwickelt. Bei dieser wurde angenommen, daß sich die Strömung gleichmäßig mit der Zeit verändert (pseudo-stationäre Strömung) und symmetrisch bezüglich des Wirbel-Mittelpunktes ist. Die Entropie wurde als konstant vorausgesetzt. — Die Versuche zeigen eine wohlausgebildete, spiralförmige Unstetigkeitsfläche, die sich von der Ecke des Keils aus aufrollt. Im Inneren dieses Gebietes ist die erwähnte Theorie nach Anpassung einer Integrationskonstanten in guter Übereinstimmung mit den Beobach-

tungen. Hinsichtlich des Wachstums des Wirbels wurde eine halbempirische Theorie von Rott als bestätigt gefunden.

*J. Rotta.*

**Guienne, Paul et Fernand Bouniol:** Détermination du champ de vitesses en aval d'un choc détaché. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 1479—1482 (1956).

**Phillips, O. M.:** On the aerodynamic surface sound from a plane turbulent boundary layer. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 234, 327—335 (1956).

Statt durch Körperschwingungen in einem kompressiblen Medium kann man Schall auch durch die Wirbel in der turbulenten Strömung an einer feststehenden Oberfläche erzeugen. Die Energie dieses „aerodynamischen Oberflächenschalls“ entspricht bei Abwesenheit einer festen Oberfläche einer Verteilung akustischer Vierpole, bei Anwesenheit einer solchen dagegen einer Dipolverteilung. Als Beispiel wird der aerodynamische Oberflächenschall von einer halbumendlich ausgedehnten ebenen Platte behandelt.

*J. Pretsch.*

**Kästner, Siegfried:** Das Reflexionsvermögen und die Durchlässigkeit eines Schichtsystems visko-elastischer Medien bei Einfall einer ebenen Schallwelle unter beliebigem Winkel. Ann. der Physik, VI. F. 18, 190—219 (1956).

In questo lavoro si studia la propagazione, per angolo generico di incidenza, di onde piane in un mezzo elastico viscoso lineare indefinito formato da un numero finito, ma arbitrario, di strati piani e paralleli. Con ciò, completando e generalizzando precedenti ricerche, o limitate ad un solo strato, o a mezzi perfettamente elastici, o ad incidenza ortogonale [Cfr. ad es. Zbl. 52, 218 e Y. Torikai, J. Phys. Soc. Jap. 8, 234 (1953)]. Nel problema attuale riesce particolarmente utile il calcolo delle matrici. La soluzione generale si presenta come sovrapposizione di onde di condensazione e di onde di distorsione attenuate. L'intervento, per ciascun strato, di una conveniente matrice consente di esprimere subito le componenti dello stress relativo alla normale comune a tutti gli strati e le componenti dello spostamento in funzione delle costanti di attenuazione e di fase, e del vettore di propagazione. Inoltre, un processo iterativo consente di esprimere tali grandezze relative alla faccia destra dell' $n$ -mo strato in funzione delle stesse grandezze calcolate sulla faccia sinistra del primo strato. Di ciò vien data applicazione alle onde riflesse e trasmesse dall'intero sistema.

*T. Manacorda.*

**Longuet-Higgins, M. S.:** The refraction of sea waves in shallow water. J. Fluid Mechanics 1, 163—176 (1956).

Geschwindigkeit und Wellenlänge von kurzkämmigen Meereswellen nehmen durch Brechung beim Eintritt in Seichtwasser ab. Wellenzüge gleicher Wellenlänge, aber verschiedener Richtung erfahren eine Kollimation; Wellenzüge in gleicher Richtung, aber verschiedener Wellenlänge dagegen werden wie weißes Licht im Prisma getrennt. Wenn langkämmiger Schwall (von einem fernen Orkan) und kurzkämmige Wellen zusammentreffen, werden die langen Wellen mehr verstärkt als die kurzen, wodurch die mittlere Kammlänge vergrößert wird. Behandelt werden ein einfacher Wellenzug, zwei langkämmige Wellenzüge und ein Frequenzspektrum.

*J. Pretsch.*

**Dantzig, D. van:** Einige Beispiele für die Berechnung der Wasserbewegung unter dem Einfluß von Wind. Nederl. Akad. Wet., Verslag Afd. Natuurk. 65, 39—44 (1956) [Holländisch].

**Tchen, Chan-Mou:** Stability of oscillations of superposed fluids. J. appl. Phys. 27, 760—767 (1956).

Zwei nicht mischbare schwere Flüssigkeiten, inkompressibel mit verschiedener Dichte und Zähigkeit, sind übereinander geschichtet. Bis auf eine kleine Störbewegung befinden sie sich in Ruhe; diese Störbewegung wird als Partialschwingung einer Fourierreihe angenommen, so daß die Orr-Sommerfeldsche Gleichung die Bewegung in den beiden Schichten beschreibt. Die Erfüllung der gestellten Randbedingungen führt auf die Forderung, daß die Determinante der Koeffizienten der allgemeinen Lösungen Null sein muß. Daraus ergeben sich mit Hilfe verschiedener



Approximationen die Zusammenhänge zwischen Dämpfung, Wellenlänge, Oberflächenspannung usf., die in graphischen Darstellungen angegeben sind.

*G. Hämmerlin.*

**Becker, E.:** Die pulsierende Quelle unter der freien Oberfläche eines Stromes endlicher Tiefe. *Ingenieur-Archiv* **24**, 69—76 (1956).

Das Strömungspotential für die in einer Strömung endlicher Tiefe pulsierende Quelle wird aufgebaut aus einem Potential freier Wellen, welche Energie nur dann stromauf tragen, wenn ihre Gruppengeschwindigkeit größer als die Strömungsgeschwindigkeit ist, aus dem Potential einer Quell-Senken-Anordnung, welche nicht zur Verformung der Flüssigkeitsoberfläche beiträgt, und einem Zusatzpotential. Oberhalb eines Grenzwertes für das Produkt aus Pulsationsfrequenz und Strömungsgeschwindigkeit verschwindet der von der Quelle stromauf gesandte Wellenzug. Grenzfälle des Problems sind die in ruhender Flüssigkeit pulsierende Quelle und die Strömung unendlicher Tiefe, die Holstein [*Z. angew. Math. Phys.* **17**, 38—47 (1937)] untersucht hat.

*J. Pretsch.*

**Robinson, R. B. and R. H. Buchanan:** Undamped free pulsations of an ideal bubble. *Proc. Phys. Soc., Sect. B* **69**, 893—900 (1956).

● **Pascal, Blaise:** *Traité de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air.* (Les Maîtres de la Pensée Scientifique.) Reproduction en fac-similé de l'édition de 1819. Paris: Gauthier-Villars 1956. XXVII, 106 p. 800 fr.

**Taylor, G. I. and J. C. P. Miller:** Fluid flow between porous rollers. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **9**, 129—135 (1956).

**Crausse, Étienne et Yves Poirier:** Sur l'étude analogique d'infiltrations en milieux poreux anisotropes par la méthode du papier conducteur. *C. r. Acad. Sci., Paris* **243**, 475—477 (1956).

**Escande, Léopold et Jean Dialinas:** Méthode analytique pour le calcul des chambres d'équilibre déversantes avec apport de débit au-dessous de l'étranglement. *C. r. Acad. Sci., Paris* **243**, 461—463 (1956).

**Gruat, Jean:** Étude par analogie électrique des cheminées d'équilibre à section constante et à étranglement avec débit d'apport. *C. r. Acad. Sci., Paris* **243**, 562—564 (1956).

**Pilatovskij (Pilatovsky), V. P.:** On the use of certain contour integrals in problems concerned with the pressure percolation of an incompressible fluid to wells. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **110**, 742—745 (1956) [Russisch].

**Michajlov (Mikhailov), G. K.:** The rigorous solution of the problem of ground water flow from a horizontal stratum into a basin with a heavier liquid. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **110**, 945—948 (1956) [Russisch].

**Persen, Leif N.:** Einiges über die Grundlage der Berechnung von Wasserschlossern. *Z. angew. Math. Mech.* **36**, 305—306 (1956).

**Éfros (Efros), D. A.:** The method of viscosity likeness in determining the maximum water-free and gas-free discharges of imperfect oil wells. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **110**, 527—530 (1956) [Russisch].

**Éfros (Efros), D. A.:** The determination of relative permeabilities and distribution functions when oil is displaced by water. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **110**, 746—749 (1956) [Russisch].

## Wärmelehre:

● **Sommerfeld, Arnold:** *Thermodynamics and statistical mechanics. Lectures on theoretical physics. Vol. V.* Translated by J. Kestin. New York: Academic Press, Inc. 1956. XVIII, 401 p. \$ 7,00.

Vgl. die Besprechung des deutschen Originals in dies. Zbl. **49**, 260.

**Klein, Martin J.:** Entropy and the Ehrenfest urn model. *Physica* **22**, 569—575 (1956).

Suppose  $2R$  distinguishable balls are distributed over two urns. If one does not distinguish between the balls, and  $P_m$  is the probability of finding  $R + m$  balls in one urn, then this state can be realised in

$$G_m = (2R)! / (R+m)! (R-m)!$$

different ways. Entropies may then be defined by

$$S_B = k \ln G_m, \quad S_G = -k \sum_{m=-R}^R P_m \ln (P_m / G_m)$$

in the Boltzmann and Gibbs sense respectively.  $S_B$  approaches equilibrium in spite of fluctuations during this process and after equilibrium has been attained.  $S_G$  attains its limiting value monotonically, and both limiting values are  $2kR \ln 2$  if  $R \gg 1$ . This summarises the main points made in this paper. The reviewer would regard  $S_G$  as a satisfactory definition of entropy,  $S_B$  being a special case.

*P. T. Landsberg.*

**Lurçat, François:** Sur la définition, en mécanique statistique, de l'entropie des états de non-équilibre. *C. r. Acad. Sci., Paris* **242**, 1686—1688 (1956).

Für die Entropie von Teilchen mit Spin wird der J. v. Neumannsche Ausdruck  $S = -k \cdot \text{Spur} (\varrho \cdot \log \varrho)$  ( $\varrho$  = Spin-Matrizen) mit abweichenden vorgeschlagenen Definitionen verglichen; Unabhängigkeit von Basisvektoren, Zunahme bei gewissen Prozessen.

*D. Morgenstern.*

**Fierz, M.:** Über die statistischen Schwankungen in einem kondensierenden System. *Helvet. phys. Acta* **29**, 47—54 (1956).

It is suggested that the grand canonical ensemble is suitable for a discussion of the fluctuations in the number of particles of a condensing system. It is merely necessary to treat the vapour only (i. e. the uncondensed part of the system only) according to the grand canonical ensemble. The condensed part of the system is to be regarded as a particle reservoir. Thus the fluctuations in the particle reservoir are governed by the fluctuations in the vapour. Examples discussed are: the ideal Bose-Einstein gas and the spherical model of a ferromagnet.

*P. T. Landsberg.*

**Jancel, Raymond:** Sur le théorème  $H$  en mécanique quantique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **242**, 1268—1270 (1956).

The author defines operators corresponding to von Neumann's macro-observables and a coarse grained density matrix in the standard way. If a macroscopic observation is made at  $t = 0$ , when the Boltzmann  $H$  has value  $H(0)$ , then at a time  $t$   $H$  has value  $H(t)$  and the author shows  $H(0) \geq H(t)$ . This holds only for short times  $t$  and only minor changes are called for in the standard proof for fine-grained probability densities.

*P. T. Landsberg.*

**Peretti, Jean:** Définition et méthode de calcul de la fonction de répartition statistique attachée à une grandeur physique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **242**, 1416—1417 (1956).

Es wird darauf hingewiesen, daß zur Berechnung der in der quantenmechanischen Thermodynamik auftretenden Belegungsfunktion, die durch  $E(f(X)) = \int f(x) g(x) dx$  für alle  $f$  definiert ist, zweckmäßig eine Integraltransformation wie die Fouriersche oder die Hilbertsche verwendet werden kann.

*D. Morgenstern.*

**Kümmel, Hermann:** Irreversibilität und Quantentheorie. *Z. Naturforsch.* **11a**, 15—20 (1956).

This is one of a sequence of papers on the microscopic foundations of statistical mechanics and irreversible thermodynamics. In this paper it is shown how the Onsager reciprocity relations of irreversible thermodynamics may be derived from the author's probability density in  $(p, q)$  phase space. Literature: G. Ludwig, *Z. Phys.* **135**, 483 (1953); Verf., *Nuovo Cimento*, X. Ser. **1**, 1057, **2**, 877 (1955), **3**, 870 (1956); *Z. Phys.* **143**, 219 (1956).

*P. T. Landsberg.*

Green, H. S.: Molecular theory of irreversible processes in fluids. Proc. phys. Soc., Sect. B 69, 269—280 (1956).

Mit Hilfe eines neueingeführten Satzes von Verteilungsfunktionen werden Ausdrücke für Wärmeleitung und Impulstransport angegeben, die den Spezialfall der Gase mitenthalten. Von der mit Hilfe der neuen Verteilungsfunktionen definierten Entropie wird gezeigt, daß sie im Gleichgewicht mit der thermodynamischen Entropie identisch ist; außerhalb des Gleichgewichts gilt für sie ein  $H$ -Theorem. *H. G. Reik.*

Lessen, M.: Note on the symmetrical property of the thermal conductivity tensor. Quart. appl. Math. 14, 208—209 (1956).

Kolodner, I. I.: Free boundary problem for the heat equation with applications to problems of change of phase. I. General method of solution. Commun. pure appl. Math. 9, 1—31 (1956).

L'A. risolve il noto problema (unidimensionale) della determinazione dello stato termico in un mezzo in cui sono presenti due fasi, essendo mobile ed incognita la linea di separazione tra queste (problema di Stefan: cfr. G. Sestini, questo Zbl). 48, 434; 49, 264). L'essere incognita una parte della frontiera del dominio  $D$  del piano  $x, t$  ( $0 \leq t \leq T$ ), in cui deve determinarsi la incognita temperatura  $u(x, t)$ , complica notevolmente la risoluzione del problema, che, in generale, viene conseguita (cfr. ad es. G. Sestini loc. cit.) stabilendo una relazione funzionale tra l'incognita temperatura  $u(x, t)$  e l'incognita linea di demarcazione tra le due fasi, all'istante  $t$ ,  $x = x(t)$ . L'A., facendo uso dei noti integrali di Holmgren, analoghi a quelli del potenziale di semplice o doppio strato, riesce a costruire una equazione funzionale per la  $x(t)$  e, ciò che è più importante, a dimostrare tre teoremi di riducibilità del problema di Stefan unidimensionale alla soluzione della equazione funzionale stabilita per la  $x(t)$ . Un gruppo di applicazioni in parte note completa la Nota. Al recensore sembra che l'importanza di questa interessante ricerca vada ricercata più nel modo di costruire il funzionale ausiliario nella sola  $x(t)$  che non nella effettiva risoluzione del problema, in quanto, per la determinazione della  $x(t)$  dalla equazione integro-differenziale non lineare, si dovrà ricorrere al classico metodo costruttivo delle approssimazioni successive, già usato in altri precedenti lavori sull'argomento. *G. Sestini.*

Fieber, H.: Über das Temperaturfeld in längs einer Richtung bewegten und zeitlich veränderlichen Bereichen. Österreich. Ingenieur-Arch. 10, 155—160 (1956).

Das Wärmeleitproblem, wie es etwa bei einer Strangpresse auftritt, wird durch Heranziehung eines inhomogenen Problems auf die Auflösung einer Volterraschen Integralgleichung 1. Art zurückgeführt. Dies gelingt durch Einführung einer, aus der Übergangsbedingung nachträglich zu bestimmenden, zeitlich veränderlichen Quellverteilung  $Q$  längs der Stirnfläche des Stranges. Näherungsweise ergibt sich  $Q$  als Stufenfunktion aus einem linearen Gleichungssystem mit Dreiecksmatrix. *F. Selig.*

Fieber, H. und F. Selig: Temperaturfelder in endlichen Körpern bei bewegten Wärmequellen. Österreich. Ingenieur-Arch. 10, 96—103 (1956).

L'A. estende a campi finiti un metodo di Sneddon (questo Zbl. 38, 268) per determinare la distribuzione della temperatura in un mezzo nel quale siano presenti sorgenti di calore mobili, mostrandone la sua correlazione con la determinazione della funzione di Green, relativa agli analoghi problemi di conduzione del calore. Il metodo si giova della ripetuta applicazione di opportune trasformazioni di Fourier, relative ad intervalli finiti, e viene applicato alla risoluzione di assai generali problemi relativi: 1. alla piastra rettangolare di spessore finito (in coordinate cartesiane limitata dai piani  $x = \pm L_1$ ,  $y = \pm L_2$ ,  $z = \pm L_3$ ), nella quale una distribuzione di sorgenti si muova con velocità costante lungo l'asse delle  $y$  da  $-L_2 a + L_2$ ; 2. al cilindro cavo finito (in coordinate cilindriche limitato dalle superficie  $r = R_1$ ,  $r = R_2$ ,  $z = \pm L$ ,  $R_1 < R_2$ ) nel quale una distribuzione di sorgenti si muova con velocità costante o lungo una generatrice della superficie esterna  $r = R_2$  o lungo



la circonferenza  $r = R_2$ ,  $z = 0$ . Un esempio numerico è illustrato per il caso dell'anello circolare sottile.

*G. Sestini.*

**Jaeger, J. C.:** Numerical values for the temperature in radial heat flow. *J. Math. Physics* **34**, 316—321 (1956).

Si valuta numericamente la temperatura in una regione esterna ad un cilindro di raggio  $a$ , pensata occupata da un mezzo omogeneo e termicamente isotropo, avente temperatura nulla per  $t = 0$  e temperatura unitaria per  $r = a$  e  $t > 0$ . In dipendenza dei valori del tempo  $\tau$  e della distanza  $R$  dall'asse del cilindro viene tabellato l'integrale che esprime la soluzione del problema, facendo uso per piccoli valori di  $\tau$  (minore di 0.3) di una espressione dell'integrale mediante gli integrali iterati della funzione degli errori e, per  $\tau$  più grandi (minore 10), delle espressioni in serie delle funzioni cilindriche, che compaiono nell'integrale. I casi  $\tau > 10$  ed  $R$  non troppo grande e quello di  $R$  molto grande si possono ricondurre a quelli sopra accennati. I valori numerici sono ottenuti con tre cifre decimali rispettivamente per  $0.001 \leq \tau \leq 1000$  e  $1 \leq R \leq 2$ ;  $0.1 \leq \tau \leq 1000$  e  $2 \leq R \leq 10$ ;  $10 \leq \tau \leq 1000$  e  $10 \leq R \leq 100$ .

*G. Sestini.*

**Atalla, M. M. and K. Preston jr.:** Transient temperature rise in a semi-infinite solid due to a uniform disk source. *J. appl. Mech.* **23**, 313—314 (1956).

**Destable, Pierre:** Contribution à l'étude de la répartition des températures et des pertes de chaleur dans le sol en régime permanent. *C. r. Acad. Sci., Paris* **243**, 28—30 (1956).

**Muncey, R. W.:** Calculation of heat flows and temperatures in slabs in series, parallel and series-parallel. *Appl. sci. Research, A* **5**, 461—462 (1956).

La relazione di Van Gorcum e Vodicka fra le temperature e i flussi di calore (supposti sinoidali) sulle due facce di un muro omogeneo, sono estese al caso in cui il muro sia formato da strati diversi disposti in parallelo.

*D. Graffi.*

**Parkus, H.:** Periodisches Temperaturfeld im Keil. *Österreich. Ingenieur-Arch.* **10**, 241—243 (1956).

Die Temperaturverteilung im unendlichen Keil wird berechnet, wenn ein Schenkel auf konstanter Temperatur gehalten und dem zweiten Schenkel eine periodisch veränderliche Temperatur aufgebracht wird.

*Zusammenfassg. des Autors.*

**Goldenberg, H.:** Some numerical evaluations of heat flow in the region bounded internally by a circular cylinder. *Proc. phys. Soc., Sect. B* **69**, 256—260 (1956).

Si valuta numericamente l'integrale:

$$\int_0^{\infty} \exp(-D u^2 t) \frac{J_0(ur) Y_0(ua) - Y_0(ur) J_0(ua)}{J_0^2(au) + Y_0^2(au)} \frac{du}{u},$$

che esprime la temperatura in un problema di flusso radiale di calore, in un mezzo omogeneo e termicamente isotropo, esterno ad un cilindro di raggio  $a$ , la cui superficie è tenuta a temperatura costante  $V$ , essendo nulla la temperatura iniziale del mezzo. Lo scopo è raggiunto riconducendo l'integrale a funzioni tabellate e ad un altro integrale, tra limiti finiti, più agevolmente tabellabile, sfruttando che  $\exp(-y^2 T)$  è rapidamente decrescente con  $y$  e che si ha:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \{J_0(y) Y_0(\lambda y) - Y_0(y) J_0(\lambda y)\} = \frac{2}{\pi} \log \lambda.$$

*G. Sestini.*

**Selig, F.:** Bemerkungen zum Stefanschen Problem. *Österreich. Ingenieur-Arch.* **10**, 277—280 (1956).

L'A. risolve il classico problema di Stefan sulla velocità di formazione del ghiaccio, nel caso unidimensionale e nell'ipotesi che la temperatura assegnata per  $x = 0$  sia funzione del tempo. La risoluzione è ottenuta trasformando il problema con un limite variabile in altro relativo alla sbarra seminfinita, mediante l'introduzione di una sorgente mobile di portata variabile conveniente. La relazione funzionale, che lega, in un certo istante  $t$ , la temperatura  $\varphi(t)$  per  $x = 0$ , la posizione  $x_1(t)$  e la velocità  $\dot{x}_1(t)$  di avanzamento della sorgente (che coincide con la posi-

zione e la velocità di avanzamento del fronte di separazione tra le due fasi, acqua e ghiaccio, nel problema primitivo), permette di determinare la  $x_1(t)$  (e quindi la  $\dot{x}_1(t)$ ) assegnata  $\varphi(t)$ , ovvero, assegnata la  $\dot{x}_1(t)$ , la  $\varphi(t)$ .  
G. Sestini.

### Elektrodynamik. Optik:

Ashour, A. A.: Note on the problem of the electrified disc. Proc. Edinburgh math. Soc. **10**, 123—124 (1956).

Si determina, mediante l'uso delle coordinate sferoidali, l'elettrizzazione di un disco conduttore con potenziale assegnato e sottoposto ad un campo elettrostatico.

D. Graffi.

● Schäffer, Juan Jorge: Contributions to the theory of electrical circuits with non-linear elements. Thesis. 93 S. Assen: Van Gorcum & Comp. N. V.-G. A. Hak & Dr. H. J. Prakke 1956.

Verf. untersucht das qualitative Verhalten nichtlinearer Netze mit vielen Freiheitsgraden. Dabei wird besonderer Wert darauf gelegt, daß mehrere periodische Quellen beliebiger Frequenzen auftreten dürfen, was für die Untersuchung der Modulation und gewisser Verstärkungsprobleme wichtig ist. Es handelt sich daher um das mathematische Problem, nichtlineare Systeme von vielen Freiheitsgraden zu behandeln, deren Glieder fastperiodische Funktionen der Zeit sind. Im Anschluß an zwei Untersuchungen von Reuter (dies. Zbl. **42**, 94; **43**, 90) gelingt es dem Verf., mathematisch streng die Beschränktheit des elektrischen Systems zu beweisen.

W. Haacke.

Chambers, L. G.: Propagation in a gyrational medium. Quart. J. Mech. appl. Math. **9**, 360—370 (1956).

Der Verf. diskutiert die elektromagnetischen Eigenschaften eines Mediums der Beziehungen

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} + \xi \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{B} = \zeta \mathfrak{E} + \mu \mathfrak{H}$$

und zeigt, daß ein solches doppelbrechend ist. Außerdem erörtert er Integralformen der Maxwellschen Gleichungen.

P. Urban.

Wait, James R.: Transient fields of a vertical dipole over a homogeneous curved ground. Canadian J. Phys. **34**, 27—35 (1956).

In den letzten Jahren sind an mehreren Stellen Berechnungen darüber angestellt worden, wie das Einschwingen des stationären Strahlungsfeldes etwa eines vertikalen Dipols oberhalb des Erdkörpers vor sich geht. Im vorliegenden Fall wird dabei die Erdoberfläche als leicht kugelförmig gekrümmt und der Erdkörper selbst als leitend angesehen. Den Ausgangspunkt der Rechnungen bildet das Feld im eingeschwungenen Zustand, wobei eine besondere, von Bremmer hergeleitete, aber nur näherungsweise richtige Formel benutzt wird. Die Rechnungen zeigen, daß der zeitliche Ablauf des Einschwingvorganges wesentlich bestimmt wird von der Leitfähigkeit des Bodens.

H. Buchholz.

Wait, James R. and K. Okashimo: Patterns of stub antennas on cylindrical structures. Canadian J. Phys. **34**, 190—202 (1956).

Die Arbeit enthält einige theoretisch berechnete Strahlungsdiagramme von elektrischen Dipolen, die auf der Oberfläche eines unendlich langen, vollkommen leitenden Zylinders angeordnet sind. Im einfachsten Fall steht der Zylinder isoliert für sich allein im Raum. In anderen Fällen bildet er sozusagen die Abrundung der Kante eines Keils oder einer Halbebene, oder es sitzt ein Halbzylinder mit der Wölbung nach oben in einer leitenden Ebene. Bildet die Keilkante die  $z$ -Achse eines Zylinderkoordinaten-Systems, so füllt der Zylinder den Raumteil  $\varrho \leq a$  aus. Der elektrische Dipol, von dem oben die Rede ist, ist auf dem Zylinder am Ort  $(a, \pi/2, 0)$  angeordnet. Er vertritt die Kuppenantenne (stub antennae). Sitzt der elektrische Dipol am Orte  $(a, \pi/2, 0)$  auf der Oberfläche eines freistehenden Zylinders, so ist das

Strahlungsfeld in der Ebene  $z = 0$  eben polarisiert und das elektrische Feld hat nur eine Komponente, die proportional der Größe

$$T(\varphi) = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} e^{\pi i \lambda / 2} \cdot \lambda \cdot \sin \lambda (\varphi - \pi/2) / (d H_{\lambda}^{(2)}(\alpha) / d\alpha) \quad (\alpha = \pi \cdot 2a/\lambda)$$

ist. In anderen Fällen ist die entsprechende Beziehung verwickelter. Diese Funktion  $T(\varphi)$  wurde im vorliegenden Falle mit einer Ferranti-Rechenmaschine für die Werte  $D/\lambda = 0,063; 0,25; 0,67; 1,83$  und  $3,08$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  berechnet mit  $D = 2a$ . In einem mathematischen Anhang werden die für  $E_z$  und  $H_z$  nötigen Formeln hergeleitet. Dabei wird die Methode der Greenschen Funktion benutzt.

*H. Buchholz.*

**Wong, J. Y.: On the theory of a coaxial transmission line consisting of elliptic conductors.** Canadian J. Phys. **34**, 354—361 (1956).

Es werden die Beziehungen für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in dem Raum zwischen zwei vollkommen leitenden, konfokalen, elliptischen Zylindern unendlicher Länge hergeleitet. Die das Problem beherrschende Funktion ist die Mathieusche Funktion. Es existieren die ungedämpfte Hauptwelle und sehr stark gedämpfte Wellentypen höherer Ordnung, für deren Fortpflanzung konstante Formeln angegeben werden. Besondere Bedeutung kommt dem Grenzfall zu, in dem der innere Leiter zu einem Bandleiter entartet.

*H. Buchholz.*

**Helfenstein, Heinz G.: Graphical determination of a discontinuity surface by wave reflection.** Quart. appl. Math. **14**, 93—97 (1956).

**Karp, S. N. and A. Russek: Diffraction by a wide slit.** J. appl. Phys. **27**, 886—894 (1956).

Es wird ein einfacher und leicht berechenbarer Ausdruck angegeben für das durch einen unbegrenzten Spalt in einer leitenden Ebene gebeugte Lichtfeld, falls die Wellenlänge größer oder gleich der Spaltbreite ist. Das Feld kann in jedem Punkte genau berechnet werden, indem angenommen wird, daß jede der beiden Halbebenen, die den Schirm bilden, durch das einfallende Lichtfeld erregt wird, und diesen beiden sich überlagernden Lichtfeldern noch ein weiteres überlagert ist, das von einer virtuellen linearen Lichtquelle herzurühren scheint, die mit dem Rande der gegenüberliegenden Halbebene zusammenfällt. Die Stärke dieser linearen Lichtquelle kann in einfacher Weise durch trigonometrische Funktionen und Fresnelsche Integrale ausgedrückt werden, die vom Verhältnis der Spaltbreite zur Wellenlänge abhängen.

*J. Picht.*

**Wolter, Hans: Zur Messung physikalischer Größen mit Hilfe der Farben.** Ann. der Physik, VI. F. **17**, 329—343 (1956).

Es werden die Bedingungen diskutiert und mathematisch eingehend behandelt, die erfüllt sein müssen, um Mittelwert  $J$  der Intensität, Farbton  $\mu$  und Sättigung  $B$  einer vorgelegten Farbe durch Vergleich mit gegebenen „Normalfarben“ eindeutig bestimmen zu können. Diese „Normalfarben“ müssen eine hierfür ausreichende Basis bilden. Die Bedingung dafür wird angegeben. Sie ist erfüllt, wenn die zugehörigen „charakteristischen Zahlen“

$$z_k = [\int b_k(v) \exp(2\pi i a v) dv] / [\int b_k(v) dv]$$

in der Gaußschen Zahlenebene eine Fläche mit von Null verschiedenem Flächeninhalt aufspannen. Dabei sind die  $b_k(v)$  die Basisfarben, mit denen sich die Komponenten  $x_k$  einer Farbe  $f(v)$  nach der Beziehung  $x_k = \int b_k(v) f(v) dv$  mit  $k = 1, 2, \dots, n$  ergeben. Es werden Beispiele ausreichender sowie einer zwar linear unabhängigen, aber nicht ausreichenden Basis mathematisch behandelt. Auf die Berechnung der Normalfarben aus den Komponenten sowie auf die Bedeutung der Determinante, die den Flächeninhalt der von den Basisfarben bestimmten Fläche darstellt, für die Fehlerfortpflanzung wird eingegangen. Weitere mathematische Beziehungen werden abgeleitet und ihre praktische Bedeutung diskutiert.

*J. Picht.*



● Marton, L. (edited by): *Advances in electronics and electron physics*. Vol. VII. New York: Academic Press Inc.; London: Academic Books Ltd., 1956. X, 527-p. \$ 11,50, 92 s.

Logunov, A. A. und Ja. P. Terleckij: Über die Beschleunigung geladener Teilchen durch ein bewegtes magnetisiertes Medium. *Vestnik Moskovsk Univ.* 11, Nr. 3 (Ser. fiz.-mat. estestev. Nauk 2), 63—66 (1956) [Russisch].

Glaser, Walter: Elektronische Abbildung als Eigenwertproblem. Österreich. Ingenieur-Arch. 10, 167—171 (1956).

Die elektronenoptische Abbildung wird als Variationsproblem — mit Bezug auf die paraxiale Elektronenbewegung — bei vorgegebenem Ding- und Bildort betrachtet. Dazu wird eine geeignete Schar von Vergleichskurven zwischen Ding- und Bildort eingeführt, die die elektronenoptische Vergrößerung als Parameter enthalten. Der „Eigenwert“ der Linsenstärke wird als Minimum bezüglich dieses Parameters bestimmt. Dadurch erhält Verf. eine gute Näherungsformel für die Linsenstärke sowie (gleichzeitig) für die Vergrößerung. Beide Kenngrößen können dadurch für ein beliebiges Abbildungsfeld ohne Integration der Differentialgleichung der paraxialen Elektronenbahnen angegeben werden.

*J. Picht.*

Grümm, H.: Abbildung von Oberflächen durch reflektierte Elektronen. Österreich. Ingenieur-Arch. 10, 75—80 (1956).

Theorie der elektronenmikroskopischen Reflexionsabbildung massiver Oberflächen. Nach einer paraxialen Theorie der Abbildung einer nicht zur Symmetriechse des Linsensystems senkrechten Dingenbene auf eine ebenfalls gegen die Achse geneigte Bildebene folgt eine Berechnung der dabei auftretenden paraxialen Farbfehler und der Bildfehler dritter Ordnung, von denen nur die Astigmatismus- und Verzeichnungskoeffizienten von den entsprechenden Koeffizienten bei der Abbildung achsensenkrechter Ebenen aufeinander abweichen.

*F. Lenz.*

Whitmer, Romayne F.: Investigation of nonrotationally symmetrical electrostatic electron optical lenses. *J. appl. Phys.* 27, 808—815 (1956).

Die paraxialen Elektronenbahnen in elektrostatischen Potentialfeldern  $\Phi(r, \varphi, z)$ , deren Symmetrieeigenschaften eine Reihenentwicklung der Form  $\Phi(r, \varphi, z) = \sum_m \sum_k f_{km}(z) r^{2k} \cos 2m\varphi$  zulassen, werden berechnet. Da wegen der Gültigkeit der Potentialgleichung die  $f_{km}(z)$  für  $k \neq m$  durch Differentiation eindeutig aus den  $f_{mm}$  folgen, sind nur diese frei wählbar. Der rotationssymmetrische Feldanteil  $f_{00}(z)$  und der zweizählige Feldanteil  $f_{11}(z)$  können so aufeinander abgestimmt werden, daß die Bildfehler erster Ordnung verschwinden. Durch geeignete Wahl des vierzähligen Feldanteils  $f_{12}(z)$  kann der Öffnungsfehler verringert werden.

*F. Lenz.*

Grümm, H. und H. Spurny: Ein analytisches Modell für elektronenoptische Ablenkfelder. Österreich. Ingenieur-Arch. 10, 104—106 (1956).

In demjenigen ebenen elektrostatischen Potentialfeld  $\mathfrak{E}(y, z)$ , das durch  $E_y(0, z) = E_0 c \hbar^{-2} z/h$ ;  $E_z(0, z) = 0$  bestimmt ist, ist eine strenge Berechnung der paraxialen (d. h. der in der Nähe der Ebene  $y = 0$  verlaufenden) Trajektorien und von elf der dreizehn Bildfehlerintegrale möglich. In entsprechender Weise gelingt die Bahn- und Bildfehlerberechnung für das ebene Magnetfeld  $\mathfrak{B}(y, z)$ , das durch  $B_y(0, z) = 0$ ;  $B_z(0, z) = B_0 c \hbar^{-2} z/h$  und die Beziehung  $\text{div } \mathfrak{B} = 0$  bestimmt ist.

*F. Lenz.*

Keller, Joseph B.: Electro-hydrodynamics I. The equilibrium of a charged gas in a container. *J. rat. Mech. Analysis* 5, 715—724 (1956).

In einem Gefäß mit leitenden Wänden wird der Gleichgewichts-Zustand eines gleichförmig elektrisch geladenen Gases (Elektronengas) makroskopisch untersucht. Es zeigt sich, daß es für jedes Gefäß und jede Gasmenge genau einen Gleichgewichtszustand gibt. An der Gefäßwand haben Dichte und Druck ihr Maximum und sind beide konstant längs der Wand. Das Hauptergebnis besteht darin, daß Druck und

Dichte im Inneren des Gefäßes gegen einen endlichen Wert streben, wenn die Masse des eingeschlossenen Gases gegen Unendlich geht. Nur direkt an der Wand gehen Dichte und Druck auch nach Unendlich.  
S. v. Hoerner.

**Infeld, L. and J. Plebański:** A simple derivation of the equations of motion in classical electrodynamics. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 4, 347—351 (1956).

Es handelt sich um die Bewegung einer mit einer mechanischen Masse  $m^{\text{mech}}$  behafteten Punktladung unter den Voraussetzungen von Diracs bekannter Arbeit (dies. Zbl. 23, 427). Die Ableitung geht aus von einer geeigneten Formulierung des Wirkungsprinzips für das System Partikel + Feld und führt die retardierten(!) Potentiale in Form einer Reihenentwicklung nach Potenzen von  $l/c$  ein. Die Be-

wegungsgleichung lautet schließlich in einem System mit  $\dot{\vec{\xi}} = 0$  [die  $\xi^\alpha(s)$  sind die Koordinaten auf der Weltlinie]:  $m^{\text{mech}} \ddot{\xi}^\alpha = e^2 \int d^3x \delta(\vec{x} - \vec{\xi}) \frac{x^\alpha - \xi^\alpha}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^3} -$

$$- \frac{e^2}{c^2} \int d^3x \delta(\vec{x} - \vec{\xi}) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{c^l l!} \left\{ \frac{1}{l+2} \frac{d^{l+2}}{dt^{l+2}} |\vec{x} - \vec{\xi}|^{l-1} (x^\alpha - \xi^\alpha) + \frac{d^{l+1}}{dt^{l+1}} |\vec{x} - \vec{\xi}|^{l-1} \dot{\xi}^\alpha \right\},$$

und die Diskussion kommt darauf hinaus zu zeigen, daß nur die Glieder mit  $l=0$  und  $l=1$  einen Beitrag liefern. Das Glied mit  $l=0$  wird proportional  $\ddot{\xi}^\alpha$  mit einem negativ unendlichen Faktor, der mit  $m^{\text{mech}}$  zu  $m^{\text{exp}}$  vereinigt wird, und das Glied mit  $l=1$  liefert  $2e^2/3c^3 \cdot \ddot{\xi}^\alpha$ . Daraus folgt mit einer Lorentztransformation die allgemeine Gleichung in der bekannten Form.  
W. Wessel.

**Nagy, K.:** Über die Bewegungsgleichung des magnetischen Dipols. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 4, 341—345 (1956).

Die im Titel genannte Bewegungsgleichung wird abgeleitet nach einer neuerdings von Infeld (dies. Zbl. 64, 446) vorgeschlagenen Methode. Sie lautet

$$\frac{d}{d\tau} m u_\alpha = F_\alpha^s + \frac{1}{2} M_{\mu\nu} \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c^2} f_{\alpha\mu} M_{\mu\nu} \dot{u}_\nu - \frac{1}{c^4} u_\alpha M_{\mu\nu} f_{\mu\lambda} u_\lambda \dot{u}_\nu + \frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} M_{\alpha\mu} f_{\mu\nu} u_\nu,$$

wobei  $M_{\mu\nu}$  das Dipolmoment des (spinlosen) Teilchens und  $f_{\mu\nu}$  ein äußeres Feld bezeichnen.  $F_\alpha^s$  ist die (hier nicht ausgerechnete) Eigenkraft. Die Gleichung stimmt mit einer von Mathisson [Proc. Cambridge philos. Soc. 38, 40—60 (1942)] bis auf ein zu  $u_\alpha$  senkrechtes Glied überein.  
W. Wessel.

## Quantentheorie:

**Bodiu, G.:** Sur les correspondances entre bivecteurs et spineurs simples et la description corpusculaire des ondes électromagnétiques. J. Phys. Radium 17, 350—358 (1956).

Une discussion détaillée, en termes spinoriels, de l'idée de „fusion“, aboutissant à une représentation irréductible du photon de L. de Broglie, avec une masse propre identiquement nulle.  
O. Costa de Beauregard.

**Aržanych, I. S.:** Über die relativistische Gleichung der Quantenmechanik. Uspechi mat. Nauk 11, Nr. 5 (71), 234—238 (1956) [Russisch].

**Umezawa, H. and A. Visconti:** Commutation relations and relativistic wave equations. Nuclear Phys. 1, 348—354 (1956).

Les AA. établissent des relations de commutation covariantes pour les particules de spin quelconque fixé, représentées par un champ  $Q(x)$  déterminé par une équation d'ondes générale de la forme

$$(\partial_\mu \partial_\mu + \beta \kappa) Q(x) = 0,$$

dans le cas où ces particules possèdent soit un seul, soit plusieurs états de masse propre. Les résultats antérieurs de S. N. Gupta (ce Zbl. 57, 206) obtenus pour le cas du spin 3/2 sont retrouvés comme cas particulier.  
G. Petiau.

**Mac-Dowell, Samuel Wallace:** Polarization of spin one particles. *Anais Acad. Brasil. Ci.* **28**, 71—81 (1956).

L'A. examine la représentation des états de polarisation des particules de spin 1 en précisant les états purs orthogonaux contenus dans le mélange statistique et les proportions relatives de ces états. Les résultats obtenus généralisent ceux de L. Wolfenstein et J. Ashkin (ce Zbl. **46**, 439). *G. Petiau.*

**Silveira, Adel da:** On the theory of spin-two particles. *Nuovo Cimento, X. Ser.* **3**, 513—516 (1956).

L'A. montre l'existence d'une transformation de jauge dans le cas de l'équation d'ondes des particules de spin 2 et de masse propre zéro. L'A. retrouve le résultat bien connu de l'identité de forme entre l'équation d'ondes des particules de spin 2 et l'équation d'Einstein dans le cas des champs gravifiques faibles. *G. Petiau.*

**Proca, A.:** Sur la mécanique spinorielle du point chargé. *J. Phys. Radium* **17**, 81—82 (1956).

**Proca, A.:** Sur un nouveau principe d'équivalence suggéré par les mécaniques spinorielles. *J. Phys. Radium* **17**, 83—84 (1956).

**Dolph, C. L. and R. K. Ritt:** The Schwinger variational principles for one-dimensional quantum scattering. *Math. Z.* **65**, 309—326 (1956).

Die Verwendung von Variationsverfahren zur Lösung von Streuproblemen wurde in jüngster Zeit erfolgreich durchgeführt. Die vorliegende Arbeit untersucht das Problem der Streuung einer ebenen Welle positiver Energie im eindimensionalen Fall. Die Verff. nehmen ein beschränktes positives Potential an und diskutieren seine Durchlässigkeit. *P. Urban.*

**Bogoljubov (Bogoljubow), N. N. und D. V. (D. W.) Širkov (Schirkow):** Probleme der Quantenfeldtheorie. II. Beseitigung der Divergenzen aus der Streumatrix. *Fortschr. Phys.* **4**, 438—517 (1956).

Vgl. die Besprechung des russ. Originals in dies. Zbl. **65**, 453.

**Bogoljubov, N. N. and D. V. Širkov:** Charge renormalization group in quantum field theory. *Nuovo Cimento, X. Ser.* **3**, 845—863 (1956).

Verff. fangen mit der einfachen Bemerkung an [vgl. Stückelberg u. Petermann, *Helvet. phys. Acta.* **26**, 499—520 (1953)], daß die beobachtbaren Folgerungen der Quantenelektrodynamik nicht verändert werden, wenn die Ladung  $e$ , die zwei „Greenschen Funktionen“  $G$  und  $D_{\mu\nu}$  und die „Vertexfunktion“  $\Gamma_\mu$  in der folgenden Weise mit endlichen Zahlen  $z$  und  $z_3$  multipliziert werden

$$G \rightarrow z G, \quad \Gamma_\mu \rightarrow z^{-1} \Gamma_\mu, \quad D_{\mu\nu} \rightarrow z_3 D_{\mu\nu}, \quad e \rightarrow \sqrt{z_3} e.$$

Nach dieser Transformation sind  $G$  und  $D_{\mu\nu}$  nicht mehr bei den Massen des physikalischen Elektrons und Photons zu 1 normiert. Statt dessen haben sie den Wert 1 bei einem anderen Wert  $\lambda^2$  des Quadrats des Energie-Impulsvektors  $\kappa$ . Sie müssen deshalb als Funktionen der drei Veränderlichen  $\kappa^2/\lambda^2$ ,  $m^2/\lambda^2$  und  $e^2$  angesehen werden. Mit Hilfe der oben erwähnten Invarianzeigenschaften erhalten die Verff. Gleichungen für  $G$  und  $D_{\mu\nu}$ . Mit der Definition

$$D_{\mu\nu}\left(\frac{\kappa^2}{\lambda^2}, \frac{m^2}{\lambda^2}, e^2\right) = \frac{1}{i\kappa^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{\kappa_\mu \kappa_\nu}{\kappa^2}\right) d\left(\frac{\kappa^2}{\lambda^2}, \frac{m^2}{\lambda^2}, e^2\right)$$

lautet z. B. die Gleichung für  $d$

$$\frac{\partial}{\partial x} d(x, y, e^2) = \frac{1}{x} d(x, y, e^2) \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} d\left(\xi, \frac{y}{x}, e^2 d(x, y, e^2)\right) \right]_{\xi=1}.$$

Zu dieser Differentialgleichung gehört die „Anfangsbedingung“  $d\left(1, \frac{m^2}{\lambda^2}, e^2\right) = 1$ . Die Verff. erwähnen, daß diese Anfangsbedingung für  $x = 1$  nicht hinreichend ist, um eine Integration der Gleichungen zu erlauben. Statt dessen muß die ganze Funktion  $d(x, y, e^2)$  in einer endlichen Umgebung des Punktes  $x = 1$  und für alle Werte von  $y$  und  $e^2$  bekannt sein. Die Verff. setzen dann voraus, daß die Funktion  $d(x, y, e^2)$



für  $y \rightarrow 0$  einer endlichen Grenze zustrebt. Dies bedeutet physikalisch, daß die Existenz der Funktion in einer Grenze, wo beliebig viele Teilchen mit Hilfe einer endlichen Energie erzeugt werden können, vorausgesetzt wird. An diesem Punkt enthält also das Argument der Verff. keine Verbesserung gegenüber früheren Arbeiten (M. Gell-Mann, F. Low, dies. Zbl. **57**, 214). Schließlich benützen die Verff. die Störungstheorie, um die Anfangswerte der Funktion  $d(x, y, e^2)$  in der Umgebung von  $x = 1$  abzuschätzen. Die in dieser Weise erhaltenen asymptotischen Gleichungen können integriert werden und führen zum gleichen Ergebnis, das früher von Landau und Mitarbeitern erhalten worden ist [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 497—500 (1954), und spätere Arbeiten]. *G. Källén.*

**Blank, V. Z.: Behaviour of the vertex part for high energies.** Doklady Akad. Nauk SSSR **107**, 389—391 (1956) [Russisch].

The method proposed in a previous paper (V. Z. Blank, this Zbl. **65**, 222) is used to study the asymptotic behaviour of the vertex part  $\Gamma(p, q|l)$  for  $|l^2| \gg |p^2|, |q^2| \gg m^2$ . The author starts from the well-known expression of the vertex part through the functional derivative of the Green's function with respect to the external potential, and the corresponding functional derivative equation, which is solved by iteration and the use of a Laplace transformation. The final result is

$$\Gamma_\alpha(p, q|l) = \gamma_\alpha \exp \{ - (e^2/2\pi) \ln |(p q)/p^2| \cdot \ln |(p q)/q^2| \},$$

and coincides with the result obtained by Sudakov [Dissertation, Inst. for Physical Problems, Moscow 1954 — cf. also the later publication — Žurn. eksper. teor. Fiz. **30**, 87 (1956)]. *M. E. Mayer.*

**Heisenberg, Werner: Bemerkungen zur „neuen Tamm-Dancoff-Methode“ in der Quantentheorie der Wellenfelder.** Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math. phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. **1956**, 27—36 (1956).

In einem System mit einem einzigen Spinorfeld  $\psi_\alpha(x)$  können die Zustandsvektoren  $|\Phi\rangle$  in zwei verschiedenen Weisen beschrieben werden. Entweder können die Funktionen  $\tau(x_1, x_2, \dots | y_1, y_2, \dots)$ , die aus

$$\tau(x_1, x_2, \dots | y_1, y_2, \dots) = \langle \Phi | T \psi(x_1) \psi(x_2) \cdots \psi^+(y_1) \psi^+(y_2) \cdots | \Omega \rangle,$$

$|\Omega\rangle =$  physikalisches Vakuum, definiert sind, benützt werden, oder es ist möglich, die Funktionen  $\sigma(x, \dots | y, \dots)$  in der Entwicklung

$$|\Phi\rangle = \left\{ \int dx \sigma(x) \psi(x) + \int dy \sigma(y) \psi^+(y) + \iint \sigma(x_1, x_2) T \psi(x_1) \psi(x_2) dx_1 dx_2 + \cdots \right\} |\Omega\rangle$$

zu gebrauchen. Diese zwei Arten von Funktionen sind in gewissem Sinn den gewöhnlichen Darstellungen eines Vektors mit kontra- und kovarianten Komponenten analog. Das Normierungsintegral des Zustandes kann nämlich als

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = \int \sigma(x) \tau(x) dx + \int \sigma(y) \tau(y) dy + \iint \sigma(x_1, x_2) \tau(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \cdots$$

geschrieben werden. Um die Anwendbarkeit dieser Funktionen, und vor allem um eine Fehlerabschätzung zu machen, wenn alle Funktionen mit mehr als einer gewissen Zahl von Veränderlichen vernachlässigt werden, studiert der Verf. das Beispiel des anharmonischen Oszillators  $\ddot{q} = -\omega^2 q - \lambda q^3$ . Die folgenden Tatsachen werden explizit gezeigt: 1. Wenn das Glied  $\lambda q^3$  klein ist, ist der Fehler, der gemacht wird, wenn alle  $\sigma$ -Funktionen mit mehr als  $n$  Veränderlichen vernachlässigt werden, von derselben Größenordnung wie der Fehler, wenn alle  $\tau$ -Funktionen mit mehr als  $n$  Veränderlichen vernachlässigt werden. 2. Wenn das Glied proportional  $q$  verschwindet, und wenn nur zwei Funktionen in den obigen Entwicklungen benützt werden, stimmen die Ergebnisse in beiden Fällen mit dem Ergebnis einer numerischen Integration einigermaßen überein. — Mit diesen Ergebnissen als Begründung wird dieselbe Methode dann benützt, um das viel kompliziertere System eines Spinorfeldes, das mit sich selbst in der folgenden Weise

$$\gamma \partial \psi / \partial x + l^2 \psi (\psi^+ \psi) = 0$$

gekoppelt ist, zu behandeln. Der Verf. hat früher vorgeschlagen, daß diese Gleichung als Modell eines Systems von Elementarteilchen betrachtet werden kann. Die zwei ersten  $\tau$ -Funktionen in diesem Modell sind früher von Verf. u. Mitarbeitern [Z. Naturforsch. **10a**, 425—446 (1955)] ausgerechnet worden, und die zwei ersten  $\sigma$ -Funktionen werden in der vorliegenden Arbeit gegeben. Beide Rechnungen sind so gemacht, daß alle höheren Funktionen vernachlässigt worden sind. Das erhaltene Normierungsintegral wird als „Maß für die Materiedichte im Elementarteilchen“ angesehen. Die Dichtefunktion fällt für große Werte von  $r$  sehr schnell ab, hat aber im Nullpunkt eine recht starke Singularität. Es wird vorgeschlagen, daß diese Singularität verschwinden sollte, wenn höhere  $\tau$ - und  $\sigma$ -Funktionen berücksichtigt werden.

*G. Källén.*

**Królikowski, W. and J. Rzewuski:** On „potentials“ in the theory of quantized fields. *Nuovo Cimento*, X. Ser. **3**, 260—275 (1956).

Mit Hilfe der Projektionsoperatoren des Teilraumes, welcher  $N_0$  Teilchen entspricht, und des darauf orthogonalen Teilraumes, reduzieren die Verff. die Schrödingergleichung eines Systems wechselwirkender Felder auf eine Integrodifferentialgleichung für den Zustandsvektor für  $N_0$  Teilchen. Wenn der Vektor für  $N \neq N_0$  Teilchen Null ist, läßt sich die Gleichung auf eine stationäre nichtlineare Eigenwertgleichung reduzieren, deren Kern auch in geschlossener Form angegeben wird. Im zweiten Teil der Arbeit wird die Integrodifferentialgleichung mit Hilfe der Greenschen Funktion in eine Differentialgleichung umgewandelt, welche die Form einer Schrödingergleichung mit komplexem „Potential“ hat. Ferner ergibt sich eine Gleichung, welche, nach Behauptung der Verff., unter anderem, die gebundenen Zustände von  $N_0$  Teilchen beschreiben soll.

*M. E. Mayer.*

**Gotō, Ken-iti:** Quantization of non-linear fields. *Nuovo Cimento*, X. Ser. **3**, 533—550 (1956).

Es wird eine Formulierung der Quantenfeldtheorie in einer „funktionellen“ Darstellung angegeben, in welcher der Zustandsvektor durch ein Funktional der Feldoperatoren, und die kanonischen Impulse durch funktionale Ableitungen dargestellt werden. Die Schrödingergleichung ist eine lineare Funktionaldifferentialgleichung, die mittels formaler Fouriertransformationen der Funktionale behandelt wird. Die Methode wird an Hand folgender Beispiele illustriert: Quantelung des freien elektromagnetischen Feldes, nichtlineare Mesonentheorie vom Schiffischen Typus, hydrodynamisches Feld. Die vom Verf. verwendeten formalen Fouriertransformationen können mit einer vom Ref. angegebenen Methode begründet werden [vgl. M. Mayer, *Revue de Physique* **1**, 147 (1956) u. Diss., Bukarest 1956].

*M. E. Mayer.*

**Minguzzi, A.:** Non-linear effects in the vacuum polarization. *Nuovo Cimento*, X. Ser. **4**, 476—486 (1956).

Schwingers Eigenzeitmethode zur Behandlung der Vakuumpolarisation durch ein vorgeschriebenes elektromagnetisches Feld wird auf ein raumzeitlich konstantes Magnetfeld, dem ein schwaches, beliebig veränderliches Feld überlagert ist, angewandt. Die Lösung ist streng in ihrer Abhängigkeit vom Magnetfeld, während das veränderliche Feld in linearer Näherung berücksichtigt wird.

*K. Baumann.*

**Lomon, Earle L.:** The joining of infra-red and ultra-violet calculations. *Nuclear Phys.* **1**, 101—111 (1956).

Es wird eine Methode angegeben für die simultane Behandlung der Beeinflussung des weichen Photonenfeldes bis zu jeder Ordnung und des harten Photonenfeldes bis zu einer angegebenen Ordnung. Es läßt sich zeigen, daß die höheren Näherungen der Störungsrechnung durch die angegebene Methode ermittelt werden können, wenn die Wirkung des Photonenfeldes im wesentlichen von den weichen Komponenten herrührt.

*J. I. Horváth.*

Lomon, E. L.: A soluble model of meson-nucleon  $S$ -state scattering. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 4, 106—122 (1956).

Die Hamiltonfunktion der Wentzelschen Mesonpaartheorie wird um das Raumintegral über  $\text{const} \times \bar{\psi}_\alpha(x) \pi_i(x) \varphi_k(x) \tau_{ik}^{\alpha\beta} \psi_\beta(x)$  vermehrt. Die räumliche Verteilung des Nukleonenfeldes  $\psi$ , nicht aber dessen Isospin, wird als fest vorgegeben angenommen. Unter diesen Voraussetzungen lassen sich die Eigenwerte exakt bestimmen. Die Diagonalisierung wird schrittweise in den Isospinindizes und im Impulsraum ähnlich einer von Blatt angegebenen Methode ausgeführt.

K. Baumann.

Kalitzin, Nikola St.: Über die Wechselwirkung des Nukleons mit dem Mesonfeld. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* 6, 1—13 (1956).

The interaction between classical nucleon and meson fields is described in a 6-dimensional pseudo-Euclidian space ( $E_6$ ) by

$$(1) \quad [\beta_\mu (\partial/\partial x_\mu - \frac{1}{2} g \beta_\nu \beta_\sigma \varphi_{\mu\nu\sigma}) + m] \psi = 0$$

where  $\psi$  is a spinor of 8 components for the nucleon field and  $\varphi_{\mu\nu\sigma}$  an antisymmetric tensor of the third rank for the meson field.  $\beta_\mu$  are mutually anti-commuting operators represented by 8—8 matrices. The Minkowski space  $E_4(0, 3, 4, 5)$  is reduced from  $E_6$  by putting (2)  $\partial/\partial x_1 = i\omega$ ,  $\partial/\partial x_2 = i\lambda$ . Then the meson mass is given by  $\mu = \sqrt{\omega^2 + \lambda^2}$ , while the nucleon mass is expressed by a parameter  $m$ . The nucleon charge  $g$  is a real quantity, so that the forces between two nucleons as well as those between a nucleon and an anti-nucleon are attractive, as  $g$  is invariant under the charge conjugation. (1) is closely analogous to the equation for electrodynamics  $[\gamma_j (\partial/\partial x_j - i e A_j) + m] \psi = 0$  in  $E_4$ , except for the spin dependent interaction in (1). Therefore, the invariance of the Lagrangian holds, similar to the case of electrodynamics, for the Lorentz, charge conjugate and gauge transformations. The conservation law of the nucleon current is reduced to the Yukawa equation with the aid of (2).

S. Hayakawa.

Sawicki, J.: Note on the nucleon self-action in the classical scalar meson field theory. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* 5, 381—389 (1956).

The nucleon self-force in the classical scalar meson field theory is calculated for the circular nucleon motion with constant speed, putting aside the philosophical meaning of the self-force, as discussed by P. Havas (this Zbl. 47, 213). If both the advanced and retarded forces are taken into account symmetrically, there appears only an inertial force

$$F = -\frac{1}{2} g^2 \beta^2 (\mu/r_0) [1 - \frac{5}{4} \beta^2 + O(\beta^4)] \quad \text{for } \omega_0 \ll \mu c,$$

$$F = -g^2 \beta^2 (1 - \beta^2)^{1/2} \frac{\mu}{r_0} \left[ 1 - \frac{2}{\mu r_0} \int_0^{\mu r_0} dw \int_0^w I_1(2u) du \right] + \frac{g^2}{r_0^2} (1 - \beta^2)^{3/2} \times$$

$$\times \int_0^{\mu r_0} u I_1(2u) du \quad \text{for } \omega_0 \geq \mu c,$$

where  $r_0 = c \beta/\omega_0$  is the radius of the circular motion of a uniform speed  $c$ ,  $\mu$  the reciprocal Compton wave length of meson and  $g$  the mesic charge with the same dimension as the electric charge.  $I_1$  is the Bessel function of the imaginary argument. In the retarded force alone, there arises additional terms which mainly consist of the radiation damping as in the usual electrodynamics. The result is given in a complicated form of series expansion.

S. Hayakawa.

Cini, M. and S. Fubini: General properties of the fixed source meson theory. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 3, 764—771 (1956).

Im Rahmen der Chew-Low-Wickschen Theorie [G. F. Chew u. F. Low, *Phys. Review*, II. Ser. 101, 1570 (1956)] werden aus den algebraischen Eigenschaften der Spin- und Isospinoperatoren drei strenge Summenregeln für die Meson-Nukleon-Amplituden abgeleitet. Die Streuamplituden der Einmeson-näherung, welche zu



den Experimenten bei kleinen Energien passen, befriedigen diese Summenregeln nicht, was im Gegensatz zur allgemeinen Annahme steht, daß der Beitrag hoher Energien klein sei.

*M. E. Mayer.*

● **Ballam, J., V. L. Fitch, T. Fulton, K. Huang, R. R. Rau and S. B. Treiman** (compiled and edited by): **High energy nuclear physics.** Proceedings of the Sixth Annual Rochester Conference, April 3—7, 1956. New York: Interscience Publishers, Inc. 1956.

Tagungsbericht der 6. Rochester-Konferenz. Auf dem Gebiet der Theorie standen im Vordergrund: Pion-Nucleon-Streuung (Bericht von Goldberger über Dispersionsrelationen, Theorie von Chew und Low), die Situation in der Feldtheorie (Bericht von Källén) und die Interpretation der neuen Elementarteilchen (Bericht von Yang).

*G. Höhler.*

**Oehme, Reinhard: Dispersion relations for pion-nucleon scattering. No-spin-flip amplitude.** Phys. Review, II. Ser. **102**, 1174—1180 (1956).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **65**, 411), in welcher Dispersionsformeln für die Ableitung der Amplitude für Streuung mit Spinumkehr nach  $\sin \theta$  bei  $\theta = 0$  hergeleitet worden sind, behandelt Verf. hier Dispersionsformeln für die Ableitungen der „Nichtspinumkehr-Amplituden“ (no-spin-flip) nach  $1 - \cos \theta$  bei  $\theta = 0$ . An Stelle der Amplituden  $F(\omega, \cos \theta)$  werden die mit ihnen für  $\omega \geq \mu$  ( $\mu =$  Mesonenmasse) zusammenfallenden „retardierten“ Amplituden  $M(\omega, \cos \theta)$  und ihre Ableitungen  $M^{(n)}(\omega) = \frac{1}{q^{2n}} \left( \frac{\partial^n M(\omega, \cos \theta)}{\partial (1 - \cos \theta)^n} \right)_{\theta=0}$  betrachtet. Für die erste Ableitung  $M^{(1)}$  kann der Beweis streng durchgeführt werden, daß aus der Kausalitätsforderung

die Darstellung  $M^{(1)}(\omega) = (i\pi)^{-1} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M^{(1)}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$  folgt, wenn man voraussetzt,

daß  $M^{(1)}(\omega)$  quadratintegrabel ist, so daß die Titchmarshschen Sätze über Hilbert-Transformationen angewandt werden können. [Anm. d. Ref. Ähnliche Sätze wurden vor kurzem für Distributionen bewiesen, s. N. N. Bogoljubow und O. S. Parassjuk, Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **109**, 717—719 (1956), so daß die Klasse der zugelassenen  $M$ -Amplituden erheblich erweitert werden kann.] Für höhere Ableitungen ist ein entsprechender Beweis nicht gelungen. Die angegebene Formel läßt sich nicht im allgemeinen in „physikalische“ Dispersionsformeln (d. h. Relationen zwischen Real- und Imaginärteil) umwandeln. Hingegen gelingt es, solche Dispersionsformeln aufzufinden, wenn man den Rückstoß der Nukleonen vernachlässigt. In diesem Falle beweist Verf., daß das Verschwinden des Kommutators der Feldoperatoren für raumartige Intervalle notwendig und hinreichend ist für das

Bestehen der Gleichung  $\bar{M}_{\pi^{\pm}}^{(n)}(\omega) = (\pi i)^{-1} P \int_{-\infty}^{\infty} \bar{M}_{\pi^{\pm}}^{(n)}(\omega') (\omega' - \omega)^{-1} d\omega'$ , wo der

Strich die Vernachlässigung des Rückstoßes anzeigt. Aus dieser Gleichung werden dann folgende „physikalische“ Dispersionsformeln für Realteil  $D^{(n)}(\omega)$  und Imaginärteil  $A^{(n)}(\omega)$  der Funktionen  $\bar{F}^{(n)}(\omega) = (\partial^n F(\omega, \cos \theta) / \partial (1 - \cos \theta)^n)_{\theta=0}$  angegeben

$$\frac{1}{2} (D_{\pi^+}^{(n)}(\omega) + D_{\pi^-}^{(n)}(\omega)) = \frac{2(\omega^2 - \mu^2)^n}{\pi} \cdot P \int_{\mu}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} (A_{\pi^+}^{(n)}(\omega') + A_{\pi^-}^{(n)}(\omega')) \omega'}{(\omega'^2 - \mu^2)^n (\omega'^2 - \omega^2)} d\omega',$$

$$\frac{1}{2} (D_{\pi^+}^{(n)}(\omega) - D_{\pi^-}^{(n)}(\omega)) = \frac{2(\omega^2 - \mu^2)^n}{\pi} P \int_{\mu}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} (A_{\pi^+}^{(n)}(\omega') - A_{\pi^-}^{(n)}(\omega'))}{(\omega'^2 - \mu^2)^n (\omega'^2 - \omega^2)} d\omega' - \delta_{n,1} \frac{2}{\pi} \frac{\omega^2 - \mu^2}{\omega},$$

$$D_{\pi^0}^{(n)}(\omega) = \frac{2(\omega^2 - \mu^2)^n}{\pi} P \int_{\mu}^{\infty} \frac{A_{\pi^0}^{(n)}(\omega') \omega'}{(\omega'^2 - \mu^2)^n (\omega'^2 - \omega^2)} d\omega'.$$

Die hier auftretende Konstante  $f^2$  kann mit der aus früheren Arbeiten bekannten identifiziert werden. Für  $n = 1$  und bei Vernachlässigung aller unelastischen Prozesse führt eine Zerlegung in Zustände mit gegebenem Drehimpuls auf Gleichungen für die  $P$ -Phasenverschiebungen, welche mit den entsprechenden Teilen der Lowschen Gleichungen (vgl. Chew und Low, Phys. Review, II. Ser. **101**, 1570—1579 (1956)) übereinstimmen. Ferner wird gezeigt, daß das Auffinden von Dispersionsformeln für einzelne Drehimpulsamplituden auf die Schwierigkeit stößt, daß im allgemeinen ihre Fouriertransformation für negative „Zeiten“ nicht verschwinden, wenigstens im Falle ruhender Nukleonen.

*M. E. Mayer.*

**Salam, A.: On generalized dispersion relations.** Nuovo Cimento, X. Ser. **3**, 424—429 (1956).

Es wird gezeigt daß für Meson-Nukleon-Streuung eine Dispersionsformel abgeleitet werden kann, welche den Realteil der Streuamplitude im Massenzentrumssystem durch ihren Imaginärteil, bei nicht genau gleichen Winkeln, ausdrückt. Verf. verwendet das „natürliche“ Bezugssystem, in welchem das Nukleon ruht, so daß die Amplituden nur von der Mesonenergie  $k_0$  und vom Nukleonenimpuls  $P$  abhängen. Die Dispersionsformel lautet

$$\frac{D(\alpha, P) - D(\beta, P)}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{2}{\pi} P_\nu \int_0^\infty \frac{k_0 A(k_0, P) dk_0}{(k_0^2 - \alpha^2)(k_0^2 - \beta^2)},$$

wo  $\alpha, \beta, k_0$  Werte der Mesonenergie sind,  $P_\nu$  den Cauchyschen Hauptwert bezeichnet und  $D$  bzw.  $A$  den dispersiven bzw. absorptiven Teil der Amplitude bezeichnen:

$$D(k_0, P) = \frac{1}{2} \int \theta(x) \cos k_0 x_0 \{J_1(P, x) \sin P x_3 + J_2(P, x) \cos P x_3\} \cos(k_1 x_1 + k_2 x_2) d^4 x$$

$$A(k_0, P) = -\frac{1}{2} \int \theta(x) \sin k_0 x_0 \{J_1(P, x) \sin P x_3 + J_2(P, x) \cos P x_3\} \cos(k_1 x_1 + k_2 x_2) d^4 x$$

mit  $J_1(P, x) = (p [j(0), j(x)] | p') - (p' [j(0), j(x)] | p),$

$$J_2(P, x) = i \{ (p [j(0), j(x)] | p') + (p' [j(0), j(x)] | p) \},$$

wo  $j(x)$  der Nukleonenstrom mit Renormierungsterm ist, und  $p$  und  $p'$  sind die Nukleonenimpulse vor und nach dem Stoß. Zum Unterschied von den Dispersionsformeln für Vorwärtsstreuung ist hier der Beitrag des „unphysikalischen“ Gebietes  $(\kappa \mu - P^2)/(P^2 + \kappa^2)^{1/2} \leq k_0 \leq (\mu^2 + P^2)^{1/2}$ , ( $\kappa$  Nukleonenmasse,  $\mu$  Mesonenmasse) nicht Null. Weitere Einzelheiten werden in einer späteren Arbeit, zusammen mit W. Gilbert [Nuovo Cimento X. Ser. **3**, 607—612 (1956)] erörtert. *M. E. Mayer.*

**Caldirola, P.: A new model of classical electron.** Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. **3**, 297—343 (1956).

In dieser Arbeit gibt der Verf. einen Bericht über die Resultate seiner Theorie, welche von ihm [dies. Zbl. **53**, 156; Nuovo Cimento, IX. Ser. **11**, 108—110 (1954); **12**, 699—732 (1954); X. Ser. **1**, 347—350, 742—743 (1955)] und von seinen Mitarbeitern [F. Duimio, ibid. IX. Ser. **11**, 326—329 (1954); R. Cirelli, ibid. X. Ser. **1**, 260—262 (1955); G. M. Prosperi und C. Tosi, ibid. X. Ser. **2**, 1342—1344 (1955)] entwickelt und größtenteils schon publiziert wurden. Der Grundgedanke der vorgeschlagenen klassischen Elektronentheorie befindet sich in der Voraussetzung, daß neben der „fundamentalen Länge“ [W. Heisenberg, Ann. der Physik, V. F. **32**, 20 (1938)] auch eine „fundamentale Zeit“ [ $\tau_0 = (4/3)(e^2/m_0 c^3)$ ] eingeführt werden soll. Dadurch wird aber keine Gitterstruktur für die Raum-Zeitwelt postuliert, sondern es wird angenommen, daß die physikalischen Ereignisse, welche in einem angegebenen Zeitpunkt stattfinden, durch solche Ursachen beeinflußt werden, welche in einem früheren Zeitpunkt — nach Abzug nämlich der fundamentalen Zeit — existierten. Das bedeutet aber, daß die Differentialgleichungen, welche den zeitlichen Ablauf der physikalischen Bewegungen beschreiben, durch Differenzgleichungen ersetzt werden. Entwickelt man die verschiedenen mechanischen Größen nach Potenzen der fundamentalen Zeit, so lassen sich die Bewegungsgleichungen annäherungsweise wieder in Differentialform schreiben. Die Größe der fundamentalen

Zeit läßt sich dadurch ermitteln, daß man die erste Näherung der von der Differenzengleichung abgeleiteten Bewegungsgleichung mit der Diracschen (dies. Zbl. 23, 427) vergleicht und die entsprechenden Konstanten identifiziert. Interessanterweise läßt sich aber dieselbe Konstante für die fundamentale Zeit auch quantentheoretisch begründen. Die ganze Theorie wird auch auf relativistisch invariante Form gebracht. Weiterhin weisen die Grundgleichungen der Theorie neben den sog. makroskopischen Bewegungen auch auf innere Bewegungen des Elektrons hin, die sich mit dem anomalen magnetischen Moment des Elektrons verknüpfen lassen. Auf diese Weise wird bewiesen, daß eine Ähnlichkeit zwischen dem hier vorgeschlagenen und dem Pol-Dipol-Modell des Elektrons vorhanden ist. Dann werden verschiedene Radiationsprobleme behandelt und es läßt sich darauf hinweisen, daß diese Theorie auch die Resultate der Bohm-Weinsteinschen Theorie (dies. Zbl. 31, 378) reproduziert, wo das Elektron als ein ausgedehntes Elementarteilchen vorausgesetzt wird. Endlich wird eine einfache klassische Theorie für die Paarerzeugung angegeben. Obwohl also die Einführung der fundamentalen Zeit in eine klassische Elektronentheorie auf den ersten Blick sehr kühn zu sein scheint, ist die Einheitlichkeit und Übersichtlichkeit der Theorie weitgehend suggestiv und die Tatsache, daß sie einerseits die wesentlichen Schwierigkeiten der Elektronentheorie überwindet, andererseits viele interessante Resultate der anderen Modelle reproduziert, wird sie für die Forschung beobachtenswert bleiben.

*J. I. Horváth.*

**Heber, Gerhard: Zur Theorie der Elementarteilchen. III. Quantenfeldtheorie für ausgedehnte Nukleonen.** Z. Phys. 144, 39—55 (1956).

Das früher vom Verf. studierte nicht-relativistische Modell eines Elementarteilchens (dies. Zbl. 64, 451; 70, 227) wird jetzt vollständig quantisiert. Dafür benutzt der Verf. ein Verfahren, das im wesentlichen eine Abschneidung gewisser Freiheitsgrade des Problems bedeutet. Es dürfte sehr schwierig sein, ein solches Verfahren relativistisch zu verallgemeinern.

*G. Källén.*

## **Kernphysik:**

**Geissler, D.: Zur Theorie der Proton-Proton-Streuung bei hohen Energien.** Ann. der Physik, VI. F. 18, 125—145 (1956).

Obwohl die allgemeinen Züge der wellenmechanischen Theorie der  $p-p$ -Streuung, wie sie bereits 1930 von E. Guth und Th. Sexl entwickelt wurde, festliegen, ist bisher eine einwandfreie Deutung der Streuexperimente bei hohen Energien nicht möglich gewesen, da eine eindeutige Rückrechnung des in die theoretischen Formeln eingehenden und von vornherein unbekannten Wechselwirkungspotentials zwischen zwei Protonen noch nicht möglich war. Außerdem hat man nach Breit zu bedenken, daß bei Streuenergien von der Größenordnung der Ruheenergie des Pi-Mesons der Streuprozess die Natur der Protonen derart ändern könnte, daß sie nach dem Streuprozess unterscheidbar wären. Der Autor nimmt darüber hinausgehend noch an, daß bei so hohen Energien die einfallenden Protonen schon vor dem eigentlichen Streuprozess von den ruhenden Protonen unterscheidbar wären. Diese Hypothese verändert die Ausdrücke für die Wirkungsquerschnitte ganz entscheidend, da bei unterscheidbaren Protonen nicht mehr die Amplituden der getreuten Teilchen und der Rückstoßteilchen zu addieren sind, sondern vielmehr ihre Amplitudenquadrate. Die Rechnung berücksichtigt auf Grund der gewöhnlichen Schrödingergleichung Zustände bis einschließlich  $L = 2$  ( $D$ -Phasenänderungen;  $L =$  Drehimpulsquantenzahl) in der bekannten Guth-Sexlschen Streuformel. Bei sehr hohen Energien wird die Massenveränderlichkeit der Teilchen auf Grund der relativistischen Schrödingergleichung in Rechnung gesetzt. Für das Wechselwirkungspotential zwischen zwei Protonen wird wie üblich eine Potentialmulde der Reichweite  $a$  und der Tiefe  $V_0$  in 3 Arten angesetzt: 1. Die Kräfte sind gewöhnliche



Kräfte; 2. Die Kräfte enthalten Austauschoperatoren von der Art, daß sie eine Wechselwirkung in Zuständen mit ungeraden  $L$  unterdrücken; 3. Die Kräfte enthalten derartige Austauschoperatoren, daß sie eine Wechselwirkung nur in  $S$ -Zuständen erlauben. Als Ergebnis der Rechnung folgt, daß für alle drei Krafttypen nur sehr schmale und sehr tiefe Potentialmulden zu verwenden sind. Am besten scheinen Kräfte vom Typus 2 die experimentellen Befunde wiedergeben zu können, wobei  $a \sim 0,5 \cdot 10^{-13}$  cm und  $V_0 \sim 1300 - 1800$  MeV. *Th. Sexl.*

**Geissler, D.:** Streuung an einem Kastenpotential. *Ann. der Physik*, VI. F. 18, 113—124 (1956).

Die Streuung zweier Teilchen mit gleicher Masse aneinander wird auf Grund der gewöhnlichen und der relativistischen Schrödingergleichung berechnet, wobei als Wechselwirkungspotential zwischen den Teilchen eine einfache Potentialmulde von der Breite  $a$  und der Tiefe  $V_0$  vorausgesetzt wird. Die  $S$  ( $L=0$ ),  $P$  ( $L=1$ ) und  $D$  ( $L=2$ ) Phasenverschiebungen  $\delta_0, \delta_1, \delta_2$  werden berechnet und graphisch als Kurven mit den  $\delta$ 's als Parameter wiedergegeben, wobei  $(n_r^2 - 1) (a k_r)^2$  als Ordinate gegen  $(a k_r)^2$  als Abszisse aufgetragen wird. ( $n_r$  = Brechungsindex,  $k_r$  = Wellenzahl, beide im Relativkoordinatensystem gemessen.) Als besonders wichtige Anwendung wird die Abhängigkeit der Phasen  $\delta$  von der Energie der einfallenden Teilchen bei gegebener Muldenbreite und Tiefe diskutiert und ein Zusammenhang mit den stabilen Niveaus der Mulde aufgezeigt. *Th. Sexl.*

**Skavlem, S. and J. Espe:** Application of the variational method to the calculation of proton-proton scattering in the region 0—5 Mev. *Ark. Fys.* 10, 89—96 (1956).

Die Streuung von Protonen an Protonen wird nach der üblichen (von E. Guth und Th. Sexl entwickelten) Theorie unter Zugrundelegung eines Yukawa-Potentials  $\exp. (-\kappa r)/r$  als Wechselwirkung zwischen den Protonen für Mesonenmassen von 300, 370 und 400  $m_e$  auf Grund einer radialen  $S$ -Wellenfunktion

$$\psi(\kappa r) = G(\kappa r) (1 - e^{-\kappa r}) + \cotg \delta_0 \cdot F(\kappa r) - c_1 (1 - e^{-\kappa r}) e^{-\kappa r}$$

berechnet. Dabei sind  $F$  und  $G$  die beiden stehenden Wellen (ganze transzendente und im Nullpunkt irreguläre Lösung) der Schrödingergleichung für ein Coulomb-Potential im  $S$ -Zustand

$$\{d^2/(d\kappa r)^2 + (k/\kappa)^2 - (M e^2/\hbar \kappa) 1/\kappa r\} \psi = 0.$$

Der einzige noch unbestimmt bleibende Parameter  $c_1$  wird nach einem von Hulthén und Skavlem in einer früheren Arbeit entwickelten Variationsverfahren bestimmt. Die beste Übereinstimmung mit den Experimenten liefert eine Mesonenmasse von 334  $m_e$ . *Th. Sexl.*

**Shapiro, J. and M. A. Preston:** A study of nucleon forces with repulsive cores. II. Low energy properties, particularly charge independence. *Canadian J. Phys.* 34, 451—472 (1956).

(Teil I, Bird u. Preston, dies. Zbl. 65, 229.) Die Verhältnisse von Zweikörperkräften mit abstoßenden Kräften unendlicher Größe werden an Hand von numerischen, mit elektronischen Rechenmaschinen gewonnenen Resultaten untersucht. Die Folgerungen, die sich unter Annahme der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte im  $^1S$ -Zustand ergeben, werden hinsichtlich verschiedener Potentialverläufe sowohl des Neutron-Neutron- als auch des Proton-Neutron-Systems diskutiert. Es wird gezeigt, daß diese Annahme die Mannigfaltigkeit der möglichen Potentialverläufe wesentlich einschränkt. Es ergibt sich, daß die Ladungsunabhängigkeit sich mit einem Yukawapotential von verschwindendem Abstoßungsradius vereinbaren läßt. Potentialverläufe, die stärker singulär als das Yukawapotential sind, führen zu größeren Abstoßungsradien; weniger singuläre Potentiale sind nicht ladungsunabhängig. *F. Winterberg.*

**Brundell, P.-O. and B. Enander:** The neutron-proton system with a central exponential potential. I, II. *Tekn. Högskol. Handl.* Nr. 60, 12 S. (1952); Nr. 98, 13 S. (1956).

I, The neutron-proton system is treated for low energies with exponential potentials with the same range but different depths for the triplet and singlet states. The method and the numerical results are essentially the same as those worked out by many authors earlier under the shape independent approximation. The present authors give no reference to the famous work of Blatt and Jackson and mention Salpeter's almost conclusive work only partly. — II. Based on the same assumptions as in the previous paper, the authors deal with the photo-disintegration of deuteron. It is very difficult to find any originality except in some unrealistic numerical works.

*S. Hayakawa.*

**Ziegler, M. A. and G. Szamosi:** Relativistic effects in the theory of the  $\alpha$ -particle. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 6, 67—71 (1956).

Es handelt sich um die Berechnung der Bindungsenergie des  $\alpha$ -Teilchens mit Hilfe eines von J. Werle (dies. Zbl. 53, 163) diskutierten reellen, skalaren Mesonenfeldes, das in relativistischer Näherung auf repulsive und Mehrkörper-Kräfte führt. Die Auswertung erfolgt mit Oszillator-Funktionen nach einem Variationsverfahren. Es ergeben sich zwei Minima, die den Werten  $g = 7,36 e$  und  $31,4 e$  der Kopplungskonstanten entsprechen. Bei dem zweiten fallen die relativistischen Einflüsse ins Gewicht.

*W. Wessel.*

**Breit, G.:** Transfer of nuclear particles. Phys. Review, II. Ser. 102, 549—556 (1956).

A method of treating the transfer of a nuclear particle from one potential well  $V_1$  to another  $V_2$  through a potential barrier. The Schrödinger equation in the absence of  $V_1$  and  $V_2$  but with the barrier potential is replaced by an integral equation. The kernel of the integral equation is used to solve the eigenvalue problem in the presence of either  $V_1$  or  $V_2$ . A set of eigenfunctions thus obtained are used for expanding the wave function of the total system. The energy dependence of the kernel serves to give the barrier penetration factor. This paper is devoted mainly to mathematical discussions in the one dimensional case and concluded by brief considerations on the extension to practical problems.

*S. Hayakawa.*

**Hittmair, O.:** Stripping-Reaktionen virtueller Niveaus. Acta phys. Austr. 10, 255—260 (1956).

Die wellenmechanische Formulierung des Deuteron-Stripping-Wirkungsquerschnitts wird für komplexe Kerne entwickelt und auf virtuelle Zustände des abgetrennten Neutrons angewandt. Die gewonnene Darstellung wird abschließend mit der Matrixformulierung verglichen. Zur Aufstellung der  $\psi$ -Funktion werden folgende Annahmen gemacht. 1. Die Coulombwechselwirkung wird vernachlässigt. 2. Das Proton ist nach der Aufspaltung des Deuterons ein freies Teilchen. Die reduzierten Breiten, die in die Ergebnisse als Parameter eingehen, sind insofern verschieden, als die Näherungsannahmen in der Matrixformulierung eine reine Ein-Teilchenbreite bedingen.

*F. Winterberg.*

**Hittmair, O.:** Schalenmodellkopplung und Polarisation von Stripping-Protonen. Z. Phys. 144, 449—454 (1956).

Die Polarisation der Protonen einer Stripping-Reaktion wird unter Zugrundelegung einer intermediären, zwischen  $LS$  und  $j - j$  liegenden Kopplung des eingefangenen Neutrons berechnet. In der numerischen Berechnung der Polarisation von  $N^{13} (d, p) N^{14}$  Protonen wird der allgemeine Ausdruck angenähert, indem die Wechselwirkung Kern-Proton auf reine Potentialstreuung beschränkt wird. Die obere Grenze  $1/3$  des absoluten Werts der Polarisation ist jedoch auf jeden Fall streng gültig.

*F. Winterberg.*

**Horowitz, J.:** Sur la théorie des réactions de „stripping“. Physica 22, 969—978 (1956).

In vorliegender Arbeit wird nach allgemeiner Formulierung der Theorie der „Stripping“-Reaktionen diskutiert, unter welchen Näherungsannahmen bisher mit

den Experimenten vergleichbare Folgerungen daraus gezogen wurden. [Vgl. Butler, dies. Zbl. 45, 140; Horowitz und Messiah, J. Phys. Radium 14, 695, 731 (1953); Tobocean, Phys. Review, II. Ser. 94, 1655 (1954); Bowcock, Proc. phys. Soc. Sect. A 68, 512 (1956).] Der Verf. weist auf experimentell bekannte Resonanzeffekte hin, die qualitativ mit der genäherten Theorie in Einklang stehen. Die genaue Theorie bestimmter Resonanzniveaus steht noch aus. Die allgemeine Theorie erlaubt ferner die Berücksichtigung der Polarisation (Spin) des Teilchens im Ausgangskanal. Es zeigt sich durch Vergleich mit vorliegenden Experimenten, daß in bestimmten Energiebereichen auf die Spin-Bahn-Wechselwirkung nicht verzichtet werden darf.

W. Klose.

**Kramer, Gustav:** Zur Theorie der Konversionskoeffizienten. Z. Phys. 146, 187—204 (1956).

Unter Voraussetzung eines linearen, eichinvarianten Hamiltonoperators für den Atomkern werden die Konversionskoeffizienten für einen ausgedehnten Kern abgeleitet. Es wird gezeigt, daß der Grenzübergang zum punktförmigen Kern unabhängig davon ist, in welcher Eichung die elektromagnetischen Multipolfelder dargestellt werden.

K. Baumann.

**Lehner, Joseph:** An unsymmetric operator arising in the theory of neutron diffusion. Commun. pure appl. Math. 9, 487—497 (1956).

Es werden zunächst die Ergebnisse früherer Untersuchungen (vgl. dies. Zbl. 64, 230; 70, 347) mitgeteilt. Wird als materieller Körper, in dem der Transport von Neutronen vor sich geht, ein unendlicher Streifen gewählt, so können die erzielten Resultate als vollständig bezeichnet werden, nicht so, wenn als Grundgebiet eine Kugel angenommen wird. Im ersten Fall kann das Fehlerglied  $\zeta$  abgeschätzt werden durch  $||\zeta(x, \mu, t)|| \leq ||f|| + c(f) t$ , wenn die Anfangsverteilung  $f \in D(A^2)$ . Sind die Differentialquotienten von  $f$  und  $Af$  nach  $x$   $L^2$  integrierbar, so gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(x, \mu, t) = 0$

für fast alle  $(x, \mu)$  aus  $|x| \leq a$ ,  $|\mu| \leq 1$ . Der große Unterschied der Form der Lösung für den Streifen und für die Kugel ist nach einer physikalischen Überlegung bereits zu erwarten. Die Eigenschaften des Operators  $B$

$$Bf = -\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{c}{2r} \int_{-r}^r f(x', \sqrt{r^2 - x'^2}, t) dx',$$

der in der linearisierten Boltzmann-Transportgleichung bei den üblichen Symmetriebedingungen  $u_t = Bu$  in  $x^2 + y^2 \leq a^2$ ,  $y \geq 0$ ,  $t > 0$  mit  $u(x, y, t) = 0$  auf  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $x \leq 0$  und  $u(x, y, 0) = f(x, y)$  auftritt, erlauben wieder die Einführung der Halbgruppe  $U(t) = \exp(tB)$ . Da aber jetzt das Punktspektrum  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots; \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots; \lambda_n = \beta_n + i\tau_n)$  nicht mehr endlich sein muß, folgt auf gleichem Weg wie früher nur eine asymptotische Darstellung der Lösung. Aus dem Umkehrintegral des Laplacebildes  $R(\lambda, B)f$  kann zwar auch eine Reihendarstellung gewonnen werden, allerdings nicht für alle  $t > 0$  und unter noch zu prüfenden Voraussetzungen über das Verhalten von  $R(\lambda, B)$ .

F. Selig.

## Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

● **Kopal, Zdeněk** (edited by): Proceedings of a symposium on astronomical optics and related subjects. Held in the University of Manchester April 19<sup>th</sup>—22nd, 1955. Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1956. XV, 428 p. guilders 45,—.

Dieses als Symposium herausgegebene Werk mit der vom Herausgeber verfaßten Einleitung (Astronomie und Optik) und seinen weiteren 47 Artikeln der 7 Abschnitte: Theoretische Information, Optische Abbildung und Brechung, Interferometrische Probleme, Elektronik in der astronomischen Optik, Probleme der Auflösung und der Szintillation, Weitwinkel-Optik und asphärische Oberflächen, Photographie durch Filter und dünne Blättchen ist für den Optiker und Astronomen von großem Wert;



es enthält grundlegende Referate für die Theorie wie auch für die Praxis. Aus der Fülle herausgegriffen sollen nur die die mathematische Optik (Geometrie und Wellentheorie) betreffenden Artikel werden, und auch hier nur die zwei von D. Gabor-London (Light and Information, S. 17—31; Collecting Information on partially known Objects, S. 59—67), die zwei von E. H. Linfoot-Cambridge (Noise, Aberrations and the Information content of optical Images, S. 38—49; Transmission Factors and the Assessment of optical Image Quality, S. 71—76), der von P. M. Duffieux-Besançon (Aspects du Problème de l'Object, S. 50—58), der von K. W. Picht-Potsdam (Investigations concerning geometrical and wave-theoretical Images formed by a paraboloidal Mirror, S. 106—120) und der von R. C. Spencer-Cambridge (USA) über „Antennas for Radio Astronomy“, S. 130—162. Der Inhalt des Buches stellt für weite Fachkreise eine begrüßenswerte Zusammenstellung der sie heute besonders interessierenden Probleme dar, weshalb man dem Herausgeber Z. Kopal-Manchester zu besonderem Dank verpflichtet ist. *W. Strohmeier.*

**Keller, Geoffrey:** *Astronomical scintillation and atmospheric turbulence. Comments on several recent papers.* Astron. Nachr. 283, 85—86 (1956).

Verf. wendetsich in 5 kurz formulierten Punkten gegen die von H. Scheffler (dies. Zbl. 65, 454) bei seiner wellenoptischen Untersuchung der Szintillation entwickelte Abhängigkeit der Korrelationsfunktion der elektrischen Feldstärke vom Abstand zwischen störender Schicht und Beobachter; sie soll in turbulenzfreien Regionen nicht mit der Höhe variieren. Mit mehreren anderen Autoren (Booker, Ratcliffe, Shinn, Hewish) wird in dieser Auffassung Übereinstimmung festgestellt. *W. Strohmeier.*

**Scheffler, H.:** *Bemerkungen zur Theorie der astronomischen Sicht.* Astron. Nachr. 283, 87—88 (1956),

Der Verf. glaubt die von G. Keller (s. vorstehendes Referat) gemachten Einwände gegen seine im Jahre 1955 bei der Untersuchung der astronomischen Sicht gefundene schwache Abhängigkeit der Korrelationsfunktion des elektrischen Vektors von der Höhe der turbulenten Schicht in einer kurzen Erwiderung klären zu können, u. a. durch den Hinweis, daß statt eines reellen ein komplexes Phasenstörungsglied zu verwenden sei. *W. Strohmeier.*

● **Siegel, C. L.:** *Vorlesungen über Himmelsmechanik.* (Die Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Bd. LXXXV.) Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1956. IX, 212 S. Gln. DM 33,—.

Die Vorlesungen des Verf., die diesem Buch als Grundlage gedient haben, behandeln die Probleme der Himmelsmechanik vom Standpunkt des reinen Mathematikers aus, der nach den Lösungen einer gewissen Klasse von Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen sucht, wie sie in der klassischen Astronomie auftreten. Eine Zusammenfassung der seit den Werken von H. Poincaré auf diesem Gebiete geleisteten Arbeit in knapper und übersichtlicher Form ist hier zum ersten Male in deutscher Sprache versucht worden. Das erste der drei Kapitel dieses verdienstvollen Werkes behandelt nach einer allgemeinen Einleitung über die Hamilton-Jacobische Theorie der kanonischen Differentialgleichungen Fragen des Dreikörperproblems, insbesondere den Beweis des Sundmanschen Satzes über die Existenz konvergenter Reihen und die Probleme der Regularisierung, die beim Zusammenstoß von Massenpunkten auftauchen. Das zweite Kapitel handelt von den periodischen Lösungen des Dreikörperproblems, wobei das Hillsche Problem der Bewegung eines Satelliten unter Vernachlässigung der Einflüsse einer endlichen Sonnenparallaxe ausführlich behandelt wird. Die klassischen Arbeiten von Poincaré, die trotz ihres Ideenreichtums die weitere Entwicklung nur wenig befruchtete haben, sind vor allem durch Birkhoff erweitert worden, dessen Fixpunktmethodet hier eingehend gewürdigt wird. Den Abschluß bildet das Kapitel über die Stabilität der Lösungen des Dreikörperproblems, eine Frage, die besonders von Ljapounoff

behandelt worden ist, deren völlige Beherrschung aber noch in weiter Ferne liegt. — Der Astronom wird aus diesem Buch manche Anregung schöpfen, wenn auch die in ihm entwickelten mathematischen Methoden für die Praxis der Himmelsmechanik wenig geeignet sind: So ist z. B. die Konvergenz der Sundmanschen Reihen so schlecht, daß ihr Anwendungsbereich sehr beschränkt ist. Die Strömgrenschen Versuche, durch numerische Integration der Differentialgleichungen des restringierten Dreikörperproblems einen Überblick über die Vielgestalt der periodischen Lösungen zu gewinnen, sind daher in ihren Ergebnissen den entsprechenden Versuchen der Analytiker weit überlegen gewesen. Das Schlußwort Siegels in seiner Göttinger Vorlesung über diesen Gegenstand, daß die Probleme der Astronomie letzten Endes „für den Mathematiker zu schwer“ seien, wirft in seiner Bescheidenheit auf diesen Sachverhalt ein helles Licht.

*K. Stumpff.*

**Wilkins, Alexander:** Über die Integral-Invarianten der Störungstheorie. S. Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1955, 123—173 (1956).

Das allgemeine relative Dreikörperproblem besitzt außer dem Integral der Energie und den drei Flächenintegralen keine weiteren Integrale von bekannter und für alle Zeiten gültiger Form. Es lassen sich jedoch die schon von H. Poincaré untersuchten Integralinvarianten aufstellen, d. h. Konstante, die sich linear aus Integralausdrücken über die gestörten oskulierenden Bahnelemente zusammensetzen. Obwohl diese Konstanten nicht die Bedeutung neuer Integrationskonstanten haben, sondern lediglich Funktionen der bekannten algebraischen Integrale sind, können sie doch als wichtige Kontrollen für die Störungsrechnung bzw. die numerische Integration spezieller Fälle des Dreikörperproblems nützlich sein, ähnlich wie das bekannte Tisserandsche Kriterium, nach dem auch nach dem Durchgang eines Kometen durch das Attraktionsfeld eines störenden Planeten, der eine gründliche Änderung der Bahnelemente verursacht, dennoch eine gewisse Funktion der Bahnelemente fast ungestört bleibt. Verfasser wendet sein Verfahren des systematischen Aufsuchens solcher Invarianten auf verschiedene Fälle der Himmelsmechanik an, u. a. auf das eingeschränkte Dreikörperproblem, in dem diese nützlichen Beziehungen besonders einfache Form annehmen.

*K. Stumpff.*

**Wilkins, Alexander:** Untersuchungen zur Beschleunigung des Enckeschen Kometen. S. Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1955, 285—302 (1956).

Verf. prüft die Frage, ob die beim Enckeschen Kometen (Umlaufszeit 3,3 Jahre) beobachtete Beschleunigung der mittleren täglichen Bewegung um  $0,1''$  je Umlauf auf himmelsmechanischem Wege, d. h. allein durch die von den Planeten verursachten Störungen erklärbar ist. Er geht der Vermutung nach, daß es sich um Fehler der Theorie handeln könnte, die durch Vernachlässigung sehr langperiodischer Terme in den Poissonschen säkularen Störungen von der zweiten Ordnung der störenden Massen entstanden sind. In der Tat gibt es ein solches Glied von etwa 900-jähriger Periode, das durch die fast genau erfüllte Kommensurabilität 14:5 in den mittleren Bewegungen des Kometen und des Jupiter verursacht wird. Die Berechnung dieses Gliedes ergab aber einen von dem beobachteten Effekt ganz abweichenden numerischen Wert. Ein ebenfalls vorhandener Poisson-Term, der von einer Kommensurabilität 9:1 mit Saturn herrührt, erwies sich als so klein, daß er ebenfalls zur Erklärung des Phänomens nicht geeignet war. Die Möglichkeit, daß die beobachtete Störung durch Anziehungskräfte interstellarer Materie (Meteorstrome!) in der näheren Umgebung der Sonne hervorgerufen werden, wird daher in Betracht gezogen werden müssen, um so mehr, als der Enckesche Komet der einzige bekannte periodische Komet ist, der sich der Sonne bis auf 0,3 astronomische Einheiten nähert, und der einzige, an dem ein derartiger Effekt bisher beobachtet worden ist. *K. Stumpff.*

**Sultanov, G. F.:** Ein zweifach gemitteltes Schema vom Gaußschen Typus. Akad. Nauk Azerbajdž. SSR, Doklady 12, 87—89 und russ. Zusammenfassg. 89 (1956) [Azerbaidžanisch].

Les équations de mouvement d'Astéroïde dans le problème de trois corps (Soleil, Jupiter, Astéroïde) ne peuvent pas être résolues dans le cas général puisque la forme de la fonction perturbatrice est souvent très compliquée. L'A. propose d'appliquer la valeur moyenne de cette fonction en ce qui concerne deux éléments de l'orbite d'Astéroïde et constate que dans ce cas le problème peut être résolu par des quadratures.

C. Woronetz.

Rigal, Jean-Louis: Étude statistique des mouvements stellaires. III. Méthode générale. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 69—71 (1956).

Schatzman, Evry et Jean-Louis Rigal: Étude statistique des mouvements stellaires. IV. Cas des sous-géantes  $F$  à grande vitesse de rotation équatoriale. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 230—232 (1956).

Nahon, Fernand: Sur une nouvelle méthode d'analyse des vitesses radiales. C. r. Acad. Sci., Paris 242, 462—464 (1956).

Ambarzumian hat eine Formel abgeleitet, um aus der Verteilung der Radialgeschwindigkeiten die Dichte der Geschwindigkeitswolke in irgendeinem Punkte des Geschwindigkeitsraumes zu berechnen, unter der Voraussetzung, daß die Verteilung der Geschwindigkeiten von der galaktischen Länge unabhängig sei. Hier wird ein neuer Beweis der Ambarzumianschen Formel gegeben, der zu weiteren, für die praktische Anwendung nützlichen Folgerungen Anlaß gibt.

K. Stumpff.

Contopoulos, George: On the isophotes of ellipsoidal nebulae. Z. Astrophys. 39, 126—132 (1956).

Es wird gezeigt, daß die isophoten Kurven des Projektionsbildes eines Nebels ähnliche konzentrische Ellipsen sind, falls die isophoten Flächen des Nebels ähnliche konzentrische Ellipsoide darstellen, und daß man aus dem Achsenverhältnis der Grenzellipse und den für mehrere Punkte des Nebelbildes ermittelten Radialgeschwindigkeiten auf die Orientierung des Nebels im Raum schließen kann.

H. Vogt.

Rogers, M. H.: The propagation and structure of shock waves of varying strength in a self-gravitating gas sphere. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 235, 120—136 (1956).

Es wird eine Methode entwickelt, um die Ausbreitung einer instationären zentralen Stoßfront innerhalb eines Sternes zu beschreiben, als Ausgang dienen die Formeln einer Arbeit von McVittie. Eine Entwicklung nach Potenzen von  $1/M^2$  ( $M$  = Machzahl) führt im Grenzfall der starken Front auf einen Separationsansatz in Art einer Homologielösung. Eine Dichteverteilung  $\rho = \rho_0 r^{-\alpha}$  des ungestörten Sternes wird ausführlich behandelt. Ist die Gesamtenergie  $E_s$  des ungestörten Sternes klein gegen die Energie  $E_e$  der ursprünglichen zentralen Explosion, so nimmt die Stärke ( $M$ ) der Stoßfront zeitlich ab, falls  $\alpha < 2,5$  ist; und die Geschwindigkeit nimmt ab, falls  $\alpha < 3$  ist. Ist dagegen  $E_s \gg E_e$ , so läßt sich der Fall  $\alpha = 2,5$  behandeln. Die numerische Integration wird durchgeführt für a)  $\alpha = 1,5$  und b)  $\alpha = 2,5$  für jeweils drei Werte des Verhältnisses  $\gamma$  der spezifischen Wärmen:  $\gamma = 5/3, 7/5$ , und  $1/3$ . — Im Fall a) ergibt sich eine relativ schmale Stoßwelle, die rund 30% der überstrichenen Sternmasse enthält. Im Fall b) dagegen nimmt die Stoßwelle rund  $2/3$  des Radius ein und nahezu alle Masse. — In beiden Fällen ist die Stoßwelle rückwärtig begrenzt durch eine Diskontinuität: im Fall a) mit fallender Dichte, im Fall b) mit steigender Dichte. — Die physikalische Bedeutung der Diskontinuität wird nicht diskutiert.

S. v. Hoerner.

Gandel'man (Gandelman), G. M. und D. A. Frank-Kameneckij (Frank-Kamenetsky): Emergence of a shock wave to the surface of a star. Doklady Akad. Nauk SSSR 107, 811—814 (1956) [Russisch].

Es wird das Verhalten einer starken, instationären, kugelsymmetrischen Stoßfront in der Umgebung einer polytropen Sternoberfläche untersucht. Die Krümmung sowie der Einfluß der Gravitation auf die Front werden vernachlässigt, der Lösungstyp wird auf eine Art Homologielösung („Automodell-Stoßwelle“) beschränkt. Der



im Ansatz noch freie Homologie-Parameter wird durch numerische Integration gefunden durch die Bedingung, daß die Lösung durch einen singulären Punkt im Lösungsfeld gehen muß, der die einzige physikalisch reguläre Lösung auszeichnet. [Eine fast gleiche Methode wurde durch Häfele für konstantes Vorfeld entwickelt: Z. Naturforsch. **10a**, 1006—1016 (1955)]. Nennen wir  $X$  den Abstand der Front von der Oberfläche, und ist  $X = 0$  für  $t = 0$ , so sei der Homologie-Parameter  $b$  definiert durch  $X \sim |t|^b$ . Dann lautet das Ergebnis:  $b = 0,590$  für ein Verhältnis der spezifischen Wärmen  $\gamma = 5/3$  und einen Polytropenindex  $n = 13/4$ . Ist  $x$  der Abstand von der Oberfläche, so ist die Verteilung von Geschwindigkeit, Dichte und Druck im Augenblick, wo die Front die Oberfläche erreicht, gegeben durch

$$u \sim x^{-(1-b)/b}, \quad \rho \sim x^n, \quad p \sim x^{n-2(1-b)/b}.$$

Im Rahmen der Rechnung wird die Temperatur an der Front im Augenblick des Erreichens der Oberfläche unendlich, was in Wirklichkeit durch eine Reihe hier vernachlässigter Effekte vermieden wird. Die Verf. glauben jedoch, daß auch die wirklich erreichten Temperaturen für den Verlauf von Kernreaktionen völlig ausreichen dürften.

*S. v. Hoerner.*

**Schmeidler, F.: Simultane Ausbreitung von Konvektion und Wärme im Sterninnern.** Astron. Nachr. **283**, 49—59 (1956).

Verf. vertritt die Ansicht, daß thermisch stabile Schichtung die Ausbildung von Konvektion zwar erschwert, aber nicht völlig unmöglich macht, und daß das Vorhandensein auch nur einer Instabilitätszone im Stern stationäre Konvektion im ganzen Stern nach sich ziehe, da die in einer instabilen Zone vorhandene Konvektion bestrebt sei, auf thermisch stabiles Gebiet überzugreifen und dort eine adiabatische Temperaturschichtung herzustellen.

*H. Vogt.*

**Biermann, L. and St. Temesváry: Über die Möglichkeit erzwungener stationärer Konvektion im Innern der Sterne.** Astron. Nachr. **283**, 60—65 (1956).

Im Gegensatz zu der Ansicht von F. Schmeidler wird hervorgehoben, daß Konvektion bei thermisch stabiler Schichtung (unteradiabatischem Temperaturgradienten) nur durch eine ständige zusätzliche, mit dem gesamten Energiefluß im Sterninneren vergleichbare Zufuhr mechanischer Energie stationär aufrechterhalten werden kann und daß die stationäre Turbulenz einer Instabilitätszone höchstens eine nur begrenzte Nachbarzone im stabilen Bereich in Mitleidenschaft ziehen kann.

*H. Vogt.*

**Schmeidler, F.: Bemerkungen zur Konvektion im Sterninnern.** Astron. Nachr. **283**, 66 (1956).

Schmeidler legt dar, warum er der Ansicht von Biermann und Temesváry nicht folgen kann, daß die Vorstellung einer durchgehenden Konvektion im Inneren der Sterne unhaltbar sei.

*H. Vogt.*

**De, J.: On the equilibrium configuration of magnetic stars.** Z. Astrophys. **40**, 21—27 (1956).

Elektrische Ströme und magnetische Felder verursachen im Innern der Sterne Kräfte, welche bei Stabilität mit den ebenfalls vorhandenen Druck- und Gravitationskräften im Gleichgewicht stehen müssen. Die vorliegende Arbeit untersucht die aus diesem Ansatz folgenden Gleichgewichtsfiguren eines als flüssig vorausgesetzten Sterns. Unter Voraussetzung rotationssymmetrischer Felder und nicht allzu großer Leitfähigkeiten ergeben sich abgeplattete Ellipsoide, bei sehr großer Leitfähigkeit sind kompliziertere Gleichgewichtsfiguren möglich.

*F. Schmeidler.*

**Hunger, Kurt: Zur Theorie der Wachstumskurven.** Z. Astrophys. **39**, 36—60 (1956).

Die Wachstumskurve (Gesamtabsorption einer Fraunhofer-Linie als Funktion der Anzahl wirksamer Atome über  $1 \text{ cm}^2$  der strahlenden Schicht) ist abhängig von der Art des Strahlungsaustausches (wahre Absorption oder Streuung), vom Modell (Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Tiefe in der Schicht) und von

der Temperaturschichtung. Die Wachstumskurve für den Gesamtstrahlungsstrom und die Strahlungsintensität bei senkrechtem Austritt wird hier für folgende 4 Fälle berechnet: Wahre Absorption und kohärente Streuung beim Milne-Eddington- und beim Schuster-Schwarzschild-Modell. Die Abhängigkeit der Kirchhoff-Planck-Funktion von der optischen Tiefe wird linear angenommen, praktisch vorkommende Abweichungen von dieser Temperaturschichtung durch ein zusätzliches exponentielles Glied bringen keine Änderung. Die Unterschiede zwischen den verschiedenen Fällen sind gering. Im Anhang Darstellungen des Linienprofils bei Verbreiterung durch Doppler-Effekt und Dämpfung (Voigt-Funktion), insbesondere bei starker Dämpfung. *G. Burkhardt.*

**Naur, Peter:** *Stellar models based on the proton-proton reaction.* Publ. mindre Medd. Københavns Observ. **168**, 49 S. (1956).

Vor einigen Jahren wurde entdeckt, daß entgegen früheren Ansichten die Proton-Proton-Reaktion im Innern der Sterne ergiebig genug ist, um als Energiequelle für die Sternstrahlung dienen zu können. Die vorliegende Arbeit führt eine numerische Integration der betreffenden Gleichungen unter Verwendung des Lochkartenverfahrens durch. Da die Energieproduktion des Proton-Proton-Zyklus nur proportional zur vierten Potenz der Temperatur ist, muß nicht mehr notwendig ein konvektiver Kern im Stern existieren. Insgesamt wurden elf Modelle genau durchgerechnet, die sich durch verschiedene Annahmen über das Gesetz der Opazität unterschieden. Die benutzten Gleichungen sind in sehr zweckmäßiger Weise umgeformt, die numerischen Resultate in übersichtlichen Tabellen wiedergegeben. *F. Schmeidler.*

**Hoppe, J.:** *Untersuchungen zur physikalischen Theorie der Meteore. I.* Astron. Nachr. **283**, 95—108 (1956).

Es wird versucht, eine theoretische Grundlage für eine physikalische Theorie der Meteore zu geben, die den gesamten Bereich der meteoritischen Erscheinungen in der Erdatmosphäre von den Mikrometeoriten bis zu den Riesenmeteoriten umfaßt. Dabei wird das Meteorphänomen nach physikalischen Gesichtspunkten in zwei Erscheinungsformen zerlegt: das Sternschnuppenstadium und das Feuerkugelstadium. Ausführlich behandelt wird im vorliegenden 1. Teil nur das Sternschnuppenstadium. *H. Vogt.*

**Ljubimova, E. A.:** *On the thermal history of the earth and its geophysical consequences.* Doklady Akad. Nauk SSSR **107**, 55—58 (1956) [Russisch].

**Maaz, R.:** *Anwendung der Vektoralgebra in analytischer Darstellung auf geologische Schichtflächen.* Gerlands Beiträge Geophys. **65**, 117—130 (1956).

**Arnold, K.:** *Über das mittlere Erdellipsoid.* Gerlands Beiträge Geophys. **65**, 157—162 (1956).

Die Formel von Stokes liefert bekanntlich die Geoiderhebungen  $N$  über der sphäroidischen Niveaufläche  $E$  (mittleres Erdellipsoid), wenn die Schwereanomalien am Geoid gegeben sind. Die Abplattung dieses Niveausphäroids ist aus Schweremessungen bekannt. Dagegen kann die große Halbachse von  $E$  aus Schweremessungen allein nicht bestimmt werden. Wenn nun im Zentralpunkt eines Triangulierungssystems die Geoiderhebung  $N$  und die absoluten Lotabweichungen auf gravimetrischem Wege ermittelt worden sind und in den übrigen Netzpunkten sowohl die gravimetrischen (= absoluten) wie auch die aus astronomisch-geodätischen Messungen mit Bezug auf ein Referenzellipsoid  $E_1$  abgeleiteten (relativen) Lotabweichungen vorliegen, so wird dadurch innerhalb des vom geodätischen Netz gedeckten Bereiches die Differenz der linearen Abstände beider Ellipsoide bekannt. Die große Halbachse von  $E$  kann dann in der Weise bestimmt werden, daß man das Ellipsoid  $E_1$  durch eine Translation und durch einen Ellipsoidübergang mit dem ersteren zur Deckung bringt. Der auf diesem Wege gefundene Wert  $a$  der Halbachse ist u. a. von der Schwereabplattung  $\beta$  abhängig, die durch die zugrunde gelegte Formel für die normale Schwere in die Anomalien und damit die Geoidundu-

lationen eingeht. Die Auswirkung einer Änderung von  $\beta$  auf  $a$  sowie auf die absoluten Geoidundulationen und auf die Lotabweichungen wird aus der Stokesschen Formel abgeleitet. Dabei zeigt sich eine Möglichkeit, die Dimensionen des mittleren Erdellipsoids mit Hilfe dieses Zusammenhanges zu verbessern, falls ein genügend dichtes Feld absoluter Geoidundulationen (nach Stokes) vorliegt. *W. Hofmann.*

**Elsasser, W. M.:** Hydromagnetic dynamo theory. Reviews modern Phys. 28, 135—163 (1956).

Bericht über die Theorie der Erzeugung kosmischer Magnetfelder, speziell des Erdfeldes. *G. Höhler.*

**Kertz, Walter:** Die thermische Erregungsquelle der atmosphärischen Gezeiten. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. 1956, 145—166 (1956).

Die Untersuchung behandelt die sich über die ganze Erde erstreckenden (planetarischen) Temperaturwellen, die durch die Sonnenstrahlung ausgelöst werden. Diese Temperaturwellen, die die Perioden von  $1/1$ ,  $1/2$ ,  $1/3$ , ... Tag haben, können Anlaß geben zu gezeitenartigen Schwingungen der Atmosphäre. Dieser Vorgang stellt ein wichtiges geophysikalisches Analogon dar zu den Gezeitenschwingungen, die durch die Gravitation bedingt sind. Verf. gibt zunächst eine Fourieranalyse für den Tagesgang der Sonnenstrahlung, und zwar für jeden Ort der Erde zu verschiedenen Jahreszeiten. Sodann gelingt es, in dieser Entwicklung den vertikalen Wärmetransport durch Leitung und Austausch an der Land- bzw. Meeresoberfläche wenigstens näherungsweise zu berücksichtigen. (Der Austauschkoeffizient wird als konstant angenommen). Dies setzt dann natürlich eine gewisse geometrische Erfassung der Land-Wasser-Verteilung auf der Erdoberfläche voraus. Der Verf. geht dann zu Kugelfunktionen über und erhält Entwicklungen für die gesuchten Temperaturwellen. Abschließend werden die interessanten Resultate der umfangreichen Rechnungen diskutiert, insbesondere wird die entwickelte Theorie mit den Beobachtungsergebnissen verglichen. *J. Zieryep.*

**Sulejkin (Shulejkin), V. V. (W. W.):** Refined law of wind wave growth in length. Doklady Akad. Nauk SSSR 111, 348—351 (1956) [Russisch].

**Dedebant, Georges:** Une image hydrodynamique du courant de la haute atmosphère. C. r. Acad. Sci., Paris 243, 1435—1436 (1956).

Verf. gibt ein Modell für einen planetarischen (d. h. die gesamte Erdatmosphäre erfassenden) Strahlstrom (jet stream). Die angeführten Gleichungen sind jedoch leider z. T. gar nicht, bzw. nur schwer verständlich. Bei der großen Bedeutung des Problems wäre es wünschenswert, daß dieser kurzen Mitteilung eine ausführlichere Darstellung folgt. *J. Zieryep.*

**Reuter, H.:** Zum gegenwärtigen Stand der numerischen Wettervorhersage. Österreich. Ingenieur-Arch. 10, 252—260 (1956).

In den letzten Jahren bemühte man sich immer mehr, das Problem der Wettervorhersage mathematisch exakt zu formulieren und anzugreifen. Die größte Schwierigkeit liegt darin, daß die atmosphärischen Bewegungsgleichungen außer den für die Prognose wichtigen, relativ langsam verlaufenden, Zustandsänderungen noch schnelle Gravitations- und Trägheitswellen enthalten, die für den Wetterablauf von untergeordneter Bedeutung sind (Meteorological noise). Diese müssen „herausgefiltert“ werden, da sonst das zeitliche Auflösungsvermögen bis auf 5—10 Minuten heruntergedrückt werden müßte, um die Stabilität des Differenzenverfahrens zu wahren. In einem solchen Fall könnten heute selbst die größten elektronischen Maschinen die Differentialgleichungen nicht annähernd so schnell wie die Natur integrieren. Verf., der selbst an den Entwicklungen maßgeblich beteiligt ist, schildert äußerst spannend den augenblicklichen Stand der Forschung und erläutert insbesondere die geostrophische Approximation als Filterbedingung. *J. Zieryep.*



**Siebert, Manfred:** Analyse des Jahrganges der  $1/n$  täglichen Variationen des Luftdruckes und der Temperatur. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. 1956, 127—144 (1956).

Die gezeitenartigen Druck- und Temperaturschwankungen sind überaus gering und i. a. einer unmittelbaren Beobachtung nicht zugänglich. Sie müssen daher erst durch harmonische Analyse aus dem mittleren täglichen Gang gewonnen werden. Mittelpunkt der Arbeit des Verf. ist ein interessantes Verfahren, das die übersichtliche Durchführung dieser harmonischen Analyse gestattet und zwar für den Jahresgang der Variationen von Luftdruck und Temperatur mit den Perioden von  $1/1, 1/2, 1/3, \dots$  Tag. Verf. führt seine Überlegungen zunächst für eine feste Station auf der Erde durch. Er beschreibt kurz eine Erweiterung zur planetarischen (d. h. die ganze Erde erfassenden) Darstellung und behandelt abschließend als Beispiel die harmonische Analyse des Temperaturganges für die Zone  $50^\circ$ — $60^\circ$  Nord. Der wesentliche Unterschied zu der weiter oben besprochenen Arbeit von W. Kertz liegt darin, daß Verf. ausschließlich von umfangreichem Beobachtungsmaterial ausgeht. Damit kommt der Arbeit eine besondere Bedeutung zu: Sie gestattet u. a. nämlich durch Vergleich der Ergebnisse, die theoretischen Annahmen über den Wärmeaustausch von W. Kertz zu überprüfen und gibt dadurch unter Umständen Anhaltspunkte zu evtl. Erweiterungen dieser Theorie.

*J. Zieryep.*

**Zieryep, J.:** Einige bemerkenswerte Eigenschaften der atmosphärischen Hinderiswellen. Z. angew. Math. Mech. 36, 311—312 (1956).

**Saffman, P. G. and J. S. Turner:** On the collision of drops in turbulent clouds. J. Fluid Mech. 1, 16—30 (1956).

Les auteurs examinent l'effet de la turbulence sur la croissance des gouttes d'eau dans les nuages. Les gouttes initiales sont plus petites que les petits tourbillons de la turbulence, de sorte que les collisions entre gouttes dépendent seulement des dimensions des gouttes, du coefficient de viscosité  $\nu$ , et de la quantité  $\varepsilon$  d'énergie dissipée par unité de masse. La valeur de  $\varepsilon$  est numériquement connue dans diverses conditions météorologiques. Les collisions sont dues aux variations de la turbulence dans l'espace, et aux différences de vitesse par rapport à l'air des gouttes voisines d'inégales dimensions. — Pour étudier le premier cas, on désigne par  $n_1, n_2$  les concentrations par unité de volume des gouttes de rayons  $r_1$ , et  $r_2$ . Si l'on suppose que le gradient de vitesse turbulente obéit à la loi normale, on trouve que la proportion de collisions est de la forme  $N = (r_1 + r_2)^3 (8\pi\varepsilon/15\nu)^{1/2}$ . Par coalescence, il se forme des gouttes de masse  $s$  fois plus grande. Si  $n_s$  est leur nombre par unité de volume, les équations différentielles de Smoluchowski relient  $dn_s/dt$  à  $n_1, n_2, \dots$ . Leur intégration numérique, sans hypothèses simplificatrices, permet de calculer le temps nécessaire pour que la masse moyenne d'un nuage de gouttes augmente de 50%, et de tirer diverses conclusions relativement à la formation de la pluie. — Dans le second cas, on calcule la distribution de probabilité de la vitesse relative  $w$  de deux gouttes, en utilisant les équations du mouvement des gouttes et les propriétés statistiques, supposées connues, de la turbulence. Si  $P(w)$  désigne la densité de probabilité de la vitesse relative de deux gouttes juste avant leur collision, la proportion de collisions est égale à  $N = \pi (r_1 + r_2)^2 n_1 n_2 \iiint |w| P(w) dw$ . Moyennant certaines hypothèses simplificatrices, il est acceptable de remplacer la fonction exacte  $P(w)$  par  $P^*(w) = (\beta/\pi)^{3/2} e^{-\beta w^2}$ , où  $\beta$  est calculé de manière à ce que la variance de  $w$  par rapport à  $P^*$  soit la même que par rapport à  $P$ , sa valeur étant fonction des divers facteurs physiques et de la turbulence de l'air. — Il est alors possible de discuter l'influence de la turbulence (cas des fortes turbulences dans les cumulus et des faibles turbulences des stratus) et celui de l'hétérogénéité des gouttes d'eau sur la coalescence des gouttes, ainsi que la tendance à la pluie à partir des nuages.

*J. Bass.*

# Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben.

- Abita, Emanuele (Problema delle concordanze) 142.
- Acharya, Y. V. G. (Spectrum of turbulence) 202.
- Ackeret, Jakob (Widerstände durch gasdynamische Relaxation) 236.
- Ackermann, Wilhelm (Axiomatik der Mengenlehre) 48.
- Aczél, J. (Ja. Acel) (Funktionalgleichungen einer Veränderlichen) 349; (Additions- und Subtraktions-theoreme) 350.
- János (Einführung des natürlichen Logarithmus) 286.
- Adam, A. (Mathematische Statistik) 371.
- Adams, J. F. (Products in minimal complexes) 398.
- Adkins, J. E. (Deformations of incompressible elastic materials) 187.
- Adler, Fred P. (Missile guidance) 407.
- Aigner, Alexander (Fermatgleichung) 39; (Lagebeziehungen in endlichen Graphen) 185.
- Ajzerman, M. A. (Automatische Regelung) 356.
- Akbar-Zadeh, Hassan (Isométries infinitésimales) 387.
- Akutowicz, Edwin J. (Uniqueness of Laplace integrals) 105.
- Al'ber (Alber), S. I. (Dual homological sequences) 181.
- Albert, G. E. (Sequential tests on the mean of an exponential distribution) 374.
- — — s. Herbert A. Meyer 134.
- Albrecht, R. (Potential in doppelt gekrümmten Kondensatoren) 216.
- Albuquerque, J. (Mesure des ensembles) 53.
- Alexandroff (Aleksandrov), P. S. (Mengenlehre) 47; (Combinatorial topology. I.) 179; (Correction) 181; (Cantorsche Mannigfaltigkeiten) 398.
- Alexandroff, P. S., A. I. Markuschewitsch und A. J. Chintschin (Enzyklopädie der Elementarmathematik. II.) 10.
- — — und V. V. Nemmyckij (V. V. Stepanov) 7.
- Alexiewicz, A. and W. Orlicz (Summability of double sequences. I.) 61; (Hyperbolic equation  $\partial^2 z / \partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$ ) 92.
- Alexits, G. (Summationssatz für Orthogonalreihen) 292.
- Allen, E. E. (Approximations to modified Bessel functions) 359.
- Almeida Costa, A. (Nicht-assoziative Ringe) 28.
- Altman, M. (Invariant subspaces of operators) 121; (Linear functional equations) 345.
- (Al'tman), M. (Riesz-Schaudersche Theorie linearer Operatorgleichungen) 345.
- Altshuler, S. (Ionization problems) 234.
- Amen-Zade, Ju. A. (Biegung prismatischer Hohl balken) 188.
- — — s. B. A. Azimov 187.
- Amitsur, A. S. (Algebras over infinite fields) 30.
- Anderson, Raymond F. (Subsonic downwash and sidewash angles near wings) 425.
- T. W. and Herman Rubin (Statistical inference in factor analysis) 147.
- Andronov, A. A. (N. I. Lobachevskii) 6.
- Andrunakievič, V. A. (Klassen assoziativer Ringe) 30.
- Angoff, W. H. (Estimation of nonspurious correlations) 377.
- Anis, A. A. (Moments of the maximum of partial sums) 144.
- Anliker, Max (Biegeschwindungen verwundener Stäbe) 418.
- Anspach, Pierre A. L. (Polygones réguliers. I. II. III.) 380.
- Apte, Madhumalati (Isométries des variétés presque kählériennes) 172.
- et André Lichnerowicz (Transformations affines d'une variété presque hermitienne) 387.
- Aragnot, André (Connexions euclidiennes) 172; (Champ d'holonomie) 390.
- Arakeljan, T. T. (Verbiegung eines unendlichen Balkens auf einem kontinuierlichen Boden) 416.
- Araki, Shōrō (Steenrod's reduced powers) 398.
- Araújo, J. M. (Motions of a shell structure) 229.
- Archibald, Raymond Clare s. F. Klein 380.
- Arnold, Harvey J. s. Herbert A. Meyer 134.
- K. (Ausgleichung gitterförmiger Triangulationssysteme) 186; (Mittleres Erdellipsoid) 458.
- Arnous, E. (Problème des états liés) 225.
- Aronszajn, N., A. Douglis and C. B. Morrey jr. (Symposium on partial differential equations) 313.
- Arrow, Kenneth J. and Leonid Hurwicz (Reduction of constrained maxima to saddle-point problems) 58.
- Arsove, Maynard G. (Subharmonic functions) 101.
- Aržanyč, I. S. (Berührungstransformationen) 314; (Relativistische Gleichung der Quantenmechanik) 443.
- Ashour, A. A. (Electrified disc) 440.
- Atalla, M. M. and K. Preston jr. (Transient temperature rise) 439.
- Atkin, R. H. (Mathematics and wave mechanics) 404.

- Auslander, Louis (Ideal theory for exterior differential equations) 313; (Holonomy covering spaces) 390.
- Maurice and David A. Buchsbaum (Homological dimension in Noetherian rings) 35.
- Avakumović, Vojislav G. (Eigenfunktionen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten) 326.
- Avdis, J. et V. Thébault (Géométrie du tétraèdre) 160.
- Azbelev, N. V. (Satz von Čaplygin) 126.
- Azimov, B. A., Ju. A. Amen-Zade, E. M. Borisov, G. L. Belkina und A. J. Kutuzov (Torsion prismatischer Stäbe) 187.
- B**abukov, A. G. (Boundary problem in deep well pump theory) 209.
- Backes, F. (Systèmes cycliques) 169.
- Badaljan, G. B. (Analytische und quasianalytische Funktionen) 58.
- Rade, William G. and Jacob T. Schwartz (Mautner's eigenfunction expansion) 348.
- Bader, W. (Reibungseinfluß auf die Düsenströmung) 421; (Druckbestimmung bei stationärer ebener Unterschallströmung) 425.
- Bagemihl, F. (Neighboring tetrahedra) 160.
- — and W. Seidel (Functions of bounded characteristic) 297.
- — s. Konrad Knopp 58.
- Bager, Anders (Inscribed and escribed circles) 160.
- Bailey, Jerry Z. s. Richard D. Linnell 204.
- Norman T. J. (Latent and infectious periods of measles. I.) 152.
- Bainbridge, J. R., Alison M. Grant und U. Radok (Tabular analysis of factorial experiments) 147.
- Bakel'man, I. Ja. (Glatte irreguläre Flächen) 392.
- Bakke, Finn und Berthold Stech (Streuung von Teilchen mit Spin  $1/2$ . II.) 220.
- Balazs, N. L. (Čerenkov radiation) 214.
- Balcerzyk, S. (Paper of S. Gacsályi) 20.
- Balcerzyk, S. and Jan Mycielski (Free subgroups of topological groups) 25.
- Ballam, J., V. L. Fitch, T. Fulton, K. Huang, R. R. Rau and S. B. Treiman (High energy nuclear physics) 448.
- Ballier, Friedhorst (Lineartopologische Algebren) 118.
- Ballieu, Robert (Produits scalaires à annulation symétrique) 112.
- Banach, Stefan (Mechanik) 405.
- Banaschewski, Bernhard (Überlagerungen von Erweiterungsräumen) 395.
- Bandyopadhyay, G. and R. K. Narasimhan (Group relaxation for simultaneous linear equations) 124.
- Barankin, Edward W. (Objectivistic theory of probability) 136.
- Barchin, G. S. s. M. P. Černjaev 6.
- Bareiss, Erwin H. (Berechnung der Kern-Reaktoren) 356.
- Bargmann, Rolf (Überführung der Schwerpunkts in die Hauptachsenlösung) 147.
- Bari, N. K. und S. B. Stečkin (Beste Approximationen konjugierter Funktionen) 65.
- Barnes, E. S. (Diophantine approximation) 46; (Minimum of ternary quadratic form. II.) 275.
- Wilfried E. (Primal ideals in noncommutative rings) 267.
- Barnett, J. A. (Linear differential equations) 307.
- Martin K. (Development of thermometry) 242.
- Baron, M. L. (Vibrations of infinitely long shells) 194.
- Baroody, E. M. (Excitation of electrons in metals) 238.
- Bartholomew, D. J. (Sequential test of randomness) 146.
- Bartle, R. G. (General bilinear vector integral) 281.
- Bartlett, M. S. (Stochastic models for recurrent epidemics) 150.
- Barton, D. E. (Distribution for which the maximum-likelihood estimator is unbiased) 145.
- Basch, A. (Hauptrichtungen und Eigenfrequenzen der Schwingungen eines Systems von zwei Freiheitsgraden) 409.
- Bašmakova, I. G. (Abhandlung des Archimedes) 242.
- Basov, V. P. (Lineare Differentialgleichungen in der Umgebung eines singulären Punktes) 84; (Systeme linearer Differentialgleichungen in der Umgebung eines Punktes von irregulärem Typus) 311.
- (Bassov), V. P. (Asymptotic behaviour of linear differential equations) 311.
- Bass, Jean (Mouvement d'un fluide visqueux incompressible) 325.
- Batchelor, G. K. (Steady laminar flow) 420.
- — and R. M. Davies (Present position of research in mechanics) 1.
- Bateman, Harry s. Albert A. Bennett 125.
- Bates, D. R. and T. R. Carson (Wave functions of  $HeH$ ) 234.
- Batschelet, Eduard und Franz Grün (Diffusionsgleichung) 353.
- Bauer, F. L. (Algebraisches Eigenwertproblem) 351.
- W. (Einflußzahlen) 307.
- Baumann, Volker (Integrodifferentialgleichung der Wärmeübertragung) 104.
- Baxter, Glen (Gaussian processes) 363; (Wiener process distributions) 365.
- Bazer, J. and S. N. Karp (Steady-state potential flow through a conical pipe) 424.
- Beach, L. A. s. Herbert A. Meyer 134.
- Beale, Martin et Michael Drazin (Note de Farquharson) 369.
- Baumont, Ross A. (Matrix criteria for the uniqueness of basis number) 31.
- Bechert, Karl (Nichtlineare Feldtheorie) 222.
- Becker, E. (Sekundärströmungen) 428; (Pulsierende Quelle unter freier Oberfläche) 436.
- Beer, Ferdinand D. and E. Russell Johnston (Mechanics for engineers) 405.



- Behrbohm, Hermann (Integraltransformationen zwischen Strömungen) 198; (Auftriebslöschung und Aufwindlöschung) 426.
- Behrend, F. A. (Theory of magnitudes) 47.
- Behrends, R. E., R. J. Finkelstein and A. Sirlin (Radiative corrections) 224.
- Belevitch, B. (Information et statistique linguistique) 370.
- Belkina, G. L. s. B. A. Azimov 187.
- Bellman, Richard (Disordered linear chain) 238; (Inequality concerning an indefinite form) 278; (Schwarz's inequality) 285.
- , Irving Glicksberg and Oliver Gross (Problems in calculus of variations) 101.
- Belousov, S. L. (Tafeln der Legendreschen Polynome) 360.
- Beman, Wooster Woodruff s. F. Klein 380.
- Benjamin, T. Brooke (Flow in channels) 425.
- Bennett, Albert A., William E. Milne and Harry Bateman (Differential equations) 125.
- Benson, G. C., H. P. Schreiber and D. Patterson (Verwey's model for lattice structure of crystals) 238.
- Benz, G. (Instabiler Zweig der Frequenz-Amplituden-Kurve) 409.
- Berezanskij, Ju. (Yu.) M. (Eigenfunction expansions) 348.
- Berg, Lothar (Asymptotische Entwicklung von Integralen) 295.
- Roy A. and Lawrence Willets (Nuclear surface effects) 230.
- Berger, Martin J. s. Herbert A. Meyer 134.
- Bergman, Stefan (Boundary value problems) 321; (Multivalued harmonic functions in three variables) 327.
- Berikašvili, N. A. (Dualitätssatz von Steenrod) 181.
- Berker, Ratip (Équations de compatibilité relatives au mouvement d'un gaz) 235.
- Berman, S. D. ( $p$ -adischer Ring der Charaktere) 24; (Irreducible representations of a finite group) 25.
- Bernard, A. s. J. Gaunin 132.
- Berndt, Sune B. (Drag of slender bodies at sonic speed) 426.
- Besicovitch, A. S. (Tangents to sets of infinite linear measure) 54; (Density of perfect sets) 55.
- Beyer, Gudrun (Erweiterungen galoisscher Körper) 268; (Vermutung von Hasse) 268.
- Bharucha-Reid, A. T. (Stochastic theory of epidemics) 150.
- Bickley, W. G. s. G. Temple 191.
- Bieberbach, Ludwig (Konforme Abbildung) 74.
- Biedenharn, L. C. (Sommerfeld's bremsstrahlung formula) 225.
- Bielecki, A. (Méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov) 81, 90; (Axiomes de congruence de Hilbert) 158.
- Biermann, L. und St. Temesváry (Erzwungene stationäre Konvektion im Innern der Sterne) 457.
- Biggiogero, Giuseppina Masotti s. Masotti Biggiogero, Giuseppina 384.
- Bihari, I. (Lemma of Bellman) 82.
- Bing, R. H. (Curve that pierces no disk) 402.
- Bingel, Werner (Molekülintegrale) 234.
- Biot, M. A. (Applied Mathematics) 2; (Divergence of supersonic wings) 433.
- Birkhoff, Garrett (Spherical bubbles) 196.
- — and R. S. Pierce (Lattice-ordered rings) 266.
- Birman, M. Š. (Selbstadjungierte Fortsetzungen von Operatoren) 121.
- Bisplinghoff, R. L. (High-speed flight) 208.
- Black, D. V. s. M. W. Hunter 407.
- Blackett, D. W. (Near-rings of differentiable transformations) 120; (Near-ring of affine transformations) 336.
- Blanchard, A., A. Borel, H. Cartan, J. P. Serre et Wu Wen-Tsun (Espaces fibrés et homotopie) 399.
- Blank, V. Z. (Vertex part for high energies) 445.
- Blanuša, Danilo (Immersion isométrique mutuelle d'espaces à courbure constante) 174.
- Blaschke, Wilhelm (Kreis und Kugel) 175.
- Blatter, Christian (Simpson'sche Regel) 128.
- Blenk, H. (A. Betz) 5.
- Blondel, Jean-Marie (Équation linéaire du second ordre) 90; (Comportement à l'infini d'une équation linéaire aux dérivées partielles) 319.
- Blum, J. R. and Murray Rosenblatt (Class of stationary processes) 364.
- Boas jr., R. P. (Functions of exponential type) 296.
- Bochenek, K. ( $((V)^2 = 1)$  214.
- Bocheński, J. M. (Formale Logik) 7.
- Bochner, S. (Linear partial differential equations) 315.
- Bodiu, G. (Correspondances entre bivecteurs et spineurs) 443.
- Bodner, S. R. s. M. J. Forray 187.
- Bogdanoff, J. L. and J. T. Horner (Torsional vibration of rotating twisted bars) 194.
- Bögel, K. (Struktur stetiger Funktionen einer Veränderlichen. I. II.) 282.
- Bognár, M. (Direkt unzerlegbare abelsche Gruppe) 24.
- Bogoljubov (Bogoljubow) N. N. und D. V. (W.) Širkov (Schirkow) (Probleme der Quantenfeldtheorie. II.) 444; (Charge renormalization group) 444.
- Böhmer, Johan F. (Kurve des vorgespannten Kabels) 187.
- Bojanić, R., W. Jurkat und A. Peyerimhoff (Tauber-satz für Faltungen) 107.
- Boley, Bruno A. (Temperature, stresses, and deflections in thermoelastic problems) 189; (Vibrations of beams) 189.
- Boll, L. s. B. W. Gnedenko 134.
- Bolotin, V. V. (Dynamische Stabilität elastischer Systeme) 418.
- Bolsterli, Mark and Eugene Feenberg (Perturbation procedure) 229.
- Boltjanskij, V. G. (Hinder-nisse für Schnittflächen) 182; (Zerlegungsgleiche Figuren) 382.

- Boltjanski, V. (W.) G. s. I. M. Jaglom 175.
- Bonsall, F. F. (Extremum problems) 71.
- Borel, A. (Groupes linéaires algébriques) 261.
- s. A. Blanchard 399.
- Borisov, E. M. s. B. A. Azimov 187.
- Born, J. S. s. G. Horvay 413.
- Max (Physics in my generation) 244.
- Borovikov, V. A. (Formel von Herglotz-Petrovskij) 90.
- Borsuk, K. (Concept of dependence for continuous mappings) 182.
- Bottari, Amerigo (F. Enriques) 244.
- Bottema, O. (Van der Woude) 244.
- Bouligand, Georges (Courants de la recherche mathématique) 241; (Conditions effectives de la recherche) 241; (Types divers d'évolution irréversible) 241.
- Bouniol, Fernand s. Paul Guienne 435.
- Boyce, W. E. (Effect of hub radius on vibrations of a bar) 194.
- Boyd, A. V. ( $\alpha$ -convergence of Cesàro means) 288.
- Braconnier, Jean (Analyse harmonique dans les groupes abéliens. I.) 26.
- Brauer, Alfred (Schnirelmann density) 41.
- George (Product sequences) 59.
- Braun, Günther (Methode der stationären Phase) 215.
- Brauner, H. (Kegelschnitte auf Quadriken) 162.
- Braunschweiger, Chris C. (Geometric construction of  $L$ -spaces) 336.
- Breit, G. (Transfer of nuclear particles) 452.
- Bremermann, H. J. (Pluri-subharmonic functions and Hartogs functions) 76; (Complex convexity) 304.
- Brieden, K. (Anisentrope Überschallströmungen) 432.
- Broadbent, S. R. (Quantum hypothesis based on a single set of data) 375.
- — and T. G. Callcott (Matrix analysis of processes involving particle assemblies) 142.
- Brock, J. S. (Means stress around a small opening in a plate) 188.
- Broer, L. J. F. (Ventilation of traffic tunnels) 424.
- Brousseau, R. s. G. W. Evans 128.
- Browder, Felix E. (Regularity properties of elliptic differential equations) 96.
- Browkin, Georges et André Schinzel (Nombres de Mersenne) 271.
- Brown, Wm. P. (Algebra related to the orthogonal group) 31; (Semisimplicity of  $\omega_2^*$ ) 269.
- Brücker-Steinkuhl, K. (Prüfverfahren für Variable mit weitem und engem Toleranzbereich) 148.
- Bruins, E. M. (Orthogonal transversals) 158.
- Brun, Viggo (Pollen grains and Archimedean polyhedra) 160.
- Brundell, P.-O. and B. Enander (Neutron-proton system. II.) 451.
- Bruniak, R. (Ablösung der Grenzschrift beim Verdichtungsstoß) 429.
- Buchanan, R. H. s. R. B. Robinson 436.
- Bucher, Bradley D. s. Herbert A. Meyer 134.
- Buchsbaum, David A. s. Maurice Auslander 35.
- Budak, B. M., A. A. Samar'skij und A. N. Tichonov (Aufgaben zur mathematischen Physik) 404.
- Bunge, Mario (Interpretations of quantum mechanics) 217.
- Burge, E. J., Y. Fujimoto and A. Hossain (Scattering of nucleons by light nuclei) 230.
- Burger, E. (Kooperative Zweipersonenspiele) 369.
- Burkhardt, Felix (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in der Wirtschaft) 156.
- Bürklen, O. Th. s. F. Ringleb 2.
- Busemann, H. and C. M. Petty (Convex bodies) 393.
- Butcher, J. C. (Serially correlated observations) 377.
- Butler, James W. s. Herbert A. Meyer 134.
- S. T. s. J. R. Shepanski 220.
- Buzano, Piero (Analisi matematica) 47.
- Čajkovskij, G. N. s. M. M. Kabal'skij 404.
- Caldirola, P. (Model of classical electron) 449.
- Callahan, Willie Russel (Flexural vibrations of plates) 192.
- Callcott, T. G. s. S. R. Broadbent 142.
- Calligeros, J. M. s. J. W. Mar 208.
- Cambi, E. (Laplace transforms expressed as Neumann series) 106; (Free oscillations in a variable-parameter resonant system) 211.
- Campbell, J. D. (Membranes subjected to pressure) 188.
- Robert (Trigonométrie) 159; (Famille des polynômes orthogonaux) 294.
- Campebelli, Luigi (F. Enriques) 244.
- Čankvetadze, G. G. (Deformation eines elastischen Halbraumes) 189.
- Capellen, W. Meyer zur s. Meyer zur Capellen, W. 411.
- Carathéodory, C. (Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung) 316.
- Carlitz, L. (Nonsingular forms in a finite field) 17; (Staudt-Clausen theorem) 40; (Particular equation in a finite field) 40; (Coefficients of  $\sinh x/\sin x$ ) 273.
- — and H. H. Corson (Special equations in a finite field) 272.
- Carmody, Fr. J. (Arabic astronomical sciences in Latin translation) 3.
- Carrier, G. F. (Sound transmission from a tube with flow) 208.
- Carruccio, Ettore (Sistemi quasi coerenti) 245.
- Carson, T. R. s. D. R. Bates 234.
- Cartan, H. s. A. Blanchard 399.
- Cartier, Pierre (Dualité de Tannaka) 25.
- Case, K. M. (Duffin-Kemmer algebras) 218.
- —, Robert Karplus and C. N. Yang (Strange particles) 228.

- Case, K. M. s. P. A. Moldauer 219.
- Cassedy, Edward S. s. Jan M. Minkowski 212.
- Cassina, Ugo (Elementi della teoria degli insiemi. II.) 394.
- Castillejo, L., R. H. Dalitz and F. J. Dyson (Low's scattering equation) 226.
- Cavallaro, Vincenzo G. (Ettadecagono regolare) 161.
- Čečik (Chechik), V. A. (Ordinary differential equations with singularity) 309.
- Cejtin (Tseitin), G. S. (Properties of associative calculi) 9; (Insoluble equivalence problem) 9.
- Cellitti, Carlo (Velocità di efflusso di un liquido da una semisfera) 424.
- Černikov, S. N. (Nicht-verschwindende Lösungen eines linearen Gleichungssystems) 15; (Lineare Ungleichungen) 248.
- Černjaev, M. P. (K. A. Andreev) 243.
- — —, G. S. Barchin, A. K. Nikitin und K. K. Mokrišev (N. M. Nestorovič) 6.
- Černyj (Cherny), G. G. (Gas flow past bodies at supersonic speed) 206; (Motions of a perfect gas) 206.
- Chak, A. M. (Class of polynomials) 293.
- Chakrabarti, S. C. (Higher differences. III.) 305.
- Chalilov, Z. I. (Asymptotische Stabilität für partielle Differentialgleichungen) 320.
- Chambers, L. G. (Propagation in a gyrational medium) 440.
- Chandra Das, Sisir s. Das, Sisir Chandra 416.
- Chandrasekhar, S. (Theory of turbulence) 430.
- Chang, Su-Cheng (Isomorphisms of  $(\mu, \Delta, \gamma)$ -systems. I.) 182.
- Charcosset, C. s. H. L. Langhaar 403.
- Charpie, R. A., D. J. Hughes, D. J. Littler and J. Horowitz (Nuclear energy. Ser. I. Vol. 1) 228.
- Charrik, Ju. I. (Markovsche Ungleichung) 58.
- Čažalija, G. Ja. (Stationäre Bewegung einer Flüssigkeit in einem Rohr) 423.
- Chen, Y. W. (Discontinuity of quasi-linear differential equations) 318.
- Cherry, T. M. s. P. E. Lush 424.
- Chiang, C. L., J. L. Hodges jr. and J. Yerushalmy (Medical diagnoses) 152.
- Chilver, A. H. (Mise-Kunii theory of bridge vibrations) 418.
- Chintschin, A. J. s. P. S. Alexandroff 10.
- Chmelka, Fritz (Wärmespannungen in einem Prandtl-Reußschen Körper) 416.
- Chochlov, R. V. (Synchronisation zweier Eigenschwingungssysteme) 211.
- Choquet, Gustave et Jacques Deny (Théorie du potentiel. I.) 100.
- Chow, Hung Ching (Summability of derived Fourier series) 66.
- Chowla, S. and W. E. Mientka (Lattice points in an  $n$ -dimensional tetrahedron) 44.
- Christopher, John (Asymptotic density of  $k$ -dimensional sets) 41.
- Chu, L. J. s. J. A. Stratton 359.
- Chuchunajšvili, G. E. (Steigende Bilder des Hilbertschen Raumes) 177.
- Churchill, R. V. (Fourier cosine transforms) 108.
- Churchman, C. West (Problems of value measurement) 152.
- Cini, M. and S. Fubini (Fixed source meson theory) 447.
- Čistjakov, V. D. (Ideen Lobachevskijs) 5.
- Claringbold, P. J. (Within-animal bioassay) 150.
- Clark, R. S. (Conformal theory of a Riemannian space) 171.
- Clarke, L. E. (Inequalities involving upper and lower limits) 278.
- Clauser, Francis H. (Nonlinear systems) 312.
- Cohen, Haskell (Fixed points in products) 177.
- Cohn, P. M. (Complement of a direct summand of an Abelian group) 257.
- Richard M. (Invariant of difference field extensions) 270.
- Coimbra de Matos, A. (Produit direct) 30.
- Coish, H. R. (Infeld factorization) 217.
- Coles, Donald (Wake in the turbulent boundary layer) 429.
- Collatz, L., A. Meyer und W. Wetterling (Hamburger Integrieranlage „Integromat“) 356.
- Collin, R. E. (Reflection at a slotted dielectric interface) 214.
- Conner, P. E. (Neumann's problem for differential forms) 314.
- Conolly, B. W. (Integral transforms) 106.
- Conroy, M. F. (Plastic deformation of beams) 190.
- Constantinescu, V. N. (Écoulement laminaire des gaz en couches minces) 427.
- Conte, S. D. (Operational calculus of Gegenbauer transforms) 109.
- — — s. W. C. Royster 353.
- Contopoulos, George (Isophotes of ellipsoidal nebulae) 456.
- Conway, H. D. (Non-linear bending of thin circular rods) 417.
- Cooke, J. C. (Tranter's dual integral equations problem) 104.
- Corbató, F. J. s. J. A. Stratton 359.
- Cordes, H. O. (Inequality of G. Borg) 57; (Erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen) 96.
- Cornfield, Jerome (Statistical problem) 147.
- Corput, J. G. van der (Transformation of trigonometric sums) 276.
- Corson, H. H. s. L. Carlitz 272.
- Cossu, Aldo (Connessioni tensoriali per tensori doppi misti) 390.
- Costa, A. Almeida s. Almeida Costa, A. 28.
- Court, Nathan Altshiller (Might and plight of reasoning) 2; (Quatre sphères réelles deux à deux orthogonales) 381.
- Couty, Raymond (Inégalité relative aux espaces kählériens) 171.
- Cowling, V. F. (Analytic functions) 72.
- Cox, H. L. (Deflexion of a sprung rail) 413.
- — — and Paul H. Denke (Beam grid-works) 188.



- Coxeter, H. S. M. (Hyperbolic triangles) 380.
- Crausse, Etienne et Yves Poirier (Étude analogique d'infiltrations en milieux poreux anisotropes) 436.
- Creasy, Monica A. (Confidence limits for the gradient) 378.
- Crowe, D. W. ( $n$ -dimensional cube) 12.
- Cureton, Edward E. (Rank-biserial correlation) 144.
- Curtis, Charles W. (Modular Lie algebras. I.) 264.
- Curtiss, J. H. (Editor) (Symposia in Applied Mathematics. VI.) 350.
- — s. Herbert A. Meyer 134.
- Cypkin (Zypkin), Ja. (J.) Z. (S.) (Differenzgleichungen der Impuls- und Regeltechnik) 332.
- Czepa, Otto (Glaziologische Forschungen von M. Lagally) 6.
- Czwalina, A. (Mechanik des schwimmenden Körpers) 196.
- Dachija, S. A.** („Journal der Elementarmathematik“) 5.
- Daïovitch, Voïn (Résultante de fonctions analytiques) 295.
- Dalcher, Andreas (Unstetige stochastische Prozesse) 365.
- Dalitz, R. H. s. L. Castillejo 226.
- Danese, Arthur E. (Theorem of Merli) 67.
- Dantzig, D. van (Mathematics in modern society) 2; (Wasserbewegung unter dem Einfluß von Wind) 435.
- Darbo, Gabriele (Trasformazione dipendente da un parametro) 338.
- Darling, D. A. and P. Erdős (Maximum of normalized sums of random variables) 138.
- Darwin, J. H. (Estimator for birth and death process) 374.
- Das, Sisir Chandra (Rigid spherical inclusion in a semi-infinite elastic solid under stresses) 416.
- David, H. A. (Elementary theorem in probability) 373.
- Davidson, K. S. M. s. G. K. Batchelor 1.
- Davies, R. M. s. G. K. Batchelor 1.
- Roy O. (Hausdorff measure) 54; (Derivates of measurable functions) 56.
- Davis, Harold T., Walter Scott, George Springer and Daniel Resch (Differential equations) 80.
- Davydov, N. A. (Cesàrosche Methoden für Summierung) 288.
- De, J. (Equilibrium configuration of magnetic stars) 457.
- Decker, James L. (Human pilot and high-speed airplane) 358.
- Dedebant, Georges (Courant de la haute atmosphère) 459.
- DeGroff, H. M. (Viscous heating) 422.
- Dei, Carlo (Media aritmetica) 58.
- Delone, B. N. (Widerspruchsfreiheit der Planimetrie Lobačevskijs) 380.
- Demaria, Davide Carlo (Ricoprimenti finiti della superficie sferica) 394.
- Deming, W. Edwards (Simplifications of sampling design) 375.
- Dengler, Max A. (Transversale Wellen in Stäben und Platten) 419.
- Denjoy, Arnaud (Approximation des courbes rectifiables) 53; (Fonctions quasi analytiques) 58; (Fonction minkowskienne complexe) 289; (Fonction minkowskienne réelle) 290; (Allure asymptotique des fonctions entières) 297; (Ensembles parfaits cartésiens totalement discontinus) 403.
- Denke, Paul H. (Nonlinear problems in structural analysis) 417.
- — — s. Hugh L. Cox 188.
- Dennis, S. C. R. and G. Poots (Forced heat convection in laminar flow) 198.
- Deny, Jacques s. Gustave Choquet 100.
- Deo, B. B. s. S. P. Misra 225.
- Depman, I. Ja. (I. A. Littrov) 6.
- Derwidué, L. (Théorème de Tait et Thomson) 409.
- Descombes, Roger (Approximation diophantienne) 276.
- Destable, Pierre (Répartition des températures et pertes de chaleur dans le sol) 439.
- Destouches, J. L. (Aussagenkalkül der Experimentalaussagen) 245.
- Deuel, P. D. (Nomogram for factor analysis) 147.
- DeWitt, Bryce S. s. Alfred Reifman 219.
- Dezin, A. A. (Mixed problems for hyperbolic systems) 88.
- Dialinas, Jean s. Léopold Escande 436.
- Diamantopoulos, Th. (Höhere Ableitungen und Reziprokanten) 300.
- Diaz, J. B. (Singular and regular Cauchy problems. I.) 317.
- — — and G. S. S. Ludford (Theorem of Le Roux) 90.
- — — and L. E. Payne (Editors) (Conference of differential equations) 306.
- Dienst, Hans-Rudolf (Witwenrentenanwartschaft und Ehestandshäufigkeit) 155.
- Dingle, R. B. (Method of comparison equations) 82.
- Dismuke, Nancy M. s. Herbert A. Meyer 134.
- Dixmier, J. (Factorisations canoniques dans l'homologie) 36.
- Doetsch, Gustav (Laplace-Transformation. III.) 331; (Praktischer Gebrauch der Laplace-Transformation) 332; (Stabilitätsuntersuchung von Regelungsvorgängen) 332.
- Dolbeault, Pierre (Formes différentielles méromorphes localement exactes) 314.
- Dolph, C. L. and R. K. Ritt (Schwinger variational principles) 444.
- Dombrovskij (Dombrovsky), G. A. (Boundary problems for a supersonic motion of gas) 204.
- Domorjad, A. P. s. P. S. Alexandroff 10.
- Douglas, A. Vibert (A. S. Edington) 244.

- Douglas jr., Jim and H. H. Rachford jr. (Heat conduction problems) 354.
- Douglis, A. s. N. Aronszajn 313.
- Dowker, C. H. (Homotopy extension theorems) 182.
- — and W. Hurewicz (Dimension of metric spaces) 180.
- Yael Naim (Minimal sets in dynamical systems) 396.
- Downs, B. W. (Short-range correlations between protons) 232.
- Drazin, Michael s. Martin Beale 369.
- Dubjago, A. D. (veröffentlicht von) (Brief von K. F. Gauss) 6.
- Dubois, P. (Régimes de retraite par répartition et leur avenir. I. II.) 155.
- Duff, G. F. D. (Boundary value problems for hyperbolic equation) 92.
- Duffin, R. J. (Discrete analytic functions) 305.
- Dugué, Daniel (Théorème limité du calcul des probabilités) 138.
- Duleau, Jacques (Équations linéaires vectorielles) 125.
- Dumke, William P. (Deformation potential) 240.
- Dundučenko, L. E. (Analytische Funktionen) 74.
- Dunn, M. B. s. P. G. Kafka 188.
- Durfee, William H. (Heat flow in a fluid) 198.
- Durieu, M. (Parabole) 162.
- Duschek, Adalbert (Höhere Mathematik. I.) 277.
- Dutta, Mahadeb (New partition of numbers) 274.
- Dux, Erich (Divergenz der Reihe  $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{p_{\nu}}$ ) 42.
- Duyčev, J. (Prime ideals of degree 1) 36.
- Dvoretzky, Aryeh (Theorem of J. L. Walsh) 284.
- Dyer, Eldon (Transformations which lower dimension) 180.
- Dyson, F. J. s. L. Castillejo 226.
- Eason, G., J. Fulton and I. N. Sneddon (Generation of waves in an elastic solid) 194.
- Ebel, Ilse (Darstellungszahlen natürlicher Zahlen durch Formen) 43.
- Ecker, G. und W. Weizel (Atom im Inneren des Plasmas) 237.
- Eckert, E. R. G. and P. J. Schneider (Diffusion in an isothermal boundary layer) 201.
- Eckhardt, Homer D. (Frequency response analysis) 409.
- Edgett, George L. (Multiple regression with missing observations) 377.
- Edwards, David Albert (Intégrales de Fourier-Stieltjes) 107.
- Eells jr., James s. Charles B. Morrey jr. 99.
- Efimov, N. V. (N. I. Lobachevskij) 6.
- Éfros (Efros), D. A. (Method of viscosity likeness) 436; (Relative permeabilities) 436.
- Egan, M. F. (Harmonic logarithm) 42.
- Eggleston, H. G. (Bounded analytic functions) 72.
- Ehrenpreis, Leon (Kernels of Schwartz) 339.
- Ehresmann, Charles et Shih Weishu (Espaces feuilletés) 401.
- Éjdel'man, S. D. (Parabolische Systeme) 93; (Wärmeleitungsgleichung) 320.
- Éjds, D. M. (Ableitungen der Greenschen Funktion) 100.
- (Eidus), D. M. (Inequalities for characteristic functions) 326.
- Ekstein, H. (Time-dependent scattering) 220.
- — and T. Schiffman (Free vibrations of isotropic cubes) 418.
- El-Badry, M. A. (Sampling procedure for mailed questionnaires) 148.
- Elektronische Rechenmaschinen und Informationsverarbeitung 129.
- Elfvig, Erik Gustav (Optimale Allokation) 144.
- Elliott, David s. Ronald F. Probst 427.
- Joanne (Integro-differential operator of the Cauchy type) 331.
- Ellis, David (Description adequacy) 395.
- H. W. and Israel Halperin (Haar functions) 336.
- Ellison, T. H. s. G. K. Batchelor 1.
- Elsasser, W. M. (Hydromagnetic dynamo theory) 459.
- Enander, E. s. P.-O. Brundell 451.
- Endl, Kurt (Limitierungsverfahren) 60.
- Engel, Wolfgang (Endliche Gruppen von Cremona-transformationen) 384.
- Englman, R. and E. H. Sondheimer (Electrical conductivity of films) 239.
- Epstein, Bernard and Anne Scheerer (Generalized Green's function) 327.
- Erdélyi, A. (Asymptotic expansions) 290.
- Erdős, J. (Ordered real vector spaces) 336.
- P. and W. H. J. Fuchs (Problem of additive number theory) 41.
- — and A. C. Offord (Random algebraic equation) 17.
- — and A. Rényi (Combinatorial problems) 11; (Zeros of derivatives of analytic functions) 296.
- — s. D. A. Darling 138.
- Erëmin, I. I. (Knoten von linearen Ungleichungen) 15.
- Ericksen, W. S. (Bending and torsion of circular cylindrical cantilever beams) 412.
- Erismann, Th. (Kugelgetriebe) 358.
- Erwe, Friedhelm (Interpolationsaufgabe) 70.
- Escande, Léopold (Variations de la contre-pression) 208; (Étranglement pour chambre d'équilibre) 209; (Étranglement optimum) 209; (Chambres d'équilibre déversantes et cheminées à étranglement) 209; (Surpressions dans une conduite forcée) 209; (Surpression et dépression maxima) 209.
- — et Jean Dialinas (Chambres d'équilibre déversantes) 436.
- Espe, J. s. S. Skavlem 451.
- Estabrook, Frank B. (Two-group diffusion in slab lattice reactors) 233.
- Euteneuer, G. A. (Flüssigkeits-Hohlstrahlen) 199.
- Evans, Arwel (Continued fractions) 55.

- Evans, G. W., R. Brousseau and R. Keirstead (Stability considerations for difference equations) 128.
- Evgrafov, M. A. (Characteristic functions of operators) 349.
- Fabricius-Bjerre, Fr. (Theorems of J. Hjelmslev) 381.
- Facciotti, Guido (Parabola sulla sfera) 384.
- Faddeev, D. K. s. L. V. Kantorovič 6.
- Favier, Jean et Robert Thormelin (Mécanographie) 354.
- Fedorenko, B. V. (N. I. Lobachevskij) 6.
- — — s. G. F. Rybkin 6.
- Feenberg, Eugene s. Mark Bolsterli 229.
- — — s. Paul Goldhammer 221.
- Fejes Tóth, L. (Dünnste Horozyklenüberdeckung) 159; (Polyhedron in non-Euclidean spaces) 393.
- Feldman, Jacob (Nonseparability of finite factors) 120; (Embedding of  $AW^+$  algebras) 343; (Finite type II rings of operators) 343.
- Fel'dman, M. R. (Longitudinale Biegung eines Stabes) 190.
- Féret, Joseph Kampé de s. Kampé de Fériet, Joseph 368.
- Ferrar, W. L. (A. L. Dixon) 5; (Differential calculus) 56.
- Ferraris, Giulia Pozzolo s. Pozzolo Ferraris, Giulia 161.
- Ferrell, Richard A. (Energy loss of electrons passing through metal foils) 239.
- Fet, A. I. (Raum der analytischen Funktionen) 88.
- Février, Paulette (Interprétation de la mécanique ondulatoire) 216.
- Fieber, H. (Temperaturfeld in bewegten und zeitlich veränderlichen Bereichen) 438.
- — — und F. Selig (Temperaturfelder in endlichen Körpern) 438.
- Fierz, M. (Statistische Schwankungen in kondensierendem System) 437.
- Finkelstein, R. J. s. R. E. Behrends 224.
- Finn, Robert (Growth properties of solutions of elliptic equations) 322.
- Finston, Morton (Thin wedge in supersonic flow) 203.
- Fisher, Sir Ronald A. (Statistical methods and scientific inference) 369; (Test of significance in Pearson's Biometrika Tables (No. 11)) 373.
- Fišman, K. M. und I. V. Gel'man (Defektindex eines Hermiteschen Operators) 121.
- (Fishman), K. M. (Representation of meromorphic functions) 298.
- Fisz, M. (Grenzverteilungen der Multinomialverteilung) 138; (Stochastic processes) 140; (Discontinuous stochastic processes) 140.
- — — and K. Urbanik (Composed, non-homogeneous Poisson process) 365.
- Fitch, V. L. s. J. Ballam 448.
- Fladt, Kuno (Parallelenlehre) 158.
- Flanders, Harley (Methods of proof in linear algebra) 13.
- Fleckenstein, J. O. (Prioritätsstreit zwischen Leibniz und Newton) 4; (Descartes und die exakten Wissenschaften des Barock) 5.
- Fleischer, Isidore (Subdirect products) 263.
- Flemming, D. P. (Taylor expansion of rational functions) 354.
- Forray, M. J. and S. R. Bodner (Bending moments) 187.
- Forsythe, George E. (Use of high-speed computers) 129.
- Foster, Alfred L. (Ideals in classes of operational algebras) 28.
- Foulkes, H. O. (Theorems of Kakeya and Pólya) 251.
- Fowell, L. R. (Supersonic delta wing) 433.
- Fox, Charles (Kernels which possess integral transforms) 334.
- Martin (Power of the  $F$ -test) 373.
- Frank, Evelyn (Continued fraction expansions for ratios of hypergeometric functions) 294.
- Frank, R. M., J. L. Gammel and K. M. Watson (Optical model potential) 226.
- Frank-Kameneckij (Frank-Kamenetsky), D. A. s. G. M. Gandel'man (Gandel'man) 456.
- Fraser, D. A. S. (Wald-Wolfowitz-Hoeffding theorem) 364.
- — — — and Irwin Guttman (Tolerance regions) 372.
- Fréchet, Maurice (Paraanalytische Funktionen) 75.
- Frederick, Daniel (Bending of thick circular plates on elastic foundation) 416.
- Freudenthal, Hans (Enseignement en Hollande) 2.
- Freund, J. E. (Restricted occupancy theory) 12.
- Fridman, V. M. (Sukzessive Approximationen für Fredholmsche Integralgleichung) 328.
- Froda, Alexandre (Fonctions réelles dans un espace euclidien) 283.
- Fröhlich, A. and J. C. Shepherdson (Effective procedures in field theory) 35.
- H. and B. V. Paranjape (Dielectric breakdown in solids) 239.
- Frostman, O. (Mathematical education in swedish schools) 2.
- Fry, Thornton C. (Mathematics in industry) 241.
- Fubini, S. s. M. Cini 447.
- Fuchs, L. (Ringe und ihre additive Gruppe) 265.
- — — s. T. Szele 265.
- W. H. J. s. P. Erdős 41.
- Fuhrke, H. (Rahmenschwingungen) 419.
- Fujimoto, Y. s. E. J. Burge 230.
- Fujiwara, Kaichirô (Espace produit d'un espace topologique par lui-même) 396.
- Fulks, W. ( $\Gamma(z)$  at minus infinity) 293.
- Fuller, A. T. and R. H. Macmillan (Damping and natural frequency of linear systems) 307.
- Fulton, J. s. G. Eason 194.
- T. s. J. Ballam 448.
- Gadd, G. E. (Shock waves and entirely laminar boundary layers) 428.



- Gaddum, J. W. s. E. A. Nordhaus 185.
- Gaier, D. (Adamssches Extrapolationsverfahren) 126; (Äquivalenz der  $|B_k|$ -Verfahren) 287.
- Gajduk, Ju. M. (Ideen N. I. Lobačevskijs) 5.
- Gammel, J. L. s. R. M. Frank 226.
- Ganapathy Iyer, V. (Space of integral functions. IV.) 336.
- Gandel'man (Gandelman), G. M. and D. A. Frank-Kamenetskij (Frank-Kamenetsky) (Shock wave) 456.
- Ganea, Tudor (Revêtements et multicohérence) 178.
- Ganelius, Tord (Théorème taubérien pour la transformation de Laplace) 107.
- Garner, W. R. and William J. McGill (Information and variance analysis) 147.
- Garr, L., E. H. Lee and A. J. Wang (Plastic deformation in a deeply notched bar with semicircular roots) 417.
- Garza, A. de la (Recurring linear system) 127.
- Gasapina, Umberto (Similitudini piane) 161.
- Gaschütz, Wolfgang (Erzeugendenzahl und Existenz von  $p$ -Faktorgruppen) 22.
- Gasiorowicz, S., M. Neuman and R. J. Riddell jr. (Dynamics of ionized media) 236.
- Gaunin, J. (Tables trigonométriques. I. II.) 132.
- Gautschi, Walter (Bedingung von Picone) 101.
- Gazarchi, L. A. (Neues Integral des Dreikörperproblems) 407.
- Geidel, H. (Anwendung von Gleitmittelwertverfahren) 149.
- Geissler, D. (Proton-Proton-Streuung bei hohen Energien) 450; (Streuung am Kastenpotential) 451.
- Gelfand, I. M. (Eigenwerte eines Differentialoperators) 83.
- — — and M. I. Graev (Unitary representations of unimodular group) 261.
- — — and Z. Ja. (Ya.) Šapiro (Group of rotations of 3-dimensional space) 259.
- Gel'fer (Gelfer), S. A. (Coefficients of  $p$ -sheet functions) 71.
- Gelfond, A. O. (Abschätzungen gewisser Determinanten) 329.
- Gel'man, I. V. s. K. M. Fišman 121.
- Geppert, Maria-Pia (Stochastische Prozesse) 364.
- Geronimus, Ja. L. (Orthogonalpolynome) 63.
- Gervaise, Anne-Marie (Risque d'erreur dans un test d'hypothèse) 146.
- Gichman, I. I. s. B. V. Gnedenko 242.
- Gilbert, Edgar J. (Matching problem) 142.
- Gillman, L. ( $\eta_a$ -sets) 51.
- Girault, Maurice (Fonction caractéristique de  $|X|$ ) 137.
- Gładysz, S. (Ergodischer Satz) 140; (Stochastischer Ergodensatz) 140.
- Glantz, Herbert and Eric Reissner (Finite sum equations for boundary value problems) 127.
- Glaser, Walter (Elektronische Abbildung als Eigenwertproblem) 442.
- Glasko, V. B. (Problems on characteristic values) 307.
- Glauber, R. J. s. A. C. Zemann 232, 233.
- Glicksberg, Irving s. Richard Bellman 101.
- Gloden, A. (Systèmes multigrades remarquables) 39.
- Gluskin, L. M. (Halbgruppen von Matrixalgebren) 19.
- Gluškov, V. M. (Nilpotente Produkte topologischer Gruppen) 25.
- Gnedenko, B. W. (Herausgeber) (Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik) 134.
- — V. and I. B. Pogrebyskij (Mathematik in der Ukraine) 5.
- — — and I. I. Gichman (Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Ukraine) 242.
- Godeaux, Lucien (Surfaces dont le système canonique contient quatre composantes fixes) 165; (Points de diramation d'une surface multiple) 385; (Droites des surfaces cubiques) 386.
- Goebel, Charles J. (Pion-nucleon  $s$ -wave phase shifts) 226.
- Goffman, Casper (Compatible seminorms in a vector lattice) 110.
- Goffman, Casper and G. M. Petersen (Matrix summability methods) 59; (Consistent limitation methods) 286.
- Gołab, S. (Curvatures of higher orders) 167; (Centre of second curvature) 167.
- Goldberg, Karl (Formal power series for  $\log e^x e^y$ ) 252.
- Michael (Basic rotors in spherical polygons) 394.
- S. I. (Tensorfields and curvature in Hermitian manifolds) 171.
- Goldenberg, H. (Heat flow) 439.
- Goldhammer, Paul and Eugene Feenberg (Brillouin-Wigner perturbation method) 221.
- Goldie, A. W. (Decompositions of semi-simple rings) 30.
- Goldman, Malcolm ( $AW^*$ -algebras. I.) 119.
- Golovin, O. N. (Nilpotent products of groups) 254; (Metabelian products of groups) 254; (Isomorphisms of nilpotent decompositions of a group) 254.
- Gombás, P. (Wechselwirkung von schweren Atomkernen mit Nukleonen) 230.
- Gonçalves, J. Vicente s. Vicente Gonçalves, J. 17.
- Good, I. J. (Probability or statistics) 133.
- — — and G. H. Toulmin (Number of new species) 144.
- Goodier, J. N. and W. E. Jahsman (Rotary disturbance in an elastic plate) 195.
- Goodman, Theodore R. (Waterdrop impingement) 200.
- Goodstein, R. L. (Constructivist theory of plane curves) 10.
- Goodwin, E. T. (Highly oscillatory integrals) 354.
- Goormaghtigh, R. (Théorème de Carnot) 380.
- Gorbunov, A. D. (Charakteristische Exponenten der Lösungen von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen) 86.
- Gorman, Charles David (Recurrent flows) 396.

- Gorškov, D. S. (Algebraische Irrationalitäten) 45.
- Görtler, H. (Berechnung laminarer Grenzschichten) 426.
- Gosselin, Richard P. (Fourier series of functions in an  $L^p$  class) 292.
- Gotô, Ken-iti (Quantization of non-linear fields) 446.
- Gracianskaja, L. N. (V. P. Ermakov) 5.
- Gradštein (Gradštein), I. S. (Hyperbolic differential equations) 89.
- Graev, M. I. s. I. M. Gel'fand 261.
- Gram, Christian (Construction of the centre of a circle) 161.
- Grammel, Richard und Hans Ziegler (Symmetrischer Kardankreis) 408.
- Grandmontagne, Raymond (Miroir sphérique incliné) 214.
- Grant, Alison M. s. J. R. Bainbridge 147.
- Gras, François (Équations réglant l'écoulement d'un fluide) 423.
- Grauert, Hans (Théorème de Runge) 183.
- — und Reinhold Remmert (Plurisubharmonische Funktionen) 304.
- Graves, Lawrence M. (Functions of real variables) 52.
- Gravett, K. A. H. (Characterization of frontier) 176.
- Graybill, Franklin A. and A. W. Wortham (Unbiased estimators for variance components) 145.
- Green, A. E. (Hypo-elasticity and plasticity. I.) 190; (II.) 417; (Hypo-elastic body) 417.
- H. L. s. G. K. Batchelor 1.
- H. S. (Irreversible processes in fluids) 437.
- Greinacher, Heinrich (Druck in Ultrazentrifugen) 208.
- Greniewski, Marek (Utilisation des logiques trivalentes dans la théorie des mécanismes automatiques. I.) 211.
- Grobman, D. M. (Nonlinear systems) 312.
- Gröbner, Wolfgang (Matrizenrechnung) 12.
- Groot, J. de (Mutually non-differentiable functions) 56.
- Gross, Oliver s. Richard Bellman 101.
- Grossman, D. P. (Eigenwerte des Laplaceschen Operators) 128; (First boundary problem for elliptical equations) 352.
- Grosswald, Emil (Average order of an arithmetic function) 275.
- Grötzsch, Herbert (Diskrete Gebilde. I.) 184.
- Gruat, Jean (Cheminées d'équilibre à section constante) 436.
- Grümm, H. (Elektrostatische Felder) 214, 215; (Abbildung durch reflektierte Elektronen) 442.
- — und H. Spurny (Elektronenoptische Ablenkfelder) 442.
- Grün, Franz s. Eduard Batschelet 353.
- Gubler, Hermann (Zinsfußproblem) 155.
- Guderley, Gottfried (Tricomi's differential equation) 319.
- Guérindon, Jean (Équivalences en théorie des idéaux) 267.
- Gugenheim, V. K. A. M. and D. C. Spencer (Chain homotopy and de Rham theory) 401.
- Guinnee, Paul et Fernand Bouniol (Détermination du champ de vitesses en aval d'un choc détaché) 435.
- Guinand, A. P. (Matrices associated with transformations) 108.
- Gulati, R. L. (Sequentielle Tests für Korrelationskoeffizienten) 377.
- Gulliksen, Harold (Measurement of subjective values) 154; (Paired comparisons with incomplete data) 371.
- Gumenjuk, V. S. (Freie Schwingungen orthotroper Platten) 192; (Freie Schwingungen von Platten veränderlicher Dicke) 192.
- Gutman, D. S. (N. I. Lobačevskij) 6.
- Guttman, Irwin s. D. A. S. Fraser 372.
- Gyires, B. (Toeplitzsche Matrizen) 13.
- Haantjes, J. (In memoriam) 244.
- Haar, D. ter (Transport properties of metals) 239.
- Haáz, I. B. (Généralisation du théorème de Simmons) 362.
- Habicht, Helga s. B. L. van der Waerden 241.
- Haefliger, André (Extension du groupe structural d'un espace fibré) 400.
- Hahn, Wolfgang (Nichtlineare Regelungsvorgänge) 357.
- Hain, Klaus (Wechselwirkung zweier starker eindimensionaler Stoßwellen) 434.
- Hajnal, J. (Ergodic properties of Markov chains) 139.
- Haldane, J. B. S. (Wilcoxon tests) 145; (Logarithm of a ratio of frequencies) 146.
- — — and Sheila Maynard Smith (Maximum-likelihood estimate) 374.
- Hall, I. M. (Displacement effect of a sphere) 424.
- Hallert, B. (Genauigkeit der Luftphotogrammetrie) 186.
- Hällström, Gunnar af (Automorphiefunktionen und Flächentypus) 302.
- Halmos, Paul R. (Basic concepts of algebraic logic) 245.
- Halperin, Israel s. H. W. Ellis 336.
- Hamel, Georg (Mechanik der Kontinua) 195.
- Hamilton, H. J. (Uniform circular motion is singular) 358.
- Hammer, P. C., O. J. Marlowe and A. H. Stroud (Numerical integration over simplexes and cones) 354.
- — — and Arthur H. Stroud (Numerical integration over simplexes) 354.
- Hämmerlin, Günther (Dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten) 427.
- Hammersley, J. M. (Area enclosed by Pólya's walk) 141.
- Hampel, R. ( $x^m - y^n = 1$ ) 272.
- Handelman, G. H. s. W. H. Warner 238.
- Hanner, Olof (Intersections of translates of convex bodies) 393.
- Hano, Jun-ichi and Hideki Ozeki (Holonomy groups of linear connections) 389.
- Hanš, O. (Generalized random variables) 363.

- Harary, Frank (*n*-balance in signed graphs) 185.
- Harish-Chandra (Representations of semisimple Lie groups) 116; (Lemma of F. Bruhat) 260.
- Harley, B. I. (Angular transformation for correlation coefficient) 376.
- Harrop, R. and J. D. Weston (Locally convex spaces) 334.
- Hartenberg, Richard S. (B. Robins) 7.
- Hartman, Philip (Local behavior of solutions of  $Vu = g(x, u, Vu)$ ) 324.
- and Aurel Wintner (Perturbations of linear systems of ordinary differential equations) 312.
- Hatano, Shigeaki and Tadashi Kaneno (Exchange magnetic moment of two nucleon system) 231.
- Haupt, O. (Algebra. I.) 10.
- Hawthorne, W. R. (Secondary circulation in frictionless flow) 199.
- Hazon, Dov (Deflection of inelastic columns) 187.
- Heber, G. (Elementarteilchen. II.) 227; (III.) 450.
- Heidenhain, H. (Einfluß einer Endmasse und Endfeder auf die Frequenz-Amplituden-Abhängigkeit) 419.
- Heider, L. J. (Limits on rings of continuous functions) 340; (Function-lattices) 340.
- Heinrich, G. (Stabilität der Strickleiter) 411.
- H. (Vorbehandlung algebraischer Gleichungen) 350.
- Heins, Albert E. (Method of Wiener and Hopf) 326.
- Heisenberg, W. (Erweiterungen des Hilbert-Raumes) 220; (Bemerkungen zur „neuen Tamm-Dancoff-Methode“) 445.
- Hejzmanek, Johann (Klasseneinteilung der Sternkörper) 275.
- Helfenstein, Heinz G. (Ovals) 175; (Discontinuity surface by wave reflection) 441.
- Hellwig, Günther (Partielle Differentialgleichungen mit Singularitäten) 317.
- Herbst, Robert Taylor (Linear and nonlinear differential equations) 307.
- Herdan, G. (Language as choice and chance) 148; (Neuer statistischer Parameter) 371.
- Hernandez, Enrique Juan y s. Juan y Hernandez, Enrique 344.
- Herring, Conyers and Erich Vogt (Transport and deformation-potential theory for semiconductors) 240.
- Herschel, Rudolf s. Gustav Doetsch 332.
- Herz, Carl S. (Spectral synthesis for Cantor set) 108.
- Herzog, Fritz and George Piranian (Fejér polynomials) 293; (Point sets associated with Taylor series) 295.
- Hess, Adrien L. (Constructions with straightedge and compasses) 161.
- Heyting, A. (Intuitionism) 8.
- Hijab, Wasfi A. (Effect of shape on orthotropic characteristics) 413.
- Hildebrand, F. B. (Numerical analysis) 124.
- Hill, R. and G. Power (Extremum principles for slow viscous flow) 420.
- — s. G. K. Batchelor 1.
- Hillman, A. P. (Matrix characteristic value problem) 422.
- Hilton, P. J. (Tensor product of modules) 257.
- Hines, Jerome (Generalization of the S-Stirling numbers) 62.
- Hiong, King-Lai (Fonctions méromorphes) 72; (Relations identiques entre des fonctions entières) 297.
- Hirzebruch, H. (Topologische Methoden in algebraischer Geometrie) 163.
- Hittmair, O. (Stripping-Reaktionen virtueller Niveaus) 452; (Schalenmodellkopplung) 452.
- Hochschild, G. (Lie algebra kernels) 265; (Relative homological algebra) 269.
- Hodge jr., P. G. (Stress functions for rotating plates) 415.
- Hodges, J. H. (Matrix equation  $AX = B$ ) 17.
- jr., J. L. s. C. L. Chiang 152.
- Hoff, N. J. (Reduction in torsional rigidity and torsional buckling of solid wings) 416; (Radiant and conductive heat transfer in supersonic wing) 432.
- Hoffmann, W. s. Elektronische Rechenmaschinen und Informationsverarbeitung) 129.
- — s. A. Walther 129.
- — (Literaturbericht über Rechenautomaten) 129.
- Hogben, Lancelot (Zahl und Zufall) 133.
- Hoheisel, Guido (Gewöhnliche Differentialgleichungen) 81.
- Hohenberg, Fritz (Konstruktive Geometrie) 185.
- Hölder, E. s. C. Carathéodory 316.
- Holladay, John and Andrew Sobczyk (Equivalent condition for uniform convergence) 178.
- Holliday, P. T. s. W. J. Oakes jr. 423.
- Hollyer jr., Robert N. (Shock tube. I.) 207.
- Holmann, Harald (Abbildungstheorie *n*-dimensionaler Mannigfaltigkeiten) 303.
- Hope, J. and L. W. Longdon (Tensor operator methods) 229.
- Hoppe, J. (Physikalische Theorie der Meteore) 458.
- Horgan, R. B. (Radix tables for  $\sin x$  and  $\cos x$ ) 132.
- Horner, J. T. s. J. L. Bogdanoff 194.
- Hornfeck, Bernhard (Basen mit paarweise teilerfremden Elementen) 41.
- Hornich, H. (Hyperbolische Differentialgleichungen) 316; (Nirgends lösbare lineare partielle Differentialgleichungen) 316.
- Horowitz, J. (Réactions de „stripping“) 452.
- — s. R. A. Charpie 128.
- Horst, Paul and Charlotte MacEwan (Optimal test length) 371.
- Hort, Wilhelm (Differentialgleichungen) 80.
- Horváth, J. (Singular integral operations and spherical harmonics) 338.
- Horvay, G., C. Linkous and J. S. Born (Short thin axisymmetrical shells under axisymmetrical edge loading) 413.
- Hoskin, M. A. (Valuation ideals associated with curve branches) 164.
- Hossain, A. s. E. J. Burge 230.



- Hosszú, Miklós (Analytic half-groups) 25.
- Houdaille, L. s. J. Gaunin 132.
- Howard, L. N. and D. L. Matthews (Vortices produced in shock diffraction) 434.
- Hsiung, Chuan-Chih (Theorem on surfaces with a closed boundary) 168.
- Huang, K. s. J. Ballam 448.
- Kerson (Self-energy of Dirac particles) 223.
- Huber, A. (Erstarrungsproblem) 418.
- Huber, Alfred (Functions subharmonic in a half-space) 305.
- Hudson, G. E. and D. H. Potts (Maxwell's equations) 209.
- Huffington jr., N. J. (Rigidity of orthogonally stiffened plates) 413.
- Hughes, D. J. s. R. A. Charnie 228.
- Hulanicki, A. (Abelian groups which admit compact topologies) 25.
- Hung Ching Chow s. Chow, Hung-Ching 66.
- Hunger, Kurt (Wachstumskurven) 457.
- Hunt, G. A. (Concerning Brownian motion) 366.
- Hunter, M. W., A. Shef and D. V. Black (Fin-stabilized free-flight missiles) 407.
- Huppert, Bertram (Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen, III.) 21.
- Hurewicz, W. s. C. H. Dwyer 180.
- Hurley, D. G. (Downstream effect) 201.
- Hurwicz, Leonid s. Kenneth J. Arrow 58.
- Huse, Marjorie s. R. A. Rubenstein 127.
- Ibrahim, Ali A. K. and Abdel Monem I. Kabil (Coefficient of viscosity of Newtonian liquids) 421.
- Igusa, Jun-ichi (Analytic groups over complete fields) 260.
- Ikenberry, E. and C. Truesdell (Pressures and flux of energy in a gas. I.) 235.
- Il'in, A. M. (Ausartende Gleichungen) 93.
- V. A. (Entwickelbarkeit nach Eigenfunktionen) 63.
- Infeld, L. and J. Plebański (Equations of motion in classical electrodynamics) 443.
- Ingraham, Richard (Maxwell theory) 227.
- Inozemcev, O. I. und V. A. Marčenko (Majoranten von der Ordnung Null) 62.
- Iochvidov, I. S. und M. G. Krejn (Spektraltheorie von Operatoren) 123.
- Ionescu Tulcea, C. T. s. O. Onicescu 360.
- Ippen, Arthur T. (Hydrodynamics) 196.
- Isay, W.-H. (Strömung durch Voith-Schneider-Propeller) 425.
- Iséki, Kiyoshi (Lebesgue property in uniform spaces) 396.
- — and Yasue Miyanaga (Topological spaces. III.) 28.
- Ishiguro, Eiichi s. Michiko Sakamoto 234.
- İşlinski, A. Ju. (Flußbettströmungen) 208.
- Iyer, V. Ganapathy s. Ganapathy Iyer, V. 336.
- Jacobs, Konrad (Ergodentheorie) 117.
- Jacobsthal, Ernst (Zur Arbeit des Herrn Bieberbach über Kreisbogendreiecke) 286; (Borelscher Überdeckungssatz) 398.
- Jacoby, Robb (Transformation groups of three-sphere) 401.
- Jaekel, K. (Eigenwertproblem normaler Matrizen) 13; (Matrizentransformation mit Dreiecksmatrizen) 247.
- Jaeger, J. C. (H. S. Carslaw) 244; (Temperature in radial heat flow) 439.
- Jaglom, I. M. und W. G. (V. G.) Boltjanski(j) (Konvexe Figuren) 175.
- Jahsman, W. E. s. J. N. Goodier 195.
- Jakunin, P. F. (N. I. Lobachevskij) 6.
- James, G. S. s. W. H. Trickett 373.
- Jamitzter, Wentzel (Perspectiva Corporum Regularium) 4.
- Jancel, Raymond (Théorème  $H$  en mécanique quantique) 437.
- Jánossy, L. und K. Nagy (Einsteinsches Paradoxon) 216.
- Janov, Ju. I. (Transformationen von Programmen) 9.
- Janovskaja, Sof'ja Aleksandrovna (Zum sechzigsten Geburtstag) 6.
- — — s. A. I. Markuševič 6.
- Janowski, W. (Coefficients  $A_2$  et  $A_3$  des fonctions univalentes) 73; (Coefficients  $B_2$  et  $B_3$  des fonctions univalentes) 73; (Fonctions univalentes bornées) 73; (Fonctions univalentes  $K$ -symétriques) 73.
- Jaspen, Nathan (Machine computation of higher moments) 356.
- Jaworowski, J. W. and K. Moszyński (Mappings of the sphere) 183.
- Jeffreys, Harold (Asymptotic approximations of Green's type) 127.
- Sir Harold and Bertha Swirls (Methods of mathematical physics) 404.
- Jerison, M. and G. Rabson (Convergence theorems) 116.
- Johnson, Kenneth A. (Renormalization of the mass operator) 220.
- Millard W. and Eric Reissner (Inextensional deformations of elastic shells) 193.
- R. E. and D. N. Morris (Elementary statistical formulae) 370.
- jr., Guy (Singularities of family of analytic functions) 297.
- Johnston, E. Russell s. Ferdinand D. Beer 405.
- Jones, Howard L. (Random subsample means) 375.
- Joos, G. und Th. Kaluza (Mathematik für den Praktiker) 277.
- Jordan, Peter F. (Flattern von Beplankungen) 201.
- Jørgensen, Vilhelm (Inequality for the hyperbolic measure) 299.
- Juan y Hernandez, Enrique (Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen) 344.
- Julia, Gaston (F. Riesz) 6; (Edmund Whittaker) 7.
- Jurkat, W. s. R. Bojanić 107.
- Wolfgang B. (O-Taubersätze bei Potenzreihen) 70.
- Juščenko, A. A. (Schwingungen eines elastisch-zähen Fadens) 191.

- Kabal'skij, M. M., V. D. Krivošej, N. I. Savickij und G. N. Čajkovskij (Aufgaben zur theoretischen Mechanik) 404.
- Kabel, Abdel Monem I. s. Ali A. K. Ibrahim 421.
- Kačanov (Kachanov), L. M. (Stability of thin-walled bars) 417.
- Kafka, P. G. and M. B. Dunn (Stiffness of tubes) 188.
- Kagan, V. F. s. N. I. Lobačevskij 379.
- Kahn, Herman s. Herbert A. Meyer 134.
- Kainer, Julian H. (Triangular wings) 204.
- Kalašnikov, M. D. (Annäherung durch trigonometrische Polynome) 64.
- Kalichman, L. E. (Turbulente Grenzschicht an einer Platte) 202; (Gleichungen der turbulenten Grenzschicht) 202.
- Kalitzin, Nikola St. (Wechselwirkung des Nukleons mit Mesonfeld) 447.
- Kaltofen, Herbert (Physiologische Vorgänge) 149.
- Kaloujnine, L. s. B. W. Gnedenko 134.
- Kaluza, Th. s. G. Joos 277.
- Kammerer, Albert (Problème concernant un massif supportant une charge) 188.
- Kämmerer, C. (Reibungsbeiwert und adiabater Wirkungsgrad für Verdichtungsduße) 424.
- Kampé de Fériet, Joseph (Intégrales aléatoires de l'équation de la diffusion) 368.
- Kane, T. R. and R. D. Mindlin (High-frequency vibrations of plates) 193.
- Kaneno, Tadashi s. Shigeaki Hatano 231.
- Kangro, G. (Peyerimhoff's method) 288.
- Kanngiesser, W. (Grenzwertsätze für Übergangswahrscheinlichkeiten) 364.
- Kanters, P. J. A. (Problème de renouvellement) 154.
- Kantorovič, L. V. und D. K. Faddeev (I. P. Natanson) 6.
- Kaplan, Samuel (Biorthogonality and integration) 112.
- Wilfried (Approximation by entire functions) 62.
- Karamata, J. (Suite de fonctionnelles linéaires) 113.
- Karapetjan (Karapetian), K. I. (Cauchy problem for equation degenerating on the initial plane) 91.
- Karibskij (Karibsky), V. V. (Industrial regulators) 132.
- Karlin, Samuel and Herman Rubin (Decision procedures for distributions) 372.
- Karol', I. L. (Randwertaufgaben für Gleichungen vom elliptisch-hyperbolischen Typus) 92.
- Karp, S. N. and A. Russek (Diffraction by a wide slit) 441.
- — — s. J. Bazer 424.
- Karpelevič (Karpelevich), F. I. and A. L. Oniščik (Ohnishchik) (Algebra of loops space homologies) 182.
- Karplus, Robert s. K. M. Case 228.
- Karpman, Gilbert (Onde de compression dans un fluide contenu dans un tore) 424.
- Kasch, Friedrich (Dichte von Summenmengen, II.) 273.
- Kašjankov (Kasiankov), P. P. (Electron beams focusing) 215.
- Kästner, Siegfried (Reflexionsvermögen eines Schichtsystems visko-elastischer Medien) 435.
- Kato, Tosio (Linear differential equations in Banach spaces) 346.
- Katz, Leo and Thurlow R. Wilson (Number of mutual choices in sociometry) 142.
- Kautny, Walter (Geometrie des harmonischen Umschwungs) 166.
- Kay, Irvin s. Joseph B. Keller 219.
- Kazakevič (Kazakevich), V. V. (Phase planes of Rayleigh's equation) 83.
- Kazimirov, V. I. (Halbstetigkeit der Integrale der Variationsrechnung) 102.
- Keeping, E. S. (Statistical decisions) 372.
- Keirstead, R. s. G. W. Evans 128.
- Keller, Geoffrey (Astronomical scintillation and atmospheric turbulence) 454.
- Joseph B. (Electrohydrodynamics. I.) 442.
- — —, Irvin Kay and Jerry Shmoys (Determination of potential from scattering data) 219.
- Kendall, David G. (Epidemics in closed populations) 151.
- M. G. (A. Watson memorial lecture) 156; (History of probability and statistics. II.) 361.
- Keogh, F. R. (Fourier-Stieltjes series) 66.
- Kerner, E. H. (Band structure of lattices) 238.
- Kertész, Andor (T. Szele) 7.
- Kertz, Walter (Thermische Erregungsquelle der atmosphärischen Gezeiten) 459.
- Kessenich, A. V. and N. M. Pomerancev (Magnetische Resonanz von Atomkernen) 231.
- Kestin, J. s. Arnold Sommerfeld 436.
- Keune, Friedrich (Kompressibilitätseinfluß bei Machzahl Eins) 205; (Schallnahe Strömung um verwundene und gewölbte dünne Flügel) 433.
- Kibbey, Donald E. s. Harry W. Reddick 306.
- Kiefer, J. and J. Wolfowitz (Characteristics of queuing process) 366.
- Kießler, Fritz (Nomographisches Rechnen) 129.
- Kimura, Naoki and Takayuki Tamura (Compact mob) 260.
- Kiriščev, R. I. (Satz von D. D. Morduchaj-Boltovskoj) 158.
- Kirschmer, Gottlob s. Lancelot Hogben 133.
- Kisdi, D. (Konstanten des Kernes  $^{208}\text{Pb}$ ) 230.
- Kiselev, A. A. (Instationäre Strömung einer zähen Flüssigkeit) 197.
- Kita, Hideji (Heisenberg's nonlinear field theory) 222.
- Klaf, A. Albert (Calculus refresher) 278; (Trigonometry refresher) 382.
- Klee jr., V. L. (Topological properties of normed linear spaces) 111; (Structure of semispaces) 392.
- Klein, Abraham (Low scattering formalism) 226.
- F. (Problems of elementary geometry) 380.
- Martin J. (Entropy and the Ehrenfest urn model) 436.

- Klingen, Helmut (Erzeugende gewisser Modulgruppen) 259.
- Knaster, B. (Fixation des décompositions) 177.
- Kneser, Martin (Orthogonale Gruppen) 258.
- Knight, B. E. (Relaxation methods) 351.
- Knopp, Konrad (Infinite sequences and series) 58.
- Kochanowsky, W. (Reynoldsche Theorie der Schmiermittelreibung) 420.
- Kochendörffer, Rudolf (Multiplikator einer Gruppe) 256.
- Kogan, Abraham (Inviscid flow near an airfoil leading edge) 433.
- S. A. (Probleme aus der Theorie der Verbände) 263.
- Koksma, J. F. (Les suites  $(\lambda_n x)$  et les fonctions  $g(t) \in L^{(2)}$ ) 284.
- Kolmogorov, A. N. (Asymptotic characteristics of metric spaces) 115; (Continuous functions of several variables) 283.
- — — und S. B. Stečkin (S. M. Nikol'skij) 6.
- Kolodner, I. I. (Boundary problem for heat equation. I.) 438.
- Kompaneec, A. S. (Problem of shock wave development) 207.
- Kondô, Motokiti (Nommabilité d'ensembles) 278; (Nombres réels et nommables) 278; (Analyses relatives) 278; (Notion du transfini) 278; (Continu projectif) 278.
- König, H. W. (Energiedichte und Leistungsfluß in Elektronenströmungen) 214.
- Heinz (Unstetige Funktionen) 56.
- Kopal, Zdeněk (edited by) (Astronomical optics and related subjects) 453.
- Koppe, H. (Spinrichtung in Diracscher Theorie) 218.
- Kopzon (Kopson), G. I. (Vibration of elastic bodies in a gas stream) 191; (Vibration of a wing-shell) 191.
- Korn, Granino A. and Theresa M. Korn (Electronic analog computers) 355.
- Theresa M. s. Granino A. Korn 355.
- Korneva, L. A. s. V. V. Šulejkin 212.
- Korshenewsky, N. v. s. Torbern Laurent 210.
- Koschmieder, Erwin (Mathematisierung der Sprachwissenschaft) 2.
- Koteljanskij, D. M. (Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale) 248.
- Kotel'nikov, A. K. (Elektromagnetische Energiewellen in Wellenleitern) 213.
- Köthe, Gottfried (Topologische Vektorräume) 334.
- Kovacs, Julius S. (Meson production in nucleon-nucleon collisions) 227.
- Kovács, László (Regular rings) 265.
- Kovalev (Kovalew), I. F. and L. S. Majane (Majanz) (Partial derivative computations) 125.
- Krabbe, G. L. (Spectral isomorphisms for some rings) 120.
- Králik, D. (Integrale und Derivierte gebrochener Ordnung) 65.
- Krall, Giulio (Problema centrale della dinamica sui ponti) 407.
- Kramer, Gustav (Konversionskoeffizienten) 453.
- Krasner, M. (Corps valués. I. II.) 32.
- Krasnosel'skij, M. A. (Angenäherte Berechnung der Eigenwerte einer positiv definiten Matrix) 14; (Randwertaufgabe) 84; (Topologische Methoden der nicht-linearen Integralgleichungen) 330.
- — — und S. G. Krejn (Eindeutigkeitssätze für  $y' = f(x, y)$ ) 81.
- Krasnov, M. L. (Boundary problem and Cauchy problem for hyperbolic equations) 91.
- Krasovskij, N. N. (Zweite Methode von Ljapunov) 311.
- Krejn, M. G. s. I. S. Iochvidov 123.
- S. G. s. M. A. Krasnosel'skij 81.
- Krejtn, Ja. L. (Mengen, die von  $\Phi$ -Mengen effektiv verschieden sind) 51.
- Kreyszig, Erwin (Differential equations and their singularities) 321.
- Krivošej, V. D. s. M. M. Kabaľskij 404.
- Królikowski, W. and J. Rzewuski („Potentials“ in quantized fields) 446.
- Kroll, Norman M. s. Eyvind H. Wichmann 224.
- Kručkovič (Kruchkovich), G. I. (Decomposition of a Riemannian space) 170.
- Krull, Wolfgang (Primäre Integritätsbereiche) 34; (Geordnete Gruppen von reellen Funktionen) 49.
- Kruskal jr., Joseph B. (Shortest spanning subtree of a graph) 184.
- Krzywicki, A. (Force latérale exercée sur un obstacle par un liquide) 201; (Force frontale exercée sur un obstacle par un liquide) 201.
- Krzywoblocki, M. Z. E. (Bergman's linear integral operator method) 423.
- M. Z. v. and G. Shinosaki (Drag of bodies in free molecule flow) 426.
- Kubiljus, I. P. und Ju. V. Linnik (Satz der Primzahltheorie) 42.
- Kudo, Tatsuji (Transgression theorem) 400.
- —, Shunji Mukohda and Shiroshi Saito (Reduction formulas for Steenrod's  $D_i$ ) 400.
- Kudrjavcev (Kudrjajtsev), L. D. (Solution by variation method of elliptical equations) 324.
- Kuhn, H. W. (Note on „the law of supply and demand“) 156; (Linear equations and inequalities) 250.
- Kulikov, L. Ja. (Direkte Zerlegungen einer abelschen Gruppe) 24.
- Kümmel, Hermann (Irreversibilität und Quantentheorie) 437.
- Kunii, S. s. K. Mise 418.
- Kuntzmann, Jean (Méthode de Runge-Kutta) 351.
- Kunugi, Kinjiro (Méthode des espaces rangés) 281.
- Künzi, Hans (Viertelsenden Riemannscher Flächen) 75.
- — P. (Konforme Abbildung) 301; (Théorème de M. J. Malmquist) 307.
- Kuo, Y. H. (Viscous flow along a plate moving at supersonic speeds) 205.
- Kupradze (Kupradse), V. (W.) D. (Randwertaufga-



- ben der Schwingungstheorie) 97.
- Kuratowski, K. (Connected domains in locally connected spaces) 178.
- Küssner, Hans Georg (Tragflächentheorie im Unterschallgebiet) 425.
- Kuttner, B. („Translativity“ for Hausdorff summability) 61.
- Kutuzov, A. I. s. B. A. Azimov 187.
- Kužmina (Kuzmina), A. L. (Polynomials orthogonal on a unit circle) 63.
- Kuzovkov (Kusovkov), N. T. (Regions of stability) 131.
- Lachmann, Gustav Viktor (Induzierte Zirkulationen) 200.
- Ladyženskaja (Ladyzhenskaya), O. A. (Boundary problem for quasilinear parabolic equations) 94.
- Lah, Ivo (Analytical graduation of fertility rates) 150.
- Laha, R. G. (Normal and gamma distributions) 137; (Stable law with finite expectation) 362.
- Lakshmana Rao, S. K. s. Rao, S. K. Lakshmana 421.
- Lambek, J. and L. Moser (Rational analogues of logarithm function) 42.
- Lambin, N. V. (Symmetrielinien von Riemannschen Flächen) 302.
- Lampariello, Giovanni (Von Galilei zu Einstein) 404.
- Lamprecht, Erich (Zetafunktionen) 36; (Bewertungssysteme und Zetafunktionen, I.) 37.
- Landé, Alfred ( $\psi$  superposition and quantum rules) 217.
- Landis, E. M. (Set of points with infinite derivative) 56; (Lösungen elliptischer Gleichungen) 95; (Phragmen-Lindelöf principle) 324.
- Landsberg, Max (Lineare topologische Räume) 113.
- Lane, Frank (Flutter of compressor blade rows) 208.
- s. Chi-Teh Wang 208.
- N. D. and P. Scherk (Differentiable points in the conformal plane) 391.
- — — and F. A. Sherk (Differentiable points of arcs) 173.
- Lane, W. R. s. G. K. Batchelor 1.
- Langhaar, H. L. (Analyse dimensionnelle) 403.
- Larras, Jean (Primarité des nombres de Fermat) 272.
- Larsson, D. F. (Inégalités de la théorie des nombres) 40.
- Latta, G. E. (Class of integral equations) 329.
- Latyševa, K. Ja. (Arbeiten V. P. Ermakovs) 79.
- Laugwitz, Delf (Geometrie der Finsler-Räume) 172; (Abbildungssatz von B. Sz.-Nagy) 173; (Invarianz quadratischer Formen) 382.
- Laurent, Torbern (Vierpoltheorie) 210.
- Lavrent'ev, M. M. (Inverse Aufgabe der Potentialtheorie) 101; (Randwertaufgabe für hyperbolisches System) 104.
- Lawley, D. N. (Tests of significance for latent roots) 376.
- Lebesgue, Henri (Oeuvre mathématique de Vandermonde) 244.
- Leconte, Th. (Correspondance de Henri Lebesgue) 5.
- Lee, C. Y. (Pseudo-analytic functions) 96.
- E. H. s. L. Garr 417.
- Leech, John (Problem of thirteen spheres) 176.
- Leeuw, K. de and H. Mirkil (Intrinsic algebras on the torus) 342.
- Legendre, Robert (Écoulement supersonique) 204; (Remous au bord d'attaque d'un profil d'aile) 425.
- Lehmann (Leman), J. (I.) (Small programm-controlled automatic computers in Dresden) 129.
- Lehner, Joseph (Operator arising in the theory of neutron diffusion) 453.
- — and G. Milton Wing (Boltzmann transport equation) 347.
- Leicht, J. (Reduzible quadratische Formen) 386.
- Lelong, Pierre (Fonction plurisousharmonique) 76.
- Lemaître, G. (Intégration par analyse harmonique) 351.
- Lemmlejn, V. G. ( $n$ -dimensionales Simplex) 160.
- Lenz, Hanfried (Flächen zweiter Ordnung) 157.
- Leonov, Ju. P. (Filtration of random functions) 365.
- Lepore, Joseph V. (Isotopic spin of antiparticles) 228.
- Leray, Jean (Problème de Cauchy) 88.
- Lessen, M. (Thermal conductivity tensor) 438.
- Lev, Joseph (Maximizing test battery prediction) 144.
- LeVeque, William Judson (Topics in number theory. I. II.) 38.
- Levi, Franco (Effetti di bordo nelle vòlte sottili cilindriche) 412.
- Levin, B. (Transformationen vom Typus der Fourier- und Laplacetransformation) 108.
- B. J(a). (Roots of exponential sums) 296.
- G. A. s. V. K. Turkin 68.
- Levitan, B. M. (Cauchysches Problem für  $\Delta u - g(x_1, x_2, \dots, x_n)u = \partial^2 u / \partial t^2$ ) 317; (Spektralfunktion des Laplaceschen Operators) 347.
- Lévy, Paul (Random functions) 141; (Équations intégrale non linéaire) 329; (Fonctions aléatoires à corrélation linéaire) 365.
- Lew, H. G. (Boundary layer to transverse curvature) 201.
- Lewis jr., R. R. (Potential scattering of high-energy electrons) 232; (Scattering of electrons) 232.
- Leżański, T. (Representation of the resolvent) 121.
- Li, Ta (Oscillating finite thin wing in supersonic flow) 433.
- Lichnerowicz, André s. Madhumalati Apte 387.
- Lietzmann, Walther (Anschauliche Arithmetik) 3.
- Lighthill, M. J. s. G. K. Batchelor 1.
- Lin, T. C. and G. W. Morgan (Vibrations of cylindrical shells) 194.
- T. H. (Creep stresses and deflections of columns) 190.
- Linden, C. N. (Functions regular in the unit circle) 72.
- Linkous, C. s. G. Horvay 413.
- Linnell, Richard D. and Jerry Z. Bailey (Supersonic-hypersonic airfoils) 204.

- Linnik, Ju. V. (Aufgabe der differentiellen Algebra) 371
- — — and A. V. Malyšev (Applications of arithmetic of quaternions) 275.
- — — und A. I. Markuševič (A. O. Gel'fond) 244.
- — — s. I. P. Kubiljus 42.
- Lipow, M. and S. A. Zwick (Roots of  $Y_1(mx)[xJ_1(x) - BJ_0(x)] - J_1(mx)[xY_1(x) - BY_0(x)] = 0$ ) 132.
- Lippmann, B. A. (Rearrangement collisions) 219.
- Lisevič, L. N. (Fastperiodische Lösungen eines hyperbolischen Systems) 90.
- Little, J. D. C. s. J. A. Stratton 359.
- Littler, D. J. s. R. A. Charpie 228.
- Littlewood, D. E. (Representations of imprimitive groups) 259.
- Litvinov, N. V. (Ebenes Problem der Elastizitätstheorie) 188.
- Ljapunov, A. A. (Mengenoperationen) 51.
- Ljubič, Ju. I. (Fundamentallösungen linearer partieller Differentialgleichungen) 96.
- Ljubimova, E. A. (Thermal history of the earth) 458.
- Ljunggren, Wilhelm (Diophantine equation  $Cx^2 + D + y^n$ ) 39.
- Lobačevskij, N. I. (Drei Arbeiten zur Geometrie. Mit Einleitung von A. P. Norden und Bemerkungen von V. F. Kagan) 379.
- Locher-Ernst, L. (Merkwürdiges vom Kontinuum) 52.
- Loewner, Charles (Some transformation semigroups) 383.
- Logunov, A. A. und Ja. P. Terleckij (Beschleunigung geladener Teilchen) 442.
- Lohwater, A. J. (Fonctions analytiques bornées) 298.
- — — and G. Piranian (Conjecture of Lusin) 71.
- Lomon. E. L. (Infra-red and ultra-violet calculations) 446; (Soluble model of meson-nucleon S-state scattering) 447.
- Longdon, L. W. s. J. Hope 229.
- Longuet-Higgins, M. S. (Refraction of sea waves) 435.
- Loonstra, F. (Über „Éléments de mathématique par N. Bourbaki“) 2.
- Loos, H. G. (Compressibility effects on secondary flows) 198.
- Lopatinskij, Ja. B. (Grenzeigenschaften linearer Differentialgleichungen) 95; (Lineare Differentialgleichungen elliptischen Typus) 95.
- Lopšić, A. M. (Flächeninhalte orientierter Figuren) 382.
- Lorenzen, Paul (Interpretation der Syllogistik) 245.
- Łoś, J. (Torsion-free abelian groups) 24; (Abelian groups that are direct summands) 24.
- — —, E. Sasiada and Z. Słomiński (Abelian groups with hereditarily generating systems) 257.
- Löwdin, Per-Olov and Harrison Shull (Natural orbitals) 235.
- Ludford, G. S. S. s. J. B. Diaz 90.
- Ludwig, Otto (Pascalsche Fragestellung) 363.
- Lukacs, Eugene (Auslosungsversicherungen) 155; (Periodic characteristic functions) 334.
- Luke, Yudell L. (Higher transcendental functions) 128.
- Lunc, L. G. (Konvergenzkriterium von Lobačevskij) 59.
- Lurçat, François (Entropie en mécanique statistique) 437.
- Lush, P. E. and T. M. Cherry (Variational method in hydrodynamics) 424.
- Luttinger, J. M. (Cyclotron resonance in semiconductors) 239.
- Lyndon, R. C. (Theorem of Friedrichs) 30; (Representation of relation algebras. II.) 246.
- Lytle jr., E. S. s. Herbert A. Meyer 134.
- Ma, S. T. (Vacuum current) 224.
- Maaz, R. (Anwendung der Vektoralgebra auf geologische Schichtflächen) 458.
- MacDowell, Samuel Wallace (Polarization of spin one particles) 444.
- MacEwan, Charlotte s. Paul Horst 371.
- Machlup, Stefan s. R. A. Rubenstein 127.
- Mack, C. (Winding in centrifuge spinning) 194.
- Macmillan, R. H. (Curves of pursuit) 163.
- — — s. A. T. Fuller 307.
- MacRobert, T. M. (Bessel function integrals) 68.
- Madhava Rao, B. S. s. Rao, B. S. Madhava 199.
- Maeder, P. F. and H. U. Thommen (Transonic flow about slender airfoils) 205.
- Mager, Artur (Model of turbulent boundary layer) 202.
- Mahler, K. (Taylor coefficients of rational functions) 40.
- Mairhuber, John C. (Haar's theorem) 291.
- Majanc (Majanz), L. S. s. I. F. Kovalev (Kovalew) 125.
- Makarov, B. M. (Topological equivalence of B-spaces) 119.
- Mal'cev, A. I. (Lineare Algebra) 247; (Infinite solvable groups) 254.
- Malkin, I. G. (Nicht-lineare Schwingungen) 87.
- Mallows, C. L. (Moment problem for unimodal distributions) 137.
- Malyšev, A. V. s. Ju. (Yu.) V. Linnik 275.
- Mamedov, Ja. D. (Urysonsche nicht-lineare Integralgleichungen) 103.
- Manara, C. F. (Equazione di quinto grado) 252.
- Manfredi, Bianca (Stabilità del moto di sistemi a più gradi di libertà) 312.
- Mangler, K. W. (Laminare Grenzschicht mit beliebiger Druckverteilung) 426; (Laminare Grenzschichten bei Hyperschallströmung) 428.
- Manning, Henry Parker (Geometry of four dimensions) 159.
- Mansfield, R. (Impurity scattering in semiconductors) 240.
- Manukjan, M. M. (Thermischer Spannungszustand in Betonblöcken) 189.
- Mar, J. W., T. H. H. Pian and J. M. Calligeros (Transient stresses) 208.
- Marčenko, V. A. s. O. I. Inozemcev 62.

- Marčevskij, M. N. (Chafkover Mathematische Gesellschaft) 5.
- Marcus, M. (Eigenvalue inequality for the product of normal matrices) 13.
- S. (Problème de la théorie de la mesure) 55; (Problème de F. Hausdorff) 55.
- Mardešić, Sibe (Isomorphie des divers groupes d'homologie) 181.
- Marguerre, K. (Vibration and stability problems of beams) 419.
- Markushevitch, A. I. s. P. S. Alexandroff 10.
- Markušević, A. I. und S. A. Janovskaja (A. P. Juškevič) 6.
- — — s. Ju. V. Linnik 244.
- Marlowe, O. J. s. P. C. Hammer 354.
- Marmion, A. (Épi- ou hypocycloïdes) 384.
- Maros dell'Oro, Angiolo (Matematica pura e matematica applicata) 241.
- Marquet, Simone (Équation de Boltzmann) 236.
- Marschner, Bernard W. (Flow over a body in a choke wind tunnel) 434.
- Marshall, A. W. s. Herbert A. Meyer 134.
- Martin, A. I. (Vibration of a cantilever plate) 192; (Dividing stream line in hydrodynamics) 425.
- W. T. and Eric Reissner (Differential equations) 80.
- Marton, L. (edited by) (Electronics and electron physics) 442.
- Maslennikov, V. A. (Control of a neutral object) 132.
- Masotti Biggiogero, Giuseppina (Costruzione delle coniche) 384.
- Massera, José L. (Contributions to stability theory) 310.
- Mathews, Jon (Compton scattering and Bremsstrahlung) 219.
- Matos, A. Coimbra de s. Coimbra de Matos, A. 30.
- Matschinski, Matthias (Décaxaèdre régulier) 160; (Introduction des moyennes dans les équations de la mécanique) 412.
- Matsuno, Takeshi s. Shigeo Ozaki 303.
- Matthews, D. L. s. L. N. Howard 434.
- Mattila, Sakari (Tests based on moving average operations) 147.
- Maurin, K. (Rand- und Anfangswertprobleme im Großen) 325.
- L. (Gemischte Probleme für lineare Differentialgleichungen) 91.
- McCarthy, Paul J. (Witt's cancellation theorem) 252.
- McFadden, J. A. (Approximation for symmetric, quadrivariate normal integral) 362.
- McGill, William J. s. W. R. Garner 147.
- McKean jr., Henry P. (Parabolic partial differential equations) 320.
- McKiernan, Michel ( $n$ -th derivative of composite functions) 57.
- McLain, D. H. (Locally nilpotent groups) 21.
- McMahon, James (Dirichlet integral) 100.
- McVoy, Kirk and Helmut Steinwedel (Principal axis transformation for a free nucleon) 225.
- Meerov, M. V. (Automatische Regelung elektrischer Maschinen) 130.
- Mehring, Johannes s. Friedrich Sommer 303.
- Meier-Wunderli, Heinrich (Burnsidegruppen) 22.
- Meinardus, Günter (Partitionen und Teilerfunktionen) 41.
- Mejman (Meiman), N. N. (Power sums of Bessel function roots) 67.
- Melan, Ernst (Wärmespannungen bei Abkühlung einer Kugel) 189.
- Mel'nikov, I. G. (Legendresche Polynome) 16.
- Mendlowitz, H. (High-energy electron-nuclear scattering) 231.
- Merkin, D. R. (Gyroskopsysteme) 408.
- Meserve, Bruce E. (Concepts of geometry) 378.
- Meshkov, S. and C. W. Ufford (Bacher and Goudsmit method) 230.
- Metropolis, N. s. Herbert A. Meyer 134.
- Meyer, A. s. L. Collatz 356.
- Meyer, Herbert A. (edited by) (Monte Carlo methods) 134.
- Meyer, Klaus (Variationsverfahren in skalarer Feldtheorie) 221.
- Meyer zur Capellen, W. (Kurbelschleife) 411.
- Michael, E. (Selection theorems) 395.
- Michajlov (Mikhailov), G. K. (Ground water flow) 436.
- Michlin, S. G. (Ritzsche Methode) 121.
- Mientka, W. E. s. S. Chowla 44.
- Mihoc, G. s. O. Onicescu 360.
- Mikeladze, Š. E. (Numerische Integration von Differentialgleichungen im Komplexen) 127.
- Mikolás, Miklós (Familles de fonctions partout continues non dérivables) 282.
- Mikusiński, J. (Équations différentielles à coefficients constants) 81; (Calcul opérationnel d'intervalle fini) 120; (Équations intégrodifférentielles) 330.
- Miles, John W. (Sonic drag of a slender body) 206; (Linearized transonic flow) 433; (Unsteady supersonic flow problem for finite wings) 433.
- jr., E. P. and Ernest Williams (Euler-Poisson-Darboux and Beltrami equations) 293.
- Miller, G. F. (Non-linear integral equations) 128.
- J. C. P. s. G. I. Taylor 436.
- Milloux, H. (G. Valiron) 7.
- Mills, W. H. (Diophantine equations) 272.
- Milne, William E. s. Albert A. Bennett 125.
- — P. (Selig Brodetsky) 5.
- Milnor, John (Immersion of  $n$ -manifolds) 402.
- Minakov, I. I. und K. F. Teodorčik (Synchronisierung von Eigenschwingungen) 87.
- Minami, Shigeo (Meson reactions in two-nucleon system) 225.
- Minasjan, R. S. (Verbiegung einer rechteckigen Platte) 187.
- Mindlin, R. D. s. T. R. Kane 193.
- Minguzzi, A. (Non-linear effects in vacuum polarization) 446.
- Minkowski, Jan M. and Edward S. Cassedy (Cross



- section of colinear arrays) 212.
- Mirkil, H. s. K. de Leeuw 342.
- Mirzozan, A. A. (Hydrodynamik zähplastischer Flüssigkeit) 197.
- Miščenko, E. F. s. L. S. Pontrjagin 5.
- Mise, K. and S. Kunii (Forced vibrations of a railway bridge) 418.
- Misonou, Yosinao (Divisors of factors) 344.
- Misra, S. P. and B. B. Deo (Anomalous magnetic moments of nucleons) 225.
- Mitchell, A. R. (Round-off errors in difference methods) 352.
- T. P. s. M. S. Plesset 196.
- Mitrinovitich, D. S. (Compléments au traité de Kamke. I.) 307; (Progressions arithmétiques) 273.
- Mitrović, Dusan (Racines d'une équation algébrique) 250.
- Miyanaga, Yasue s. Kiyoshi Iséki 28.
- Mrak, W. (Epidermic effect for ordinary differential inequalities) 310; (Epidermic effect for partial differential inequalities) 310.
- Mohanty, R. and S. Mohapatra (Absolute logarithmic summability of Fourier series) 66.
- — and M. Nanda (Derived conjugate series of a Fourier series) 292.
- Mohapatra, S. s. R. Mohanty 66.
- Moisil, Gr. C. (Utilisation des logiques trivalentes dans la théorie des mécanismes automatiques, II.) 358.
- Mokriščev, K. K. s. M. P. Černjaev 6.
- Moldauer, P. A. and K. M. Case (Half-integral spin Dirac-Fierz-Pauli particles) 219.
- Molnár, J. (Satz von Helly) 184.
- Monseau, M. (Sphères podaires) 160.
- Montel, Paul (É. Borel) 5.
- Moór, Arthur (Metrische Linienelementräume) 172.
- Morawetz, Cathleen S. (Transonic flows past profiles. I.) 202; (Elliptic-hyperbolic equation) 318.
- Mordell, L. J. (Minimum of quadratic polynomial) 44; (Diophantine inequalities) 45.
- Morgan, G. W. s. T. C. Lin 194.
- Morgenstern, Dietrich (Störungstheorie partieller Differentialgleichungen) 98; (Alternierendes Verfahren) 351; (Zweidimensionale Verteilungen) 362.
- Mori, Shinziro (Idealtheorie der Multiplikationsringe) 34.
- Morimoto, Akihiko (Groupes de Lie semi-simples) 260.
- Morrey jr., C. B. (Harmonic integrals. II.) 314; (Variational method in the theory of harmonic integrals) 314.
- — — and James Eells jr. (Harmonic integrals. I.) 99.
- — — s. N. Aronszajn 313.
- Morris, D. N. s. R. E. Johnson 370.
- Morse, Marston (Réseau isotherme) 167.
- P.-M. s. J. A. Stratton 359.
- Moser, L. s. J. Lambek 42.
- Moses, H. E. (Calculation of scattering potential) 219.
- Lincoln E. (Lot plot sampling inspection plan) 148.
- Moskvitin, V. V. (Elastisch-plastische Torsion von Stäben) 412.
- Mosteller, Frederick (Stochastic learning models) 153.
- Moszyński, K. s. J. W. Jaworski 183.
- Motchane, Léon (Conservation de classe de Baire) 56.
- Motjakov, V. I. (Lösung inverser Aufgaben) 126.
- Mott, N. F. s. G. K. Batchelor 1.
- Motzkin, Theodore S. s. Herbert A. Meyer 134.
- Mrówka, S. (Ideals extension theorem) 49.
- (Mruvka), S. (Complete proximity-space) 177.
- Muchammedžan, Ch. Ch. (Gruppen, die eine auflösbare, aufsteigende invariante Reihe besitzen) 21.
- Mučnik (Muchnik), A. A. (Problem of reducibility) 247.
- Mukohda, Shunji s. Tatsuji Kudo 400.
- Müller, Max (Gaußsches Fehlergesetz und Hypothese der Elementarfehler) 137.
- Müller, W. (Gleit- und Sturzbewegung eines Flugzeuges) 200.
- Muncey, R. W. (Heat flows and temperatures in slabs) 439.
- Münzner, Hans (Binomialverteilung oder Poissongesetz) 155.
- Murphy, George M. s. Harris H. Shamos 403.
- Musiak, J. and W. Orlicz (Linear functionals) 338.
- Mustafaev, A. A. (Axialsymmetrische Belastung des elastischen Halbraumes) 189.
- Mycielski, Jan (Decompositions of Euclidean spaces) 52.
- — et S. Paszkowski (Problème du calcul de probabilité. I.) 367.
- — s. S. Balcerzyk 25.
- Nagami, Keiō (Local properties of topological spaces) 395.
- Nagel, Felix E. (Column instability of pressurized tubes) 413.
- Nagy, K. (Magnetischer Dipol) 443.
- — s. L. Jánossy 216.
- Nahon, Fernand (Analyse des vitesses radiales) 456.
- Najmark, M. A. (Analogon zum Schurschen Lemma) 26; (Analogon zum Schurschen Lemma und seine Anwendung) 26.
- (Najmark), M. A. (Irreducible unitary representations of classical groups) 261.
- Nambu, Yoichiro (Renormalization constants) 221.
- Nanda, M. s. R. Mohanty 292.
- Napolitano, Luigi G. (Compressible laminar free mixing problems) 427.
- Narasimhan, M. N. L. (Flow of non-Newtonian liquids) 421.
- R. K. s. G. Bandyopadhyay 124.
- Nash, John (Imbedding problem for Riemannian manifolds) 386.
- Nasu, Yasuo (Spaces with constant curvature) 174.
- Natucci, A. (A. Capelli) 5.
- Naumann, Herbert (Affine Rechtwinkelgeometrie) 157.

- Naur, Peter (Stellar models) 458.
- Nazarov, A. A. (Differentialgleichungen des Gleichgewichts einer Schale) 187.
- Nef, Walter (Linearformen auf teilgeordneten Vektorräumen) 110.
- Nemyckij, V. V. (Untersuchung „im Großen“ für Differentialgleichungssysteme) 87.
- — — s. P. S. Alexandroff 7.
- Neuman, M. s. S. Gasiorowicz 236.
- Neumann, B. H. (Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed) 22; (Ascending derived series) 254; (Finite groups) 256.
- Hanna (Varieties of groups) 19; (Intersection of finitely generated free groups) 20.
- Neustadter, S. F. s. G. W. Pratt jr. 235.
- Nevanlinna, Rolf (E. Schmidt zum 80. Geburtstag) 7, 244; (Differentiable mappings) 57; (Satz von Stokes) 283.
- Neville, E. H. (Rectangular-polar conversion tables) 132; (Power of a point for a curve) 162.
- Newmark, N. M. s. N. A. Weil 413.
- Newton, Roger G. s. Alfred Reifman 219.
- Neyman, Jerzy (edited by) (Proceedings of the third Berkeley symposium on mathematical statistics and probability. Vol. IV.) 149; (V.) 152.
- Nicolesco, Miron (Théorème de M. J. Hadamard) 93.
- Nievergelt, E. s. B. L. van der Waerden 145.
- Nikitin, A. K. (Steady motion of viscous fluid) 196.
- — — s. M. P. Černjaev 6.
- Nikodym, Otton Martin (Extension d'une mesure. IX.) 28.
- Nirenberg, Louis (Elliptic equations) 323.
- Niven, Ivan (Irrational numbers) 271.
- Noether, Gottfried E. (Sequential tests against trend) 374.
- Nomizu, Katsumi (Théorème sur les groupes d'holonomie) 390.
- Norden, A. P. (Gauss und Lobačevskij) 243.
- — — s. N. I. Lobačevskij 379.
- Nordhaus, E. A. and J. W. Gaddum (Complementary graphs) 185.
- Nougaro, Jean (Hauteur d'une intumescence dans un canal) 208.
- Novák, Josef (Topologische Struktur der Wahrscheinlichkeitsfelder) 53.
- Numakura, Katsumi (Compact rings. II.) 270.
- Meara, O. T. (Witt's theorem) 38.
- Oakes jr., W. J. and P. T. Holliday (Rolling pull-out maneuver) 423.
- Oberhettinger, F. (Series for functions in the theory of diffraction of waves) 214.
- Obláth, Richard (Répartition des nombres sans diviseur quadratique) 274.
- Obreschkoff, Nikola (Asymptotische Formeln) 139.
- Oehme, Reinhard (Dispersion relations) 448.
- Offord, A. C. s. Paul Erdős 17.
- Ohmann, D. (Quermaßintegrale beschränkter Punkt-mengen, III.) 175.
- Okashimo, K. s. James R. Wait 440.
- Okunev, L. Ja. s. P. S. Alexandroff 10.
- Olejnik, O. A. (Neumannsche Aufgabe) 99.
- Oliveira, J. Tiago de s. Tiago de Oliveira, J. 146.
- Oloničev, P. M. (F. M. Suvorov) 243.
- Olver, F. W. J. (Linear differential equations of second order) 308; (Asymptotic expansion of Bessel functions) 308; (Differential equations in a domain containing one transition point) 308.
- Onicescu, O., G. Mihoc und C. T. Ionescu Tulcea (Wahrscheinlichkeitsrechnung) 360.
- Oniščik (Onishchik) A. L. s. F. I. Karpelevič (Karpelevič) 182.
- Ono, Takashi (Birational invariance of classical groups) 258.
- Onoe, Morio (Modified quotients of cylinder functions) 67.
- Onoyama, Takuji (Regular random functions) 367.
- Ordway, Donald Earl and Carlo Riparbelli (Method of equivalence) 188.
- Orgeval, B. d' (Surfaces elliptiques) 385.
- Orlicz, W. s. A. Alexiewicz 61, 92.
- — s. J. Musielak 338.
- Oro, Angiolo Maros dell' s. Maros dell'Oro, Angiolo 241.
- Ostrowski, Alexander (Mathematische Miszellen. XXIV.) 250.
- Oswald, Telford W. (Accelerated flight) 407.
- Otsuki, Tominosuke (Isometric imbedding of compact Riemannian manifolds) 387.
- Oudart, Adalbert (Flux thermique provoqué par le mouvement pulsatoire) 422.
- Ovčarov, V. T. (Symmetrical electron beams) 215.
- Ozaki, Shigeo and Takeshi Matsuno (Bounded functions) 303.
- Ozeki, Hideki (Infinitesimal holonomy groups of bundle connections) 400.
- — s. Jun-ichi Hano 389.
- Pagni, Mauro (Derivazione delle funzioni a variazione limitata) 282.
- Pai, S. I. (Boundary-layer equations of a very slender body of revolution) 428.
- Paige, Lowell J. (Simple Moufang loops) 253.
- Pailloux, Henri (Charges roulantes) 410.
- Papuš, P. N. (Lage von Integralkurven) 85.
- Paradine, C. G. (Farey series and Stern series) 46.
- Paranjape, B. V. s. H. Fröhlich 239.
- Parkus, H. (Temperaturfeld im Keil) 439.
- Parodi, Maurice (Propriétés des polynômes) 17.
- Parzen, P. s. M. Scotto 213.
- Pascal, Blaise (Traité de l'équilibre des liqueurs) 436.
- Paslay, P. R. and A. Slibar (Salomon-Schwingungstilger) 409.

- Pastori, Maria (Coordinate generali) 388.
- Paszkowski, S. (Problème du calcul de probabilité. III.) 367.
- s. Jan Mycielski 367.
- Patterson, D. s. G. C. Benson 238.
- E. M. (Topology) 394.
- Patzelt, Gerhard (Partikulärlösungen bei Differentialgleichungen) 351.
- Pavljuk, I. A. (K. Ja. Latyševa) 244.
- Pavlov, S. T. (Frequency characteristic plots for automatic control systems) 131.
- Pavlovič, S. V. (Théorèmes de D. Pompeiu) 160.
- Payne, L. E. s. J. P. Diaz 306.
- Pearson, Carl E. (The centre of shear) 415.
- Penrose, R. (Linear matrix equations) 125.
- Percus, Jerome K. and George J. Yevick (Many-body problem) 218.
- — s. George J. Yevick 218.
- Peretti, Jean (Fonction de répartition statistique attachée à une grandeur physique) 437.
- Perkal, J. ( $\varepsilon$ -length) 54.
- Perron, Oskar (Potenzsummen) 251.
- Persen, Leif N. (Berechnung von Wasserschlössern) 436.
- Pesonen, Erkki (Spektraldarstellung quadratischer Formen) 345.
- Péter, Rózsa (Beschränkt-rekursive Funktionen) 8.
- Peters, Th. (Steenbecksches Minimumprinzip) 237.
- Petersen, G. M. (Sequences of 0's and 1's) 59.
- — s. Casper Goffman 59, 286.
- Gordon M. (Clusion between limitation methods) 286.
- Petresco, J. (Théorie relative des chaînes) 263.
- Julian (Groupes libres) 253.
- Petropavlovskaja, R. V. (Oscillation der Lösungen einer Differentialgleichung) 83.
- (Petropavlovskaya), R. V. (Oscillatory aspect of the solutions of  $u'' = f(u, u', t)$ ) 308.
- Petrov, A. Z. (Klassifikation der Räume) 171.
- V. V. (Berichtigung zu „Über die Methode der kleinsten Quadrate“) 145.
- Petrovskij, I. G. (Zu meinen Arbeiten über das Cauchy'sche Problem) 88.
- Pettis, B. J. (Convex sets) 335.
- Petty, C. M. s. H. Busemann 393.
- Peyerimhoff, A. (Convergence fields of Nörlund means) 287.
- — s. R. Bojanić 107.
- Pflanz, E. (Hornersches Verfahren) 125.
- Philipzik, W. (Schmiermittelreibung) 420.
- Phillips, O. M. (Final period of decay of turbulence) 432; (Aerodynamic surface sound) 435.
- Pian, T. H. H. s. J. W. Ma 208.
- Pic, Gh. (Groupes cycliques) 23.
- Pickert, Günther (Nichtdesarguessche Ebene) 156.
- Piddington, J. H. (Growing electromagnetic waves) 237; (Growing space-charge waves) 237.
- Pierce, R. S. s. Garrett Birkhoff 286.
- Pilatovskij (Pilatovsky), V. P. (Contour integrals in problems concerned with the pressure percolation) 436.
- Pillai, K. C. S. (Distribution of largest or smallest root of a matrix) 376.
- Pini, Bruno (Problema biarmonico fondamentale) 327.
- Piranian, G. (Derived sets of a linear set) 51.
- — s. Fritz Herzog 293, 295.
- — s. A. J. Lohwater 71.
- Pisareva (Pissareva), N. M. (Fraction-quadratic integral of geodesic lines) 173.
- Pitairn, Joel (Completion of a uniform space) 177.
- Pivko, Svetopolk (Dünner kreiszylindrischer, schräg-angeströmter Ringflügel) 425.
- Pjateckij-Šapiro, I. I. (Singuläre Modulfunktionen) 78.
- Plaineaux, J. E. (Recherche du profil) 166; (Graphische Konstruktion rationaler Polynome) 354; (Mouvement de tangage d'une suspension élémentaire sur lames élastiques) 416.
- Plebański, J. s. L. Infeld 443.
- Pleijel, Ake (Courant's nodal line theorem) 326.
- Arne (Laplace-Stieltjes-Transformationen) 107.
- Plesset, M. S. and T. P. Mitchell (Spherical shape of a vapor cavity in a liquid) 196.
- Pliš, A. (Système dynamique dans le domaine doublement connexe) 311; (Cauchy problem for partial differential equations) 316.
- Plotkin, B. I. (Groups with finiteness conditions for Abelian groups) 255.
- Poeverlein, H. (Beugung von Radiowellen) 212.
- Pogorelov, A. V. (Unverbiegbarkeit konvexer Flächen) 168.
- Pogorzelski, W. (Équation parabolique générale) 93.
- Pogrebyskij, I. B. s. B. V. Gnedenko 5.
- Poirier, Yves s. Étienne Crausse 436.
- Polak, A. I. (Gleichmäßige Approximationen) 396; (Covering theorems) 398.
- Polniakowski, Z. (Theorems of Mercer type) 61.
- Pólya, Georges (Fréquences propres des membranes vibrantes) 326.
- Pomerancev, N. M. s. A. V. Kessenich 231.
- Ponizovskij, I. S. (Matrixdarstellungen assoziativer Systeme) 19.
- Pontrjagin, L. S. und E. F. Miščenko (P. S. Alexandroff) 5.
- Poots, G. s. S. C. R. Dennis 198.
- Popov, E. P. (Harmonische Linearisierung) 131.
- Popovici, Constantin P. (Théorie algébrique du clignoteur) 358.
- Pöschl, Klaus (Hochfrequenztechnik) 213.
- Post, E. J. (Finite strain in elastic bodies) 190.
- Postnikov, A. G. (Diophantische Ungleichungen) 45; (One of the Hilbert's pro-



- blems) 71; (Additive problems) 273.
- Postnikov, M. M. (Homologietheorie glatter Mannigfaltigkeiten) 181.
- Potts, D. H. s. G. E. Hudson 209.
- Powderly, Mary and Hing Tong (On orbital topologies) 176.
- Powell, J. B. L. (Effect of dihedral on lift and drag coefficients of airfoils) 200.
- Power, G. s. R. Hill 420.
- Pozzolo Ferraris, Giulia (Principio di Cavalieri) 161.
- Prachar, K. und L. Schmetterer (Spezielle nichtlineare Differentialgleichung) 309.
- Prakash, Prem (Harmonic analysis of incompressible viscous flow) 421.
- Prandtl, Ludwig (Strömungslehre) 195.
- Pratt jr., G. W. and S. F. Neustadter 235.
- Prékopa, András (Series of independent random variables) 363.
- Preston, M. A. s. J. Shapiro 451.
- jr., K. s. M. M. Atalla 439.
- Preuss, H. (Integraltafeln. I.) 234.
- Privalova, N. I. (N. I. Lobachevskij) 6.
- Probst, Ronald F. and David Elliott (Transverse curvature effect) 427.
- Proca, A. (Mécanique spinorielle du point chargé) 444; (Principe d'équivalence) 444.
- Proskurjakov, I. V. (Spektrum eines kompakten Raumes) 179.
- Pukánszky, L. (Examples of factors) 344.
- Punnis, B. (Plattengrenzschicht von Blasius) 428.
- Putnam, C. R. (Inverses of differential operators) 121.
- Pychteev (Pykhteyev), G. N. (Problem of Kirchhoff's flow) 199.
- Rabson, G. s. M. Jerison 116.
- Rachford jr., H. H. s. Jim Douglas jr. 354.
- Rachkovitch, Daniel (Équation caractéristique d'un système mécanique) 86.
- Rado, Nicolino (Triangoli razionali) 160.
- Richard (Minimal points of convex sets) 113.
- Radok, U. s. J. R. Bainbridge 147.
- Ragab, F. M. (Integrals involving products of Bessel functions) 68; (New integrals involving Bessel functions) 294.
- Rannie, W. D. (Heat transfer in turbulent shear flow) 429.
- Rao, B. S. Madhava (Virial problems) 199.
- S. K. Lakshmana (Harmonic analysis of spatial flow) 421.
- Rapcsák, A. (Differentialinvarianten im Cartanschen Raum) 388.
- Rapoport, I. M. (Bemerkungen zu V. P. Basovs Arbeit) 311.
- Rašković, Danilo P. (Frequency equations of small vibrations) 409; (Pythagorean and cosine theorems) 410.
- Rathie, C. B. (Theorem in operational calculus) 68.
- Rau, R. R. s. J. Ballam 448.
- Răutu, Sandu (Vibrations des cadres) 194.
- Reade, Maxwell (Coefficients of univalent functions) 73; (Close-to-convex univalent functions) 73; (Close-to-convex functions) 299.
- Reichard, Ottis W. (Invariant measures for many-one transformations) 280.
- Reddick, Harry W. and Donald E. Kibbey (Differential equations) 306.
- Ree, Rimhak and Robert J. Wisner (Torsion-free nil groups) 24.
- Rees, D. (Polynomials modules) 16.
- Reich, Edgar (Bloch-Landau constant) 299; (Schlicht functions) 299.
- Reid, W. H. (Decay in isotropic turbulence) 431.
- Reifman, Alfred, Bryce S. DeWitt and Hoger G. Newton (Bound-state problems and scattering theory) 219.
- Reissig, R. (Periodische Lösungen für Differentialgleichungen 2. Ordnung) 308; (Stabilität erzwungener Bewegungen) 409; (Methoden der Mechanik von Krylow und Bogoljubow) 409.
- Reissner, Eric (Torsion with variable twist) 187.
- s. Herbert Glantz 127.
- s. Millard W. Johnson 193.
- s. W. T. Martin 80.
- Remmert, Reinhold (Projektionen analytischer Mengen) 77; (Espaces analytiques holomorphiquement séparables) 304.
- s. Hans Grauert 304.
- Renggli, Heinz (Konforme Abbildung auf Normalgebiete) 300.
- Rényi, A. (Axiomatischer Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung) 136.
- s. P. Erdős 11, 296.
- Resch, Daniel s. Harold T. Davis 80.
- Reuter, G. E. H. (Volterra'sche Integralgleichung) 103.
- H. (Stand der numerischen Wettervorhersage) 459.
- Rham, Georges de (Courbe plane) 391.
- Rheinboldt, Werner (Stationäre Grenzschichten bei kontinuierlicher Absaugung) 201.
- Ribaud, Gustave (Convection calorifique) 201.
- Ricci, Giovanni (Aritmetica additiva) 273.
- Ricci-Curbastro, Gregorio (Opere, I.) 169.
- Richter, H. (Abschätzung von Erwartungswerten) 361.
- Riddell jr., R. J. s. S. Gasiorowicz 236.
- Riegels, Fritz W. (Profiltheorie) 199.
- Riesz, Frédéric (Nachruf auf) 7.
- Frigyes and Béla Sz. Nagy (Functional analysis) 109.
- Rigal, Jean-Louis (Mouvements stellaires. III.) 456.
- s. Evry Schatzman 456.
- Rignet, Jacques (Algorithmes de Markov) 9.
- Rinehart, R. F. (Derivative of a matrix function) 302.
- Ringel, Gerhard (Teilungen der Ebene durch Geraden) 161.
- Ringleb, F. (Formelsammlung) 2.
- Riparbelli, Carlo s. Donald Earl Ordway 188.

- Ritt, R. K. (Inner product) 112.
- — — s. C. L. Dolph 444.
- Rivlin, R. S. (Problems of visco-elasticity) 197.
- Robin, Louis (Dérivée de la fonction associée de Legendre) 67; (Développements asymptotiques des fonctions associés de Legendre) 67.
- Robinson, Abraham (Complete theories) 27; (Motion of small particles) 200.
- R. B. and R. H. Buchan-  
nan (Undamped free pulsations) 436.
- R. O. A. (Hydrogenic atoms) 234.
- Rogers, K. (Indefinite binary Hermitian forms) 43; (Linear forms) 44.
- M. H. (Shock waves in a self-gravitating gas sphere) 456.
- jr., Hartley (General education course) 241.
- Rogosinski, W. W. (F. Riesz) 244; (Linear functionals on subspaces of  $\mathcal{Q}^p$  and  $\mathcal{C}$ ) 337.
- Romanovskij, P. I. s. Untersuchungen über ausgewählte Fragen der Analysis und Geometrie 47.
- Rooney, P. G. (Inversion formula for Laplace transformation. II.) 106.
- Roos, Oldwig v. (Beseitigung der Selbstenergi-divergenzen) 223.
- Roosbroeck, W. van (Photomagnetolectric effect in semiconductors) 240.
- Rosculot, Marcel N. (Fonctions polygènes dans les algèbres) 75.
- Rose, D. J. (Field emission electron microscope) 215.
- Donald Clayton (Dirichlet series) 71.
- Rosenauer, N. (Synthese einer Kurbelschwinge) 411.
- Rosenberg, Alex and Daniel Zelinsky (Cohomology of infinite algebras) 269.
- Rosenblatt, M. (Central limit theorem) 138.
- — s. J. R. Blum 364.
- Rosenfeld, L. s. J. L. Walsh 301.
- Ross jr., E. W. (Plastic indentation of bands) 190.
- Roth, H. (Wall under impact of subsonic gas jet) 425.
- Rotkiewicz, A. ( $x^z - y^t = a^t$ ) 272.
- Rott, Nicholas (Unsteady viscous flow) 197.
- Roy, S. N. and A. E. Sarhan (Inverting patterned matrices) 148.
- Royster, W. C. (Rational univalent functions) 73.
- — — and S. D. Conte (Equation of the vibrating rod) 353.
- Rozenfel'd, B. A. (A. P. Kotelnikov) 243.
- Rubenstein, R. A., Marjorie Huse and Stefan Machlup (Schrödinger equation for central fields) 127.
- Rubin, Herman s. T. W. Anderson 147.
- — s. Samuel Karlin 372.
- Jean E. (Closure algebra) 263.
- Rubinowicz, Adalbert (Fortpflanzung von un stetigen Signalen in Wellenleitern) 213.
- Rubínštejn, G. Š. (Konvexe Mengen) 109.
- Rüdiger, D. (Spannungen und Verschiebungen von Flächen) 413.
- Rudin, Walter (Group algebra of the unit circle) 339.
- Ruskol (Rouscol), E. L. s. V. S. Safronov 202.
- Russek, A. s. S. N. Karp 441.
- Rutishauser, Heinz (Formel von Wronski) 350.
- Rutman, M. A. (Stability of linear differential equations) 319.
- Rutovitz, D. ( $L_p$ -convergence of eigenfunction expansions) 291.
- Rybkin, G. F. and B. V. Fedorenko (N. I. Lobačevskij) 6.
- Rzewuski, J. s. W. Królikowski 446.
- Šabat, B. V. (Abbildungen durch Lösungen eines Carlemanschen Systems) 302.
- Sade, A. (Problème des transvasements) 39.
- Sadowsky, Michael (Stress concentration) 412.
- Saffman, P. G. and J. S. Turner (Collision of drops) 460.
- Safronov, V. S. and E. L. Ruskol (Rouscol) (Turbulent motions in the protoplanetary cloud) 202.
- Sagomonjan, A. Ja. (Reflexion einer Stoßwelle an der Spitze eines Kegels) 207.
- Saito, Shiroshi s. Tatsuji Kudo 400.
- Sakamoto, Michiko and Eiichi Ishiguro (He-He repulsive potential. I.) 234.
- Salam, A. (Dispersion relations) 449.
- Salet, Georges (Points singuliers en élasticité plane) 188.
- Salzer, Herbert E. (Complex osculatory interpolation) 359.
- Samarskij, A. A. s. B. M. Budak 404.
- (Samarsky), A. A. s. A. N. Tichonov (Tikhonov) 126.
- Sanden, H. v. (Praktische Mathematik) 124.
- Sanojan, V. G. (Ebene und axialsymmetrische Strömungen) 196; (Ebene Kanäle) 208.
- Sanyal, Lakshmi (Flow of a viscous liquid) 421; (Viscous liquid in a tube) 422.
- Sapiro, Z. Ja. (Ya.) s. I. M. Gel'fand 259.
- Sarhan, A. E. s. S. N. Roy 148.
- Sarton, George (R. C. Archibald) 244.
- Sasiada, E. (Application of Kulikov's basic subgroups) 257.
- — s. J. Łoś 257.
- Savickij, N. I. s. M. M. Kabal'skij 404.
- Sawicki, J. (Nucleon self-action) 447.
- Sce, Michele (Continuità della retta) 161.
- Schäfer, Manfred (Rückkehr gestörter Überschallströmungen) 433.
- Schäffer, Juan Jorge (Electrical circuits) 440.
- Schatzman, Évry et Jean-Louis Rigal (Mouvements stellaires. IV.) 456.
- Schauffler, Rudolf (Bildung von Codewörtern) 12.
- Scheerer, Anne s. Bernard Epstein 327.
- Scheffler, H. (Astronomische Sicht) 454.
- Scheidegger, A. E. (Displacements in rheological bodies) 190.
- Schenkman, Eugene (Class of semigroups) 19.

- Scherk, P. s. N. D. Lane 391.  
 Schieferdecker, Eberhard (Einbettungssätze für topologische Halbgruppen) 259.  
 Schiffman, T. s. H. Ekstein 418.  
 Schilt, H. (Nullstellen einer Funktion zweiten und dritten Grades) 17.  
 Schinzel, A. ( $x^2 - y^t = 1$ ) 272.  
 — and Y. Wang (Properties of the functions  $\varphi(n)$ ,  $\sigma(n)$  and  $\theta(n)$ ) 42.  
 — s. Georges Browkin 271.  
 Schläfli, Ludwig (Mathematische Abhandlungen. III.) 2.  
 Schmeidler, F. (Ausbreitung von Konvektion und Wärme im Sterninnern) 457; (Konvektion im Sterninnern) 457.  
 — Werner (Symmetrische algebraische Integralgleichungen) 330.  
 Schmetterer, L. (Mathematische Statistik) 143.  
 — s. K. Prachar 309.  
 Schmid, Paul (Théorèmes asymptotiques de Kolmogoroff et Smirnov) 364.  
 Schmidt, W. (Hyperbelfeldröhre) 130; (Kritische Determinante von Sternkörpern) 275; (Verschärfung des Satzes von Minkowski-Hlawka) 276.  
 Schmitt, A. F. (Stepwise integration) 195.  
 Schneider, Hans (Matrix problem) 248.  
 — P. J. s. E. R. G. Eckert 201.  
 Schnell, W. (Beulwerte von Platten unter Drucklast) 414.  
 Schöbe, Waldemar (Approximationen der Potenzfunktion) 62.  
 Schöenberg, Mario (Grassmann and Clifford algebras. I.) 267.  
 Schöneborn, Heinz (Dualitäts- und Vollständigkeitseigenschaften bei gewissen topologischen Gruppen) 261.  
 Schopf, Andreas (Différences pour l'opérateur  $\Delta \Delta$ ) 353.  
 Schoppe, Fritz (Mischungsvorgänge in gasgefeuerten Brennkammern) 198.  
 Schouten, J. A. (J. Haantjes) 5.  
 Schreiber, H. P. s. G. C. Benson 238.  
 Schrenk, Oskar (Impulssatz der Grenschichttheorie) 201.  
 Schröter, Karl (Theorie des bestimmten Artikels) 245.  
 Schubart, J. (Periodische Lösungen im Dreikörperproblem) 408.  
 Schuster, Seymour (Pencils of polarities) 161.  
 Schütte, Kurt (Schließungssätze für orthogonale Abbildungen) 378.  
 Schwartz, Jacob T. s. William G. Bade 348.  
 Schwarz, Hans Rudolf (Critère de stabilité pour des équations différentielles à coefficients constants) 17.  
 Scott, Walter s. Harold T. Davis 80.  
 Scotto, M. and P. Parzen (Excitation of space charge waves) 213.  
 Sechler, E. E. (Inelastic buckling) 191.  
 Segal, I. E. (Tensor algebras over Hilbert spaces. I.) 340.  
 Seibert, Peter (Unstetige Regelungen) 409.  
 Seide, Paul (Torsion of rectangular sandwich plates) 414; (Elasto-plastic bending of beams on elastic foundations) 416.  
 Seidel, J. (Lehrplan für zukünftige Studenten) 2.  
 — W. s. F. Bagemihl 297.  
 Selberg, Sigmund (Zahlentheoretische Summe) 42; (Vermutung von P. Turan) 274.  
 Selig, F. (Stefansches Problem) 439.  
 — s. H. Fieber 438.  
 Selmer, Ernst S. (Tables for the purely cubic field  $K(\sqrt[3]{m})$ ) 36.  
 Serre, J. B. s. A. Blanchard 399.  
 Serrin, James (Harnack inequality for linear elliptic equations) 323.  
 Šestakov (Shestakov), V. M. (Unsteady seepage) 208.  
 Severi, Francesco (Formes attachées à une variété algébrique) 164; (Irrégularités d'une variété algébrique) 164.  
 Shamos, Harris H. and George M. Murphy (Recent advances in science) 403.  
 Shapiro, J. and M. A. Preston (Nucleon forces with repulsive cores. II.) 451.  
 — — M. (Moments of infinitely divisible distributions) 137.  
 — Norman (Degrees of computability) 246.  
 — — M. (Effects of pressure gradient on laminar boundary layer) 201.  
 — Victor L. (Generalized  $L_2$ -laplacians) 327; (Symmetric derivative on the hypersphere) 328.  
 Shef, A. s. M. W. Hunter 407.  
 Shenton, L. B. (Determinantal expansion for a class of definite integral. III.) 285.  
 Shepanski, J. R. and S. T. Butler (Coulomb wave functions) 220.  
 Shepherdson, J. C. s. A. Fröhlich 35.  
 Sher, F. A. s. N. D. Lane 173.  
 Shibata, Takashi (Spin representation of the fundamental group of transformations) 218.  
 Shiffman, Max (Surfaces of stationary area) 168.  
 Shinosaki, G. s. M. Z. v. Krzywoblocki 426.  
 Shiota, Taira (Solutions of partially differential equation with a parameter) 339.  
 Shmoys, Jerry s. Joseph B. Keller 219.  
 Shull, Harrison s. Per-Olov Löwdin 235.  
 Sibagaki, Wasao (Uniform convergence) 57.  
 Šidlovskaja, N. A. (Differentiation with respect to parameter) 82.  
 Šidlovskij, A. B. (Transzendenz der Werte von ganzen Funktionen) 45.  
 — (Šidlovsky), A. B. (Algebraic independence of transcendental numbers) 45.  
 Siebert, Manfred (Jahrgang der Variationen des Luftdruckes und der Temperatur) 460.  
 Siegel, C. L. (Funktionalgleichungen Dirichletscher Reihen) 77; (Himmelsmechanik) 454.  
 Sielaff, Klaus (Theorie der Gruppen) 17.  
 Sierpiński, W. (La fonction  $\varphi(n)$ ) 42.



- Silveira, Adel da (Spin-two particles) 444.
- Silverman, Robert J. (Invariant linear functions) 335.
- Simon, Herbert A. (Game theory and learning theory) 153.
- Simonov, N. I. (Untersuchungen J. d'Alemberts) 84.
- Singh, Vikramaditya (Generalized Laplace integral) 105.
- Širkov (Schirkow), D. V. (W.) s. N. N. Bogoljubov (Bogoljubow) 444.
- Sirlin, A. (Betatron target radiation) 232.
- — s. R. E. Behrends 224.
- Širokov, F. V. (Vermutung von Kaplansky) 342.
- Širšov, A. I. (Spezielle J-Ringe) 29.
- Skavlem, S. and J. Espe (Proton-proton scattering in the region 0—5 Mev) 451.
- Skobelkin, V. I. (Least stream potential) 198.
- Skvorcov (Skvortsow), P. G. (Strong convergence of de la Vallé Poussin sums) 66.
- Ślebodziński, W. (Oeuvre scientifique de Kazimierz Żorawski) 244.
- Slibar, A. s. P. R. Paslay 409.
- Ślominski, Z. s. J. Łoś 257.
- Ślowikowski, W. and W. Zawadowski (Relatively complete  $B_0$ -spaces) 111.
- Smiley, M. F. (Zeros of a cubic recurrence) 273.
- Smirnov, Ju. M. (Stark parakompakte Räume) 177; (Dimension der Nachbarschaftsräume) 180.
- S. V. (Gronwall'sche Funktionen) 129.
- Smith, David Eugene s. F. Klein 380.
- R. C. T. (Generating functions of appell form) 293.
- Sheila Maynard s. J. B. S. Haldane 374.
- Sneddon, I. N. s. G. Eason 194.
- Sobczyk, Andrew s. John Holladay 178.
- Soeder, Heinrich (Funktionentheorie in Banachschen Räumen) 114.
- Sokolnikoff, I. S. (Elasticity) 411.
- Sokolov, Ju. D. (Gleichung von Boussinesq) 208.
- Solnceva, T. V. (Bemerkungen zur Arbeit von D. Z. Gordevskij) 384.
- Solodovnikov, A. S. (Spaces with corresponding geodesics) 170.
- Solomon, Herbert (Probability and statistics in psychometric research) 153.
- Sommer, Friedrich und Johannes Mehring (Kernfunktion und Hüllenbildung) 303.
- Sommerfeld, Arnold (Thermodynamics and statistical mechanics) 436.
- Sondheimer, E. H. (Kelvin relations) 240.
- — — s. R. Engman 239.
- Sonner, Hans (Zurückführung partieller Differentialgleichungen auf gewöhnliche) 315.
- Sonntag, C. (Lange Zylinschale) 188; (Lange Zylinderschale mit nicht achsensymmetrischer Randbelastung) 188, 413; (Nachgiebigkeit der Randeinspannung bei Membranen oder Platten) 413.
- Soule, J. W. (Multiple-branch piping-flexibility problems) 412; (Tensor-flexibility analysis) 412.
- Southwell, R. V. s. G. K. Batchelor 1.
- Spanier, E. (Homology of Kummer manifolds) 181.
- Speiser, Andreas (Gruppen endlicher Ordnung) 256.
- Spence, D. A. (Lift of a blowing wing) 200.
- Spencer, D. C. s. V. K. A. M. Gugenheim 401.
- Spitzer, Frank (Interval recurrent sums of random variables) 138.
- Springer, George s. Harold T. Davis 80.
- Spurny, H. s. H. Grumm 442.
- Squire, H. B. s. G. K. Batchelor 1.
- Stahlman, William D. (R. C. Archibald) 244.
- Stamatis, Evangelos (Theaetetus von Platon) 242.
- Standish, Charles (Representation of a function by Poisson transform) 106.
- Stech, Berthold (Streuung von Teilchen mit Spin 1/2. I.) 220.
- — s. Finn Bakke 220.
- Steck, Max (Euklid-Kommentar) 4; (J. H. Lambert) 6.
- Stečkin, S. B. (Approximation durch trigonometrische Polynome) 65; (Absolute Konvergenz von Fourierreihen mit Lücken) 65.
- — — s. N. K. Bari 65.
- — — s. A. N. Kolmogorov 6.
- Steffensen, J. F. (Differential equations of Hill) 310.
- Steiger, Franz (Grundlösungen der Gleichung  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ ) 39.
- Steinfeld, O. (Quasiideale von Halbgruppen) 253.
- Steinhaus, Hugo (Fragen der mathematischen Statistik) 144.
- Steinwedel, Helmut s. Kirk McVoy 225.
- Stelson, Hugh E. (Linear inverse interpolation) 129.
- Stepanov (Stepanow), V. V. (W. W.) (Differentialgleichungen) 306.
- Stern, Marvin (Rolling-up of a vortex sheet) 432.
- Stewart, J. D. (Thermal-neutron reactors) 233.
- Stock, John Robert (Mathematische Grundlagen für die Rechenmaschine der ETH) 129.
- Stöcker, Claus (Alternative Divisionsringe) 29.
- Stöhr, Alfred (Funktionentheorie im Raum symmetrischer Matrizen) 76; (Reelles arithmetisch-geometrisches Mittel) 289.
- Stoilow, S. (Mathematische Forschung in Rumänien) 2.
- Stojanović, Dragutin (Temperaturgrenzschichten) 428.
- Straneo, Paolo (A. Einstein) 5.
- Stratton, J. A., P.-M. Morse, L. J. Chu, J. D. C. Little and F. J. Corbató (Spheroidal wave functions) 359.
- Straus, E. G. and J. D. Swift (Representations of integers) 44.
- Stroud, A. H. s. P. C. Hammer 354.
- Strubecker, Karl (Höhere Mathematik, I.) 46.
- Struminskij (Struminsky), V. V. (Boundary layer on a surface) 429.

- Stuart, G. W. (Thermal flux distribution from a neutron line source) 233.
- J. T. (Reynolds stresses) 201; (Effects of Reynolds stress on hydrodynamic stability) 432.
- Stümke, H. (Kritische Geschwindigkeit der reibungs- und relaxationsfreien thermochemischen Gasströmung) 424.
- Stummel, Friedrich (Singular elliptische Differentialoperatoren in Hilbertschen Räumen) 346.
- Suetin, P. K. (Polynomes orthogonal with differentiable weight) 62.
- Sufczyński, M. (Two-centre integrals) 234.
- Suguri, Tsuneo and Seitaro Ueno (Normal coordinates in Kählerian spaces) 171.
- Šulejkin (Shulejkin), V. V. (W. W.) (Wind wave growth) 459.
- — — — — and L. A. Korneva (Wind in ionosphere) 212.
- Sultanov, G. F. (Schema vom Gaußschen Typus) 455.
- Sumner, D. B. (Abel's integral equation) 103.
- Suppes, Patrick (Subjective probability and utility in decision-making) 153.
- Suprunenko, D. A. (Maximale kommutative Unteralgebren) 31.
- Suter, Rufus (Inscriptions on Viviani's house) 242.
- Suvorov, G. D. (In offener Kreisscheibe reguläre Funktionen) 75.
- Suzuki, Haruo (Eilenberg-MacLane invariants of loop spaces) 398.
- Michio (Structure of a group) 254.
- Świątecki, W. J. (Many-body problem) 217; (Deformation energy of a charged drop. I.) 233.
- Swift, J. D. (Diophantus of Alexandria) 4.
- — — s. E. G. Straus 44.
- Swirles, Bertha s. Sir Harold Jeffreys 404.
- Symonds, Malcolm F. (Minimum weight design) 413.
- Sysoev, A. E. (Zerlegung der symmetrischen Gruppe nach einem Doppelmodul) 22.
- Sz.-Nagy, Béla (Remark on S. N. Roy's paper) 13.
- — s. Frigyes Riesz 109.
- Sz.-Nagy s. Frigyes Riesz 109.
- Szablewski, W. (Turbulente Vermischung ebener Heißluftstrahlen) 432.
- Szabó, Arpad (Lehrsatz der pythagoreischen Arithmetik) 3.
- Szabó, I. (Technische Mechanik) 405; (Höhere Technische Mechanik) 406.
- — s. Georg Hamel 195.
- Szamosi, G. s. M. A. Ziegler 452.
- Szarski, J. (Système non-linéaire d'équations paraboliques aux dérivées partielles) 93.
- Szász, Paul (Hyperbolische Trigonometrie) 159.
- Szekeres, G. (Monotone and convex functions) 285.
- Szele, T. and L. Fuchs (Artinian rings) 265.
- Szép, J. (Halbgruppen) 19; (Endliche Gruppen) 256.
- Szeptycki, P. (Morrey-Calkin and Schauder-Sobolev spaces) 114.
- Szmydt, Z. (Équations différentielles) 86; (Surfaces formed by asymptotic integrals of differential equations) 86; (Nouveau type de problèmes pour équations différentielles hyperboliques) 92.
- Szűsz, P. (Satz von G. Szekeres) 44.
- T**akabayasi, T. (Spin theory as limit of Dirac equation) 218; (Dirac equation) 218.
- Takács, L. (Secondary stochastic processes) 141.
- Takeda, Gyo (Decay of hyperons) 228.
- Tallini, Giuseppe (Estensione del teorema di Desargues) 162.
- Tamura, Takayuki (Indecomposable completely simple semigroups) 18.
- — s. Naoki Kimura 260.
- Tanabe, Hiroki (Spectral theory of completely continuous operators) 123.
- Tanaka, Sen-ichiro (Non-linear difference equations. II.) 306.
- Tani, Itiro (Energy dissipation in turbulent boundary layers) 429.
- Tarasov, N. P. (Höhere Mathematik) 278.
- Tarnawski, E. (Continuous functions) 63.
- Tassie, L. J. (Nuclear scattering of high energy electrons) 231.
- Tatarskij, V. J. (Wave moving in unhomogeneous atmosphere) 212.
- Taussky, Olga (A. Mathison Turing) 7.
- — s. Herbert A. Meyer 134.
- Taylor, G. I. and J. C. P. Miller (Fluid flow between porous rollers) 436.
- J. G. (Classical electrodynamics) 210.
- William F. (Problems in contagion) 151.
- Tchakaloff, Lubomir (Fonctions analytiques univalentes) 74.
- Tchen, Chan-Mou (Oscillations of superposed fluids) 435.
- Tedeschi, Bruno (Ammortamenti di prestiti a tassi. I. II.) 155.
- Teicher, Henry (Certain stochastic structure) 375.
- Teixidor, J. (Kurven, die Schnitt algebraischer Flächen sind) 385.
- Temesváry, St. s. L. Biermann 457.
- Temple, G. (A. Einstein) 244.
- — and W. G. Bickley (Rayleigh's principle) 191.
- Tenca, Luigi (Luogo dove nacque Evangelista Torricelli) 7; («De Dimensione Parabolae» di Evangelista Torricelli) 242.
- Teodorčik, K. F. s. I. I. Minakov 87.
- Teodorescu, Petre P. (Problème plan de la théorie de l'élasticité) 188.
- Terleckij, Ja. P. s. A. A. Logunov 442.
- Thalberg, Olaf M. („Conic involutions“) 385.
- Thébault, V. (Droite de Simson) 160; (Hexagone associé à un triangle) 160.
- — s. J. Avdis 160.
- Theimer, O. (Raman effect in crystals) 240.
- Theocaris, P. S. (Stress distribution in a strip loaded in tension) 412.
- Theodorescu, Radu (Châînes continues) 139.
- Theus, R. B. s. Herbert A. Meyer 134.



- Thierrin, Gabriel (Décompositions des groupoïdes) 18; (Demi-groupes) 18.
- Thoma, Alfred s. Wilhelm Hort 80.
- Elmar (Darstellung vollständiger Vektorverbände) 109.
- Thomas, Johannes (Sturmische Differentialgleichungen) 309.
- Thomelin, Robert s. Jean Favier 354.
- Thommen, H. U. s. P. F. Maeder 205.
- Tiago de Oliveira, J. (Distribution-free tests) 146.
- Tichonov (Tikhonov), A. N. and A. A. Samarskij (Samarsky) (Equations with discontinuity coefficients) 126.
- — — s. B. M. Budak 404.
- Tillmann, Heinz Günther (Dualität in der Funktioneentheorie) 114.
- Tippett, L. H. C. (Statistics) 143.
- Tits, J. (Groupes doublement transitifs continus) 25.
- Todd, John (Problem of stability of partial differential equations) 351.
- — s. Herbert A. Meyer 134.
- Tomotika, S. and H. Yosinobu (Flow of a viscous liquid past a flat plate) 421.
- Tong, Hing s. Mary Powderly 176.
- Tonooka, Keinosuke (Three-dimensional space with an algebraic metric) 388.
- Tosberg, Adolf (Mathematik der Krankheitskostenversicherung) 155.
- Toscano, Letterio (Raggi di curvatura di una conica) 162.
- Tóth, L. Fejes s. Fejes Tóth, L. 159, 393.
- Toulmin, G. H. s. I. J. Good 144.
- Townsend, A. A. (Structure of turbulent shear flow) 430.
- — — s. G. K. Batchelor 1.
- Treiman, S. B. and H. W. Wyld jr. (Decay of pi meson) 228.
- — — s. J. Ballam 448.
- Trickett, W. H., B. L. Welch and G. S. James (Two-means problem) 373.
- Trošin, G. D. (Interpolation der in einem Winkelraum analytischen Funktionen) 295.
- Trotter, Hale F. s. Herbert A. Meyer 134.
- Truckenbrodt, E. (Laminare Grenzschicht mit Absaugung) 428.
- Truesdell, C. (Pressures and flux of energy in a gas. II.) 235; (Hauptproblem der endlichen Elastizitätstheorie) 417.
- — s. E. Ikenberry 235.
- Tsuji, Masatsugu (Bieberbach-Grunsky's theorem) 75.
- Tukey, John W. s. Herbert A. Meyer 134.
- Tumarkin, G. C. (Folgen memormorpher Funktionen) 298.
- L. A. (Universeller metrischer Raum für Kompakta) 178.
- Tungl, E. (Membranzustand im elliptischen Paraboloid) 413.
- Turán, Paul (Characteristic equations) 248.
- Turkin, V. K. and G. A. Levin (Detection of frequency modulated oscillations) 68.
- Turnbull, H. W. (A. R. Richardson) 244.
- Turner, J. S. s. P. G. Saffman 460.
- Tutte, W. T. (Abelian groups) 23; (Planar graphs) 184.
- Ueno, Seitaro s. Tsuneo Suguri 171.
- Ufford, C. W. s. S. Meshkov 230.
- Ulam, S. s. Herbert A. Meyer 134.
- Ulrich, E. (Additionstheorem der Vergleichsspannungen) 188.
- Ulukan, Lütfullah (Thermische Schmierkeilbildung) 195.
- Umezawa, H. and A. Visconti (Renormalisation and mass levels) 220; (Commutation relations) 443.
- Untersuchungen über ausgewählte Fragen der Analysis und Geometrie 47.
- Urbanik, K. s. M. Fisz 365.
- Ursell, F. s. G. K. Batchelor 1.
- Uspenskij, V. A. (Berechenbare Operationen) 10.
- Utiyama, Ryoyu (Invariant interpretation of interaction) 221.
- Utumi, Yuzo (Quotient rings) 266.
- Uzkov, A. I. s. P. S. Alexandroff 10.
- Vaart, H. R. van der (Probabilities in Wilcoxon's two sample test) 145.
- Vaccaro, Robert J. s. Chi-Teh Wang 208.
- Vajnberg, M. M. (Eigenelemente ungerader Potentialoperatoren) 123.
- Valensi (Mécanique des fluides dans l'aéronautique) 5; (Recherches à l'Institut de Mécanique de Marseille) 209.
- Valentine, F. A. (Particle constrained to move on a rough convex curve) 410.
- Valfisiz (Val'fiš), A. Z. (Representation of numbers) 273.
- Vandrey, J. F. (Flügel und Rumpf im Überschallgebiet) 203.
- Varvak, P. M. s. M. M. Kabal'skij 404.
- Vasil'ev (Vassiliev), O. F. (Hydraulic jump) 208.
- Vicente Gonçalves, J. (Décomposition des fractions rationnelles) 17.
- Vickery, C. W. s. Herbert A. Meyer 134.
- Vilenkin, N. Ja. (Besselsche Funktionen) 69.
- Villa, Mario (Enseignement des mathématiques en Italie. I. II.) 2.
- Vinograd, R. E. (Verhalten der Lösungen eines regulären Systems) 85.
- Vinogradov, A. I. („Sieb“ des Eratosthenes) 42.
- (Winogradow), I. M. (Zahlentheorie) 38; (Abschätzungen von trigonometrischen Summen) 276.
- Vint, J. (H. R. Hassé) 6.
- Viola, Tullio (Passaggio a limite) 50.
- Visconti, A. s. H. Umezawa 220, 443.
- Višik (Vishik), M. I. (Boundary problem for elliptical equations) 98; (Cauchysches Problem für Gleichungen mit Operatorkoeffizienten) 122.



- Vito, Luciano de (Autovalori e autosoluzioni di trasformazioni hermitiane) 349.
- Vodička, Václav (Longitudinal vibrations of a composite bar) 418.
- Vogt, Erich s. Conyers Her-ring 240.
- Volkov, I. I. (Matrixtransformationen) 286.
- Volosov, V. M. (Differentialgleichungen einer Bewegung) 83.
- Volpato, Mario (Equazioni differenziali ordinarie) 309; (Rettifica) 309; (Trasformazioni funzionali continue) 346.
- Volterra, Vito (Opere matematiche. II.) 103.
- Vorob'ev, Ju. V. (Momen-tenmethode für nicht selbst-adjungierte Operatoren) 122.
- L. M. (Angenäherte Integration von Čaplygin) 126.
- Voroncov, B. D. (Lösung von Gleichungen) 125.
- Voronovskaja, E. V. (Differentialgleichungen für Extremalpolynome) 63.
- Vorovič, I. I. (Stabilität der Bewegungen bei zufälligen Störungen) 368.
- Vranceanu, Georges (Espaces à connexion projective) 173.
- Vygodskij, M. Ja. (Höhere Mathematik) 278.
- Waadeland, Haakon (Arbeit von Golusin) 74.
- Waerden, B. L. van der (Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik) 241.
- — — — — und E. Nievergelt (Tafeln zum Vergleich zweier Stichproben) 145.
- Wagner, A. (Non-Desarguesian planes) 157.
- H. (Schwingungsdauer eines Pendels) 409.
- Wahl, A. M. (Creep in rotating disks) 190.
- Wait, James R. (Radiation resistance of dipoles) 212; (Transient fields of a vertical dipole over a curved ground) 440.
- — — and K. Okashimo (Stub antennas on cylindrical structures) 440.
- Walker, Marshall J. (Representation of rotations by matrices) 165.
- Wall, D. D. (Order of an iteration formula) 125; (Predictor-corrector formulas) 127.
- Wallace, P. R. (One-particle formula for nuclear gamma-radiation) 231.
- Walsh, J. L. and L. Rosenfeld (Boundary behavior of a conformal map) 301.
- John E. s. Herbert A. Meyer 134.
- Walther, A. und W. Hoffmann (Rechenanlagen) 129.
- — s. Elektronische Rechenmaschinen und Informationsverarbeitung 129.
- — s. Herbert A. Meyer 134.
- Walz, A. (Kompressible turbulente Grenzschichten) 429; (Couche limite compressible) 429.
- Wang, A. J. s. L. Garr 417.
- Chi-Teh, Frank Lane and Robert J. Vaccaro (Flutter characteristics) 208.
- Y. s. A. Schinzel 42.
- Ward jr., L. E. (Continuous invariant under monotone transformations) 179.
- Warner, Seth (Polynomial completeness in algebras) 118; (Inductive limits of normed algebras) 341.
- W. H. and G. H. Handelman (Strain law for work-hardening materials) 238.
- Warschawski, S. E. (Distortion in conformal mapping of variable domains) 301.
- Wartmann, Rolf (Logarithmische Normalverteilung) 371.
- Watson, K. M. s. R. M. Frank 226.
- Wattendorf, Frank L. (Theodore von Kármán) 244.
- Ważewski, T. (Inégalités aux dérivées partielles) 89.
- Weber, Erna (Rückschlußproblem in biologischer Statistik) 150.
- Wegner, Udo (Randverschiebungen bei ebenen Spannungsproblemen) 415.
- Weibull, Waloddi (Static strength and fatigue properties) 371.
- Weidenhammer, F. (Stabquerschwingungen) 418.
- Weier, Joseph (Abbildungen von  $(n+1)$ -Sphären in  $n$ -Sphären) 402.
- Weil, N. A. and N. M. Newmark (Large deflections of elliptical plates) 413.
- Weinberger, H. (Upper and lower bounds for eigenvalues) 352.
- Weishu, Shih s. Charles Ehresmann 401.
- Weissinger, Johannes (Aerodynamik des Ringflügels) 425.
- Weizel, W. s. G. Ecker 237.
- Welch, B. L. s. W. H. Trickett 373.
- Wenjen, Čhien (Quasi-equicontinuous sets of functions) 178.
- Weston, J. D. s. R. Harrop 334.
- Wetterling, W. s. L. Collatz 356.
- Wheeler, Ruric E. (Probability distribution function) 361.
- Whitmer, Romaine F. (Electron optical lenses) 442.
- Whittaker, J. M. (F. W. Bradley) 5.
- Sir Edmund Taylor (Nachruf) 7.
- Whitton, P. W. (Roll force and torque in cold-rolling) 190.
- Whyburn, G. T. (Topological analysis) 397.
- Wichmann, Eyvind H. and Norman M. Kroll (Vacuum polarization) 224.
- Widom, Harold (Embedding in algebras of type I) 343.
- Wilets, Lawrence s. Roy A. Berg 230.
- Wilkens, Alexander (Beschleunigung des Enckeschen Kometen) 455; (Integral-Invarianten der Störungstheorie) 455.
- Wilkes, M. V. (Automatic digital computers) 355.
- Williams, Ernest s. E. P. Miles jr. 293.
- R. M. (Variance of mean of systematic samples) 144.
- Williamson, J. H. (Conditions equivalent to normability) 111.
- R. E. (Monotone functions and their Laplace transforms) 285.
- Willmore, T. J. (Parallel distributions on manifolds) 388.

- Wilson, Thurlow R. s. Leo Katz 142.
- Wing, G. Milton s. Joseph Lehner 347.
- Wintner, Aurel (Curvatures of a surface) 167; (Absolute constant pertaining to Cauchys „principale moduli“) 295.
- s. Ph. Hartman 312.
- Wishart, John ( $\chi^2$  probabilities) 372.
- Wisner, Robert J. s. Rimhak Ree 24.
- Witt, Ernst (Unterringe der freien Lieschen Ringe) 29.
- Włodarski, L. (Méthodes continues de limitation) 60; (Sommatation du type de Borel) 60.
- Wolf, K. Lothar und Robert Wolff (Symmetrie) 1.
- Wolff, Robert s. K. Lothar Wolf 1.
- Wolfowitz, J. s. J. Kiefer 366.
- Wolfson, Kenneth G. (Annihilator rings) 119.
- Wolska, J. (Équation du mouvement permanent du fluide visqueux) 325.
- Wolter, Hans (Messung physikalischer Größen) 441.
- Wong, J. Y. (Coaxial transmission line) 441.
- Wooding, R. A. (Complex normal variables) 362.
- Wortham, A. W. s. Franklin A. Graybill 145.
- Wosnik, J. s. Elektronische Rechenmaschinen und Informationsverarbeitung 129.
- Wu, Ching-Sheng (Bending of rectangular plate) 413.
- T. Yao-Tsu (Sink flow of a viscous) 206.
- Wen-Tsün s. A. Blanchard 399.
- Wuest, Walter (Absaugengrenzschichten) 201.
- Wunderlich, W. (Abwicklung des Kegels 2. Ordnung) 132.
- Wünsche, Günther (Kontrolle von Ausscheidheäufigkeiten) 154.
- Wuyts, P. (Representation of an analytic function by a Laplace-integral) 105; (Nullstellen eines Laplace-schen Integrals) 333.
- Wyld jr., H. W. s. S. B. Treiman 228.
- Yamamoto, Koichi (Structure polynomial of latin rectangles) 11.
- Yang, C. N. s. K. M. Case 228.
- Yen, K. T. (Compressible boundary layer) 429.
- Yerushalmy, J. s. C. L. Chiang 152.
- Yevick, George J. and Jerome K. Percus (Many-body problem) 218.
- — — s. Jerome K. Percus 218.
- Yih, Chia-Shun (Hyper-Bessel equation) 68.
- Yntema, L. (Central limit theorem) 138.
- Yokota, Ichiro (Cell structures of  $SU(n)$  and  $Sp(n)$ ) 258; (Cells of symplectic groups) 258.
- Yoshida, Michio (Polynomial extensions of rings) 35.
- Yoshii, Tensho (Algebras of bounded representation type) 31.
- Yosida, Yôiti (Inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique) 58.
- Yosinobu, H. s. S. Tomotika 421.
- Yzeren, J. van (Isogonale Beziehungen im vollständigen Viereck) 381.
- Zaddach, Arno (Anti-Fano-Ebenen) 378.
- Zadiraka, K. V. (Majoranten-Minoranten-Methode) 84; (Satz von A. N. Tichonov) 87.
- Zagorskij, T. Ja. (Parabolische Systeme im Halbraum) 321.
- Zalgaller, V. A. (Two-dimensional manifolds of bounded curvature) 392.
- Zawadowski, W. s. W. Słowikowski 111.
- Železina (Zhelezina), I. I. (Line-geometry of degenerated non-Euclidean spaces) 384.
- Zelinsky, Daniel s. Alex Rosenberg 269.
- Zeller, Karl (Perfekter Teil von Wirkfeldern) 59; (Vergleich des Abelverfahrens mit Matrixverfahren) 59.
- Zemach, A. C. and R. J. Glauber (Neutron scattering by molecules) 232; (Neutron diffraction by gases) 233.
- Zeragija, P. K. (Randwertaufgaben für nichtlineare Differentialgleichung) 95.
- Ziegler, Hans (Symmetrischer Kardankreisel) 408.
- — s. Richard Grammel 408.
- M. A. and G. Szamosi (Relativistic effects in theory of the  $\alpha$ -particle) 452.
- Zierep, Jürgen (Ringflügel bei beschleunigtem Überschallflug) 426; (Atmosphärische Hinderniswellen) 460.
- Zinner, Ernst (Astronomische Instrumente des 11. bis 18. Jahrhunderts) 4.
- Žmud', É. M. (Lineare Darstellungen endlicher Gruppen) 24.
- Zubov, V. P. (Rezension über „Pangeometrie“ Lobačevskijs) 6.
- Zuchovickij (Zukhovitsky), S. I. (Minimum problem) 113.
- Zwick, S. A. s. M. Lipow 132.
- Zygmund, A. (Theorem of Marcinkiewicz) 337.
- Zykov, A. (Spectrum problem) 245.